

Astrofyzika IV.

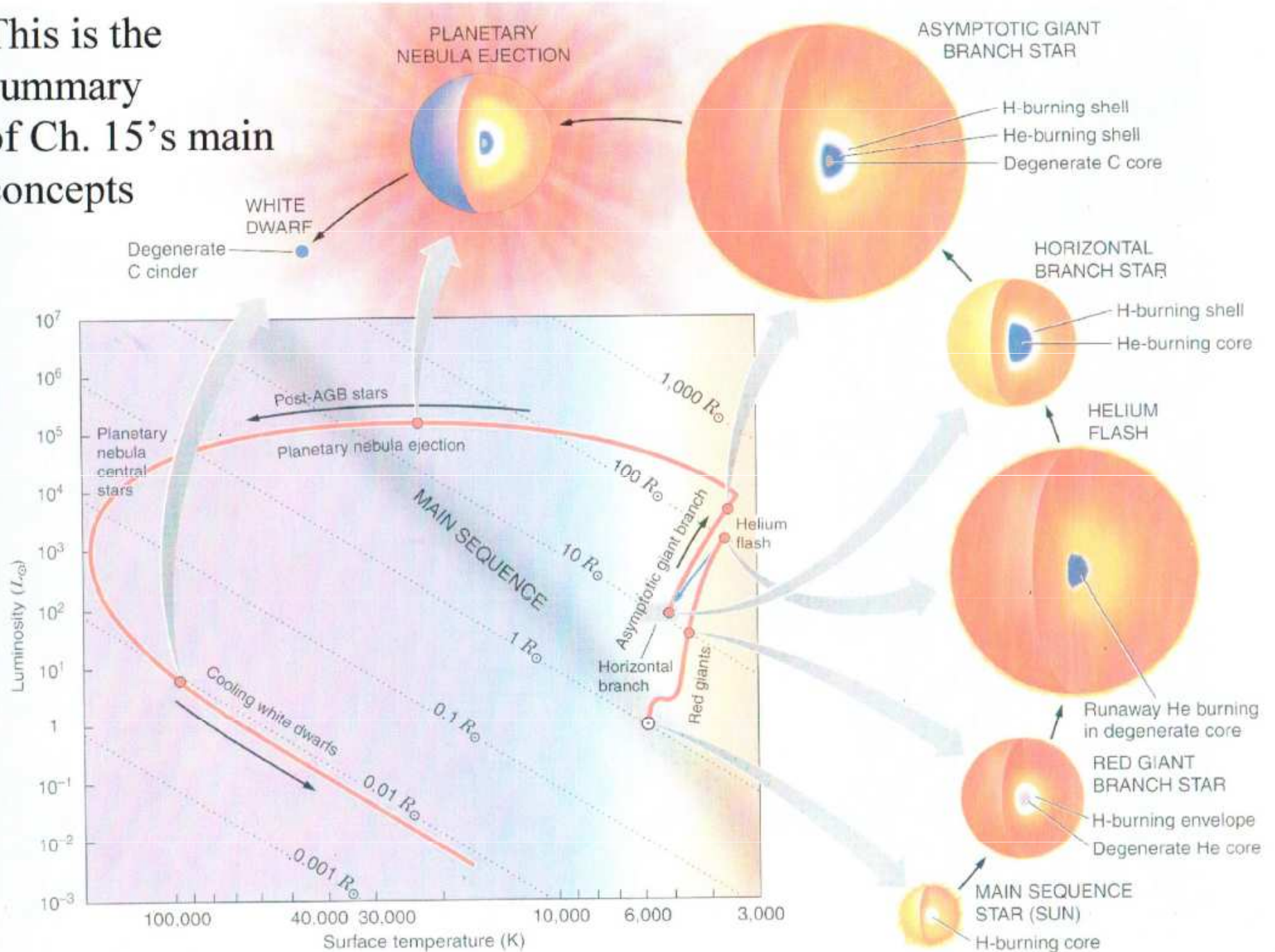
**Odchod z hlavní posloupnosti,
závěrečná stadia vývoje hvězd**

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Odchod z hlavní posloupnosti

This is the summary of Ch. 15's main concepts



Odchod z hlavní posloupnosti

Vývoj hvězd po odchodu z hlavní posloupnosti závisí na hmotnosti. U hvězd s hmotností větší než $3 M_{\odot}$ existuje v centrální oblasti konvektivní jádro, které umožňuje dokonalé promíchávání hvězdné látky, takže celé jádro je chemicky stejnorodé. Hvězdy s menší hmotností, jež nemají v centrální oblasti konvektivní jádro, se vyznačují chemickou nestejnorodostí hvězdné látky. Proto hvězdy různých hmotností mají po odchodu z hlavní posloupnosti relativně odlišný vývoj. Souhrnně je tento vývoj zachycen na vývojových křivkách v H-R diagramu, viz obr. 18, pro hvězdy s hmotností $1 M_{\odot}$ až $15 M_{\odot}$.

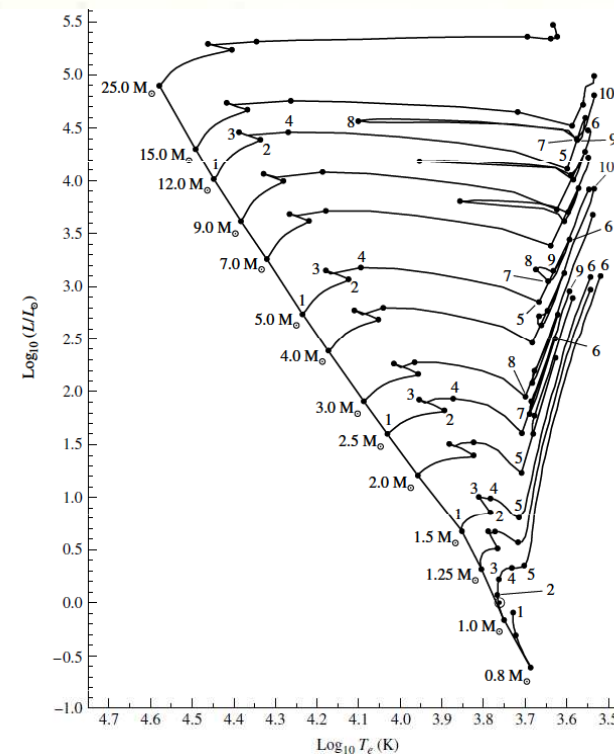


FIGURE 1 Main-sequence and post-main-sequence evolutionary tracks of stars with an initial composition of $X = 0.68$, $Y = 0.30$, and $Z = 0.02$. The location of the present-day Sun (see Fig. 2)

Proč a jak vznikají červení obři

1. Nárůst zářivého výkonu jádra.
2. Existenci gradientu střední hmotnosti připadající na jednu částici μ mezi jádrem a obalem.
3. Existenci atmosférické opacity, která je rostoucí funkcí teploty.

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_f^4$$

$L \uparrow$ - problém zářivého výkonu T nebo R ?

$$L = -4\pi r^2 \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \quad , T, \kappa, \rho \dots \text{fotosféra}$$

teplotní gradient $-\frac{dT}{dr} = \frac{\mu G M}{r^2 A} \frac{1}{1+n}$ - optimální index polytropy

univ. plys. konst.

kombinací rovnic

obdržíme
$$L = \left(\frac{16\pi}{3}\right) \left(\frac{acG}{A}\right) \left(\frac{\mu M}{1+n}\right) \left(\frac{T^3}{\kappa\rho}\right)$$

Proč a jak vznikají červení obři

aplikujeme na atmosféry hvězd $k = C \rho^{\alpha} T^{\omega}$

dele platí $\rho \sim \frac{M}{R^3}$; $\rho \sim R^{-3}$

Kramersův
vzorek

$$\frac{\Delta L}{L} = (3 - \omega) \frac{\Delta T}{T} + \gamma(1 + \alpha) \frac{\Delta R}{R}$$

• $\frac{\Delta L}{L} = 4 \frac{\Delta T}{T} + 2 \frac{\Delta R}{R}$; dle rovnice získáme

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\alpha}{\omega + 5} \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\omega + 1}{\gamma(\omega + 5)} \frac{\Delta L}{L}$$

$L \uparrow$ při $T \uparrow, R \uparrow$; $\rho \downarrow$ opacita $\downarrow$ $k \uparrow$ při $T \uparrow$

při $\frac{\Delta T}{T} \rightarrow 0$ a $\frac{\Delta R}{R} \rightarrow \gamma^{-1} \frac{\Delta L}{L}$ $\omega \rightarrow \infty$ •

při $L \uparrow$ $T = \text{konst.}$ $R \uparrow$

Podmínky vzniku červených obrů



pro $M_c \gg M_{\text{obal}}$

$$|W_p| \approx \frac{G M_c^2}{R_c} + \frac{G M_c M_{\text{obal}}}{R}$$

rozdělení mezi jádro a obálku trvá

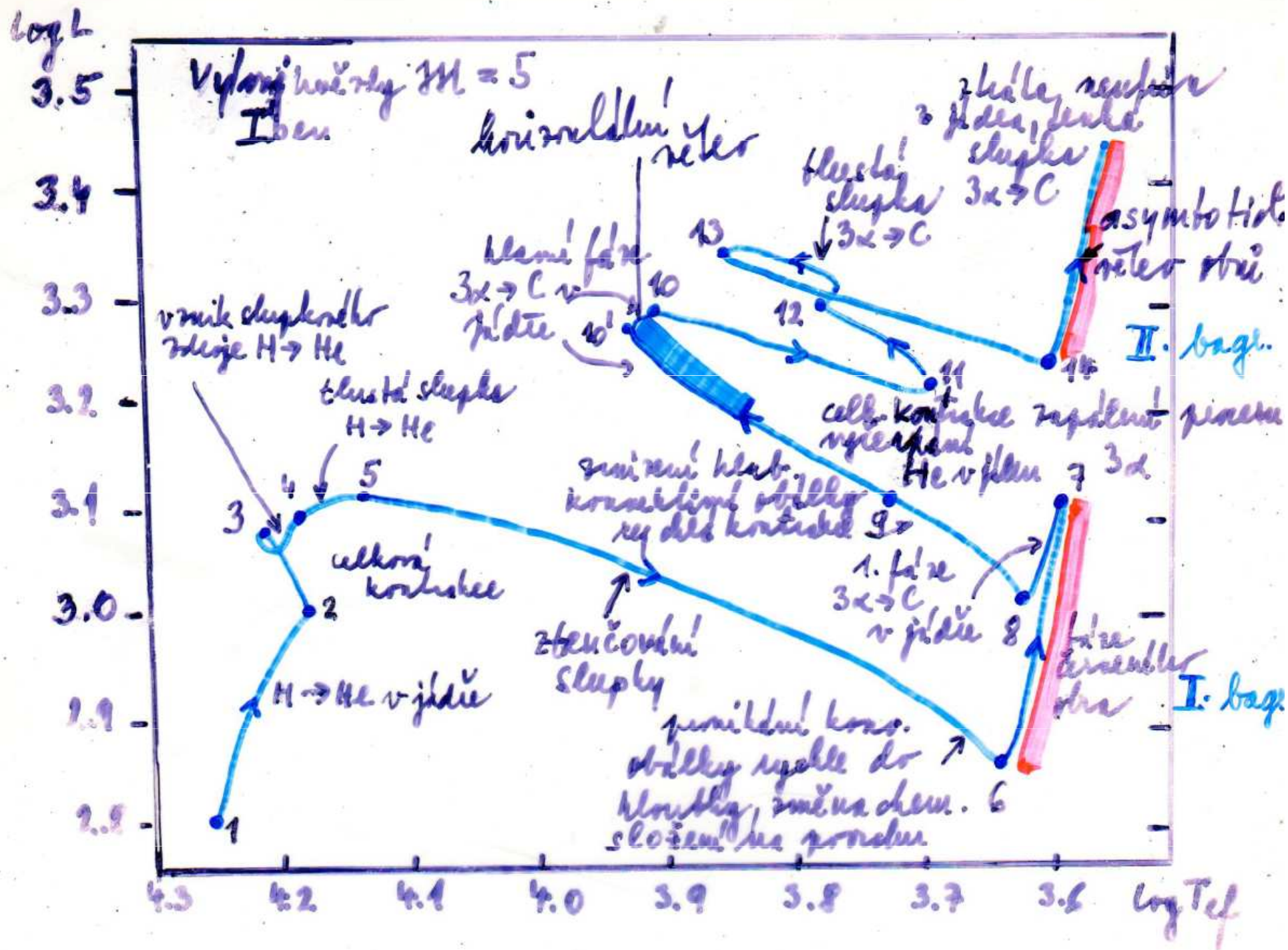
$$\frac{dW_p}{dt} = 0 \quad 0 = - \frac{G M_c^2}{R_c^2} \frac{dR_c}{dt} - \frac{G M_c M_{\text{obal}}}{R^2} \frac{dR}{dt}$$

obálka expanduje, jádro se smršťuje

$$\frac{dR}{dR_c} = - \left(\frac{M_c}{M_{\text{obal}}} \right) \left(\frac{R}{R_c} \right)^2$$

... vyplývá
to z chem.
nehomoge-
nity hvězdy

Odchod z hlavní posloupnosti, 5 Ms



Odchod z hlavní posloupnosti

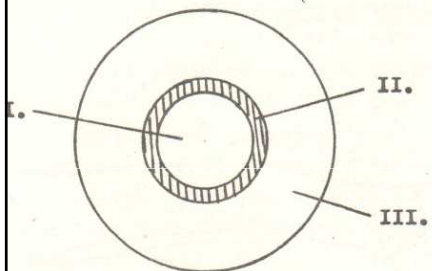
Odchod hvězdy 5% z hlavní posloupnosti

1-2: HP, CNO cyklus v konvekčním jádře, znečištění
hustoty v centrální části 22% → 8% hustoty
hvězdy, zředěná teplota, hustota, růst produkce
energie → zdánlivý výkon, poloměr 2,4 → 4,3 $R_{\odot}$,
rovnovážná teplota klaví

$$X = 0.71$$
$$Y = 0.27$$
$$Z = 0.02$$

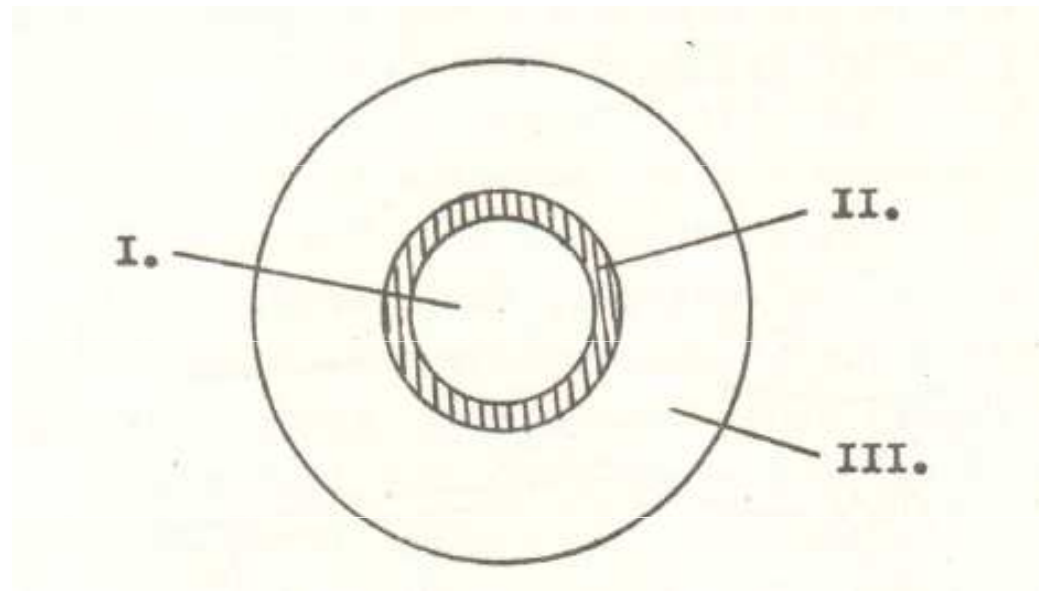
2-3: Od 2 celkové kontroly hvězdy, rovnovážná
teplota nastává, konvekční jádro se zmenšuje,
3 - opouští HP; 3,9 $R_{\odot}$, $T_c = 3,6 \cdot 10^7 K$,
 $L = 1,3 \cdot 10^3 L_{\odot}$

3-4: konvekční jádro mizí, kolem heliového jádra se
vytvoří vodíkový slupkový zdroj, 4 - vyhořelé
heliové jádro, 7% hustoty hvězdy, zdánlivý
výkon jádra hvězdy $L_c \approx 0,6 L_{\odot}$, slupky
 $L_{\text{sl}} \approx 1,3 \cdot 10^3 L_{\odot}$, rovnováha a stabilizace hvězdy.



Hvězda s vodíkovým slupkovým zdrojem

Hvězdy s vodíkovým slupkovým zdrojem



aktivní slupkový zdroj – zrcadlový efekt
mezi jádrem a obalem

smíšené jádro → expanze obalů
expanze jádra → smíšené obalů

Odchod z hlavní posloupnosti

- 4-5: vodíková slupka ztlouká hvěztku, obsahuje i
5% hmotnosti, stlačuje se směrem k zrovnání
hvězd, expanze hvězd, $L_c \approx 6 L_s$, $L_{se} \approx 9 L_{OLs}$,
36% energie a spotřebování na expanzi hvězd,
→ 5, hmotnost dep. intermichle jader -10%
hmotnosti hvězd Schönbergova - Chandrasekhar-
ova mez, jader se smršťují, zahívají, obálka
expanduje, R.T., $L \downarrow$
5-6: hvězda slupka se ztenčuje, hmotnost ubývá
⑤ 3,5% $M_h \rightarrow 0,5\% M_h$ ⑥, expanze,
ochlazení obálky, ztlouká nepůvodní,
→ 6 ... přenos energie konvekcí v obálce

Schoenbergova-Chandrasekharova limitní hmotnost izotermického jádra

1942ApJ...96...

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL

AN INTERNATIONAL REVIEW OF SPECTROSCOPY AND
ASTRONOMICAL PHYSICS

VOLUME 96

SEPTEMBER 1942

NUMBER 2

ON THE EVOLUTION OF THE MAIN-SEQUENCE STARS

M. ŠCHÖNBERG¹ AND S. CHANDRASEKHAR

ABSTRACT

The evolution of the stars on the main sequence consequent to the gradual burning of the hydrogen in the central regions is examined. It is shown that, as a result of the decrease in the hydrogen content in these regions, the convective core (normally present in a star) eventually gives place to an isothermal core. It is further shown that there is an upper limit (~ 10 per cent) to the fraction of the total mass of hydrogen which can thus be exhausted. Some further remarks on what is to be expected beyond this point are also made.

1. *General considerations.*—The problem of stellar evolution is intimately connected with that of energy production in the stars. Both Bethe and Weizsäcker² showed that the source of the energy radiated by the main-sequence stars is the transformation of hydrogen into helium through the so-called “carbon cycle.” On the basis of the Bethe-Weizsäcker theory, G. Gamow³ outlined a picture of stellar evolution.

The Gamow theory is based on three fundamental assumptions: (a) the stars evolve gradually through a sequence of equilibrium configurations; (b) the successive equilibrium configurations are homologous; and (c) the nuclear reaction continues to take place until the entire hydrogen in the star is exhausted.

Schoenbergova-Chandrasekharova limitní hmotnost izotermického jádra

- ❑ The reason for this maximum in stable isothermal core mass is basically the virial theorem.
- ❑ Maximum fraction of mass in core (Schoenberg and Chandrasekhar, 1942):

$$\begin{aligned}\frac{M_{\text{isoth. core}}}{M} &\approx 0.37 \left(\frac{\mu_{\text{envelope}}}{\mu_{\text{isoth. core}}} \right)^2 \\ &= 0.37 \left(\frac{0.61}{1.34} \right)^2 = 0.08 \quad \text{for the Sun}\end{aligned}$$

Schoenbergova-Chandrasekharova limitní hmotnost izotermického jádra

maximální hmotnost izotermického jádra M_J
vzhledem k celkové hmotnosti hvězdy M

Schoenbergova - Chandrasekharova limita

Márió
1914
1990

$$\left(\frac{M_J}{M} \right) \approx 0,37 \left(\frac{\mu_{ob}}{\mu_J} \right)^2$$

1910
1995

Ap J, 1942
p. 161

při překročení - směřování heliového jádra

$$\mu_J \uparrow \Rightarrow M_J \downarrow$$

$$\mu = \frac{2}{3X + 0,5Y + 1}$$

Schoenbergova-Chandrasekharova limitní hmotnost izotermického jádra

Maximální hmotnost izotermického jádra M_j vzhledem k celkové hmotnosti hvězdy M_{hv} je **Schoenbergova-Chandrasekharova mez** -

$\frac{M_j}{M_{hv}} \cong 0,38 \left(\frac{\mu_{ob}}{\mu_j} \right)^2$. Izotermické jádro je převážně složeno z helia $Y \cong 0,98$, $Z \cong 0,02$, $\mu_j \cong 1,3$. Obálka je především ionizovaný vodík $X \cong 0,71$, $Y = 0,27$, $Z \cong 0,02$, $\mu_{ob} \cong 0,6$. Dosadíme $\frac{M_j}{M_{hv}} \cong 0,38 \left(\frac{0,6}{1,3} \right)^2 \cong 0,08$. Je-li v izotermickém jádru více než 8% celkové hmotnosti hvězdy, stane se nestabilní a začne se jádro smršťovat.

Při překročení nastane smršťování heliového jádra, $\mu_j \uparrow \rightarrow M_j \downarrow$, $\mu = \frac{2}{3X+0,5Y+1}$.

Schoenbergova-Chandrasekharova limitní hmotnost izotermického jádra - úloha

Úloha: Hvězda je formována při počátečním chemickém složení $X = 0,68$, $Y = 0,30$, $Z = 0,02$,

$\mu_{ob} \cong 0,63$. V jádru proběhla přeměna vodík $\rightarrow$ helium. Následně

$\mu_j \cong 1,34$, dosazeno $\frac{M_j}{M} \cong 0,08$.

Uplatňuje se tzv. **zrcadlový efekt** mezi jádrem a obalem, smršťování jádra $\rightarrow$ expanze obálky, expanze jádra $\rightarrow$ smršťování obálky. Jádro se smršťuje, zahřívá, obálka expanduje, poloměr $R \uparrow$.

Odchod z hlavní posloupnosti

6. červený obr, $T_c \approx 10^8 \text{ K}$, $L \approx 8,8 \cdot 10^4 L_\odot$,
helium flash - záblesk, krátkou dobu,
moment konkrétní obálky se mění, jak se
přibližuje ke stupci, tak k povrchu hvězdy,

6.-7. nárost teploty a hustoty ve stupci $\rightarrow$ zvýšená
produkce energie, nastává výbuch, pokles
opacitý polypodrobných vrstev s T_c , iont H^- ,
nárost výbuchu výkonu, ⑦ - $74 R_\odot$, konkrétní
vrstva nachází do vrstev ovlivňovaných
termochemickými reakcemi $\rightarrow$ změny chem.
středů na povrchu, pokles obsahu li a dalších
prvků, iust obsahu prvků, kterých zůstalo
při term. reakcích, např. ${}^3_2\text{He}$, konkrétní
vrstva se přibližuje k oděkové stupci ⑦,

Odchod z hlavní posloupnosti

roste obsah ${}^{14}_7\text{N}$ (včetně ${}^{12}_6\text{C}$) a klesá
obsah ${}^{12}_6\text{C}$, $\Rightarrow$ změna poměru
izotopů ${}^{12}_6\text{C} / {}^{13}_6\text{C}$ a poměru ${}^{14}_7\text{N} / {}^{12}_6\text{C}$ na
povrchu hvězdy, nárost centrální teploty $\Rightarrow$
změna densit - rychlé

7. - 9. $\odot$ - 3 x proud, náhle explozivní, veškerá
energie se nestíhá převést k povrchu, jádro
expanduje, vnější obálka se smršťuje,
povrchová teplota roste, vodíková slupka je
hlavním zdrojem energie, dodává 85% energie

Odchod z hlavní posloupnosti

- energetická rovnováha mezi výdejem a
produkci vyžaduje slábnutí sloupky $\Rightarrow$
dostatečná teplota, centrální jádro se při 3x
procesu roztání a ochlazení, směřování
vnějš! obálky mezi body ⑧ - ⑨
10. při hoření helia ⑦ - ⑩ roste s čásem
konvektivní jádro, v maximum dosahuje
6% H/H , teplota stále stoupá v jádru,
produkce energie z helionů a vodíkových
hoření stále roste 0,05 $\rightarrow$ 0,36, počet
reagujících částic v jádru klesá, než se
smíší; opouští v expandujícím vnějším
obalu narušit, intenzita hoření vodíkové
sloupky klesá
11. obsah He ve střední oblasti klesá stejně
jako konstant konvektivní jádro, že
bodem ⑪ se zvyšuje obsah He v jádru,
vytvorí se helionů sloupky zleva, kvůli
se smíší

Časová škála při odchod z hlavní posloupnosti

časová škála vývoje od HP 5

Body	Doba trvání v letech	Vývojová etapa
1-2	$6,4 \times 10^7$	hořím vodík v jádře
2-3	$2,2 \times 10^6$	celkové smršťování hvězdy
3-4	$1,3 \times 10^6$	hořím ve vodíkovém slohu
4-5	$0,8 \times 10^6$	rozšiřování ^{vně} konvektivní obal
5-6	$0,5 \times 10^6$	suchý obal
6-7	$6,0 \times 10^6$	hořím helia v jádře
7-8	$1,0 \times 10^6$	znik konvektivní obal
8-9	$9,0 \times 10^6$	hořím helia v jádře je
9-10	$1,0 \times 10^6$	opět ^{maximální} rozšiřování konv. obalů

Časová škála při odchod z hlavní posloupnosti

Časová škála vývojových etap při odchodu hvězdy z hlavní posloupnosti

Body	Doba trvání v rocích	Vývojová etapa
1 - 2	$6,44 \cdot 10^7$	hoření vodíku v jádře
2 - 3	$2,2 \cdot 10^6$	celkové smršťování hvězdy
3 - 4	$1,34 \cdot 10^6$	hoření ve vodíkovém slupkovém zdroji
4 - 5	$0,8 \cdot 10^6$	rozšiřování konvektivní obálky
5 - 6	$0,5 \cdot 10^6$	rudý obr
6 - 7	$6,0 \cdot 10^6$	hoření helia v jádře
7 - 8	$1,0 \cdot 10^6$	zánik konvektivní obálky
8 - 9	$9,0 \cdot 10^6$	hoření helia v jádře je v maximu
9 - 10	$1,0 \cdot 10^6$	opětne rozšiřování konvektivní obálky

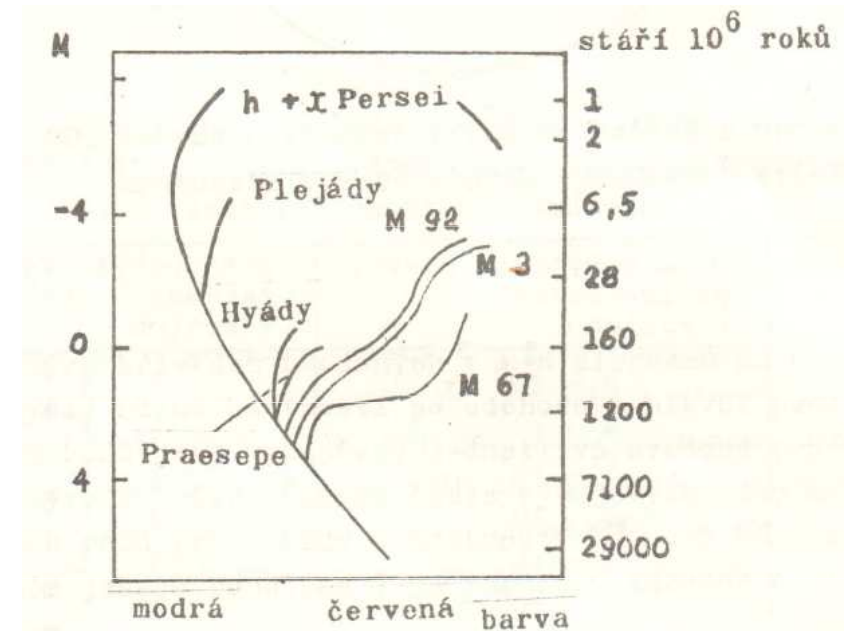
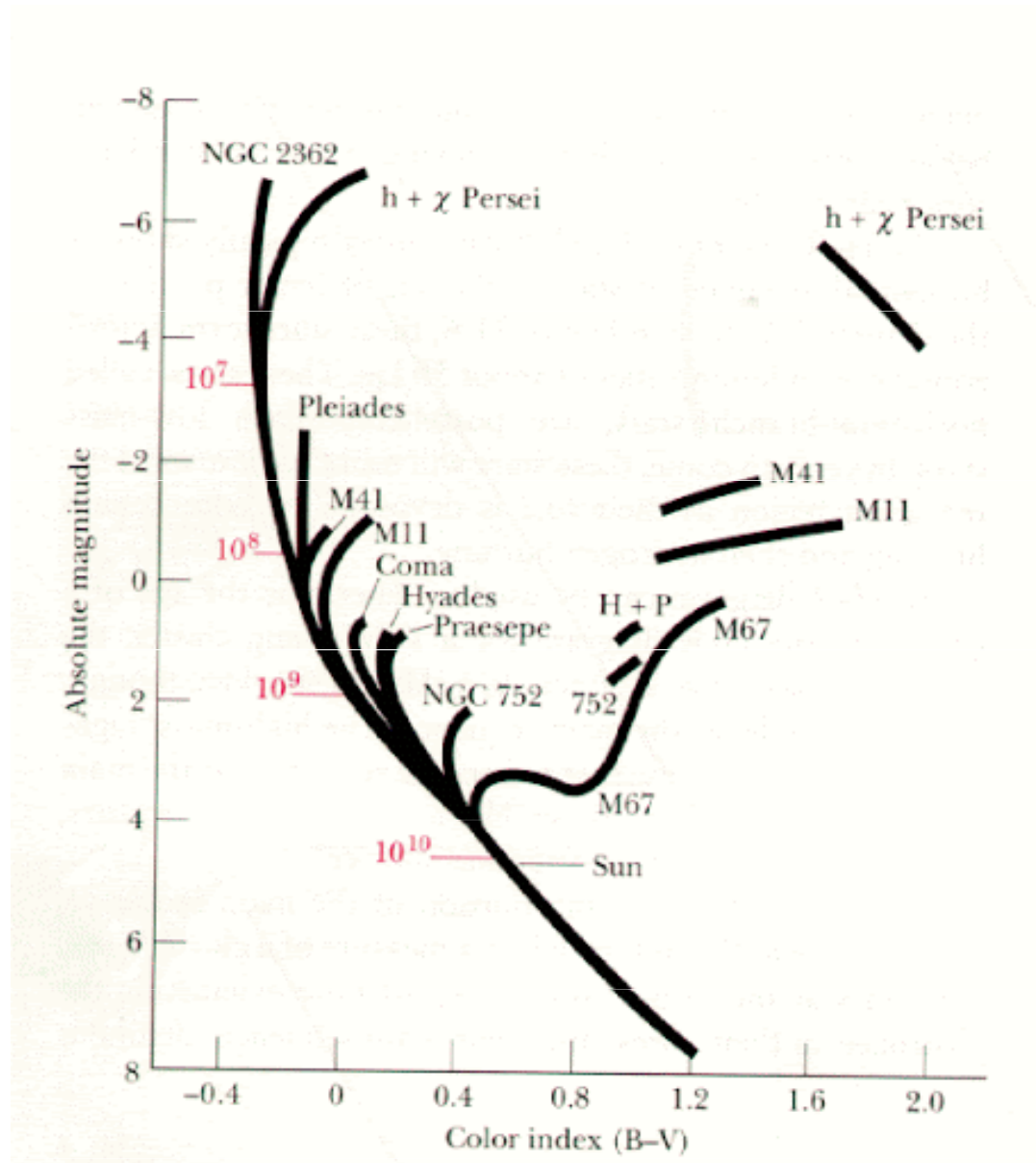
Časová škála doby pobytu na HP a ve stádiu červených obrů

Doba pobytu hvězd na hlavní posloupnosti a ve stádiu červených obrů a veleobrů pro různé hmotnosti

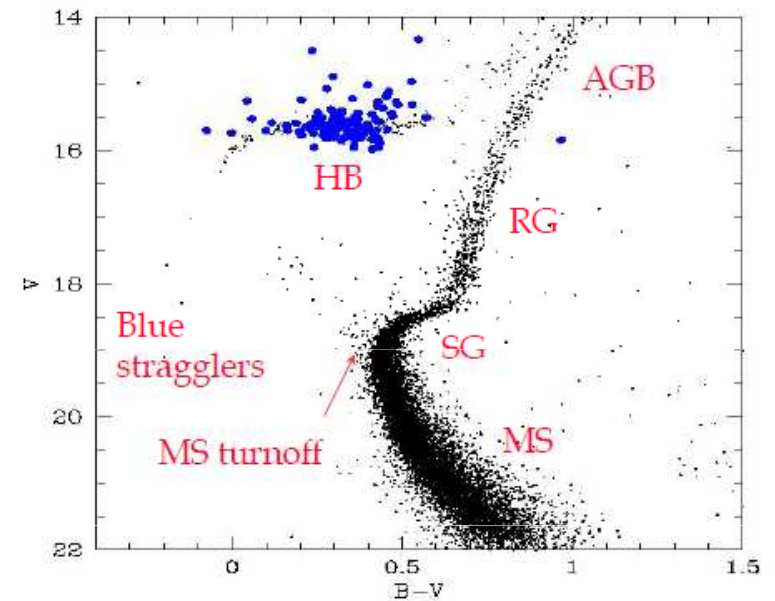
Hmotnost hvězd v $M_{\odot}$	Doba pobytu na hlavní posloupnosti v rocích	Doba pobytu ve stádiu červených obrů, veleobrů v rocích
64	$2,5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^3$
32	$4 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^4$
15	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^6$
10	$2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^6$
5	$7 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$
3	$2 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^7$
1,5	$1,5 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^8$
1,0	$7 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^9$
0,75	$2 \cdot 10^{10}$	*
0,5	$1,2 \cdot 10^{11}$	

* Výpočty nebyly prováděny.

Odchod z hlavní posloupnosti

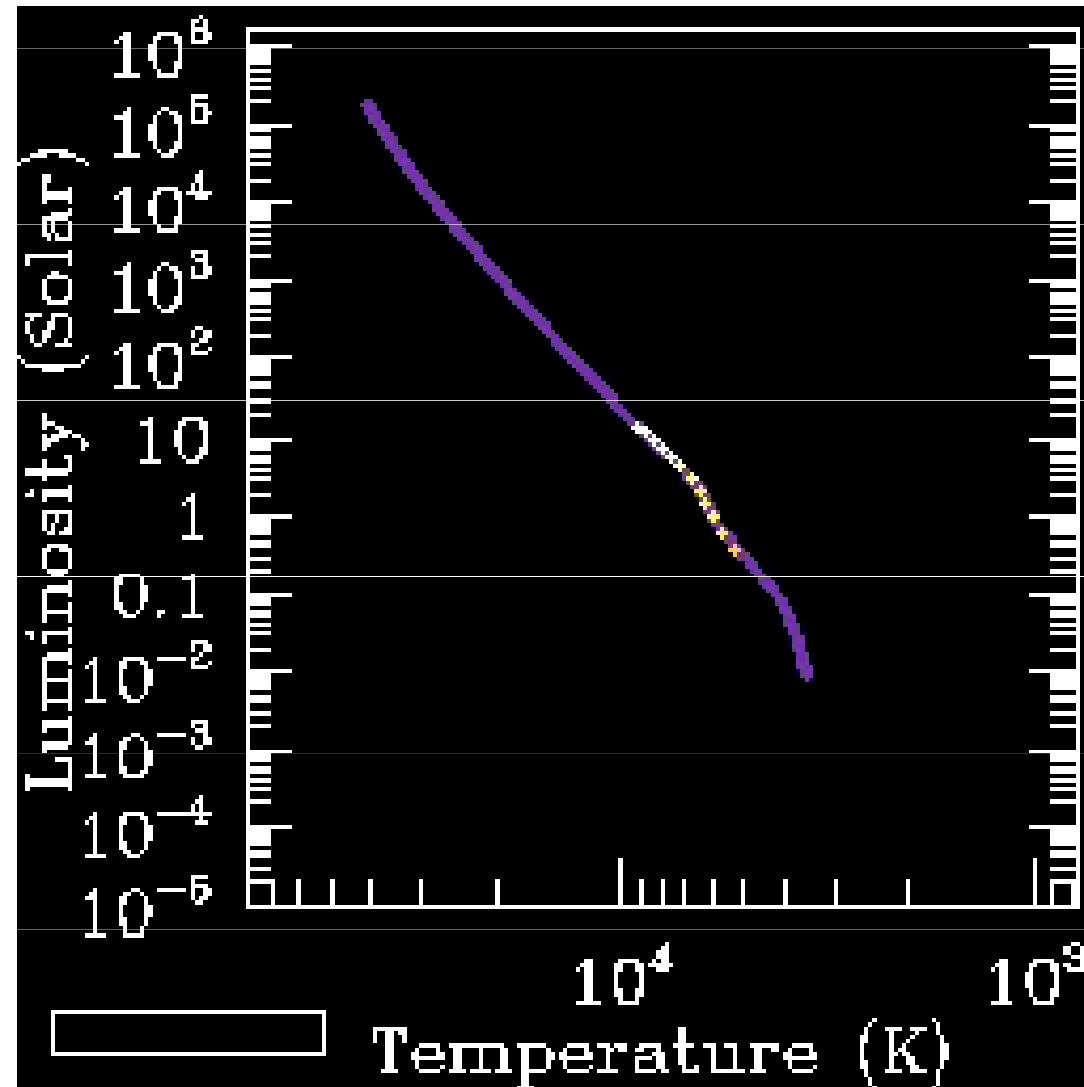


M3 color-magnitude diagram



* RR Lyrae (pulsating HB stars are highlighted)

Odchod z hlavní posloupnosti



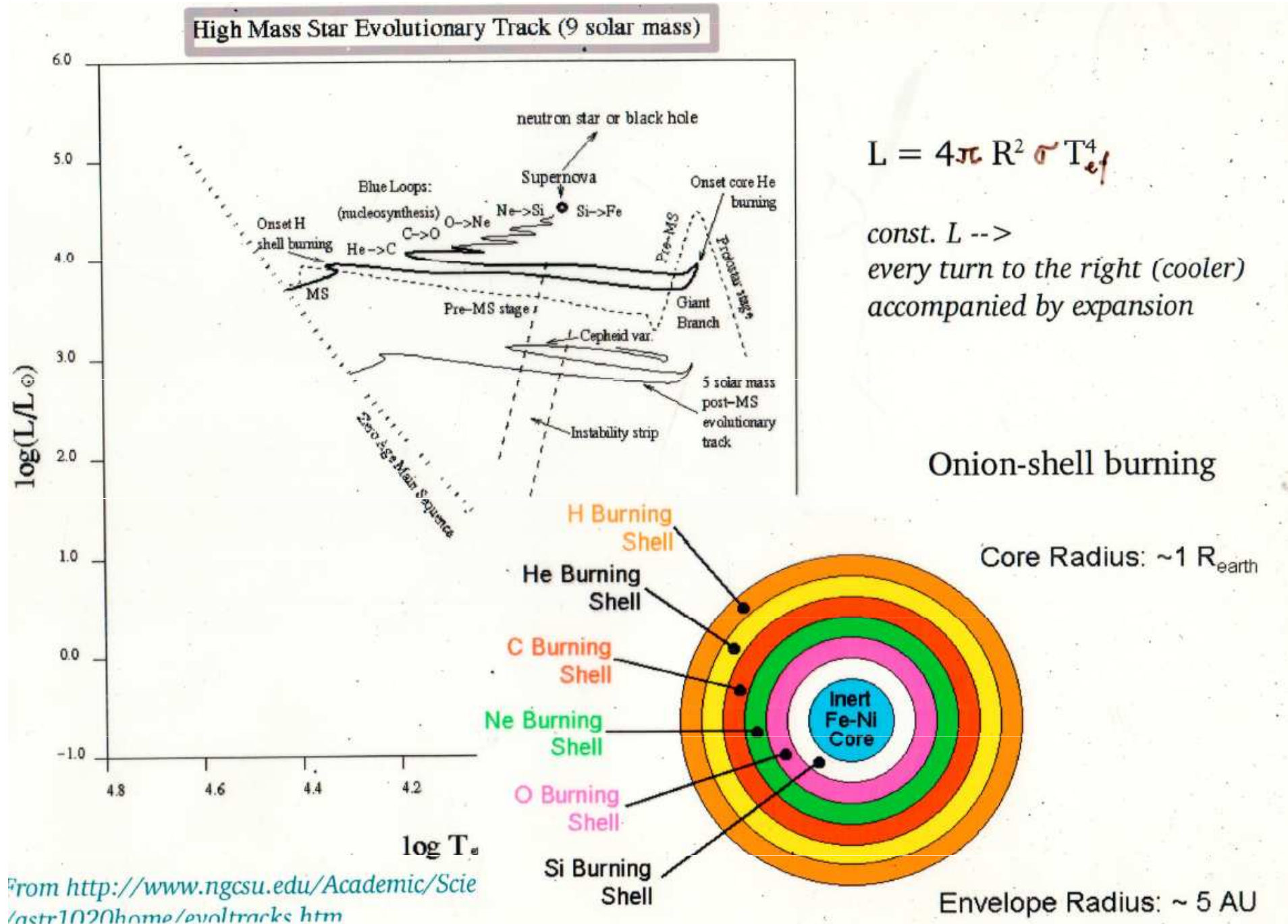
Kulové hvězdokupy - červení obři



Kulová hvězdokupa M 55 - červení obři



Odchod z hlavní posloupnosti, 9 Ms



Planetární mlhoviny

při hmotnosti jádra hvězdy menší než 1,4 Ms při průchodu pásmem nestability se formuje vnější obálka, která přibližně 20 tisíc roků obklopuje hvězdu, rozpíná se, vzniká

tzv. planetární mlhovina M 72 Helix - hlemýžď

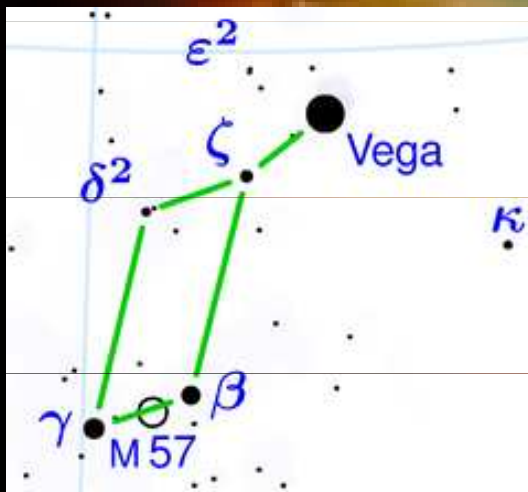


Planetární mlhovina M 57

$r = 700 \text{ pc}$

$t \approx 20\,000 \text{ roků}$

$v \approx 30 \text{ km.s}^{-1}$



modrá barva He II 468.3 nm

zelená barva O III 500.7 nm

červená barva N II 658.3 nm

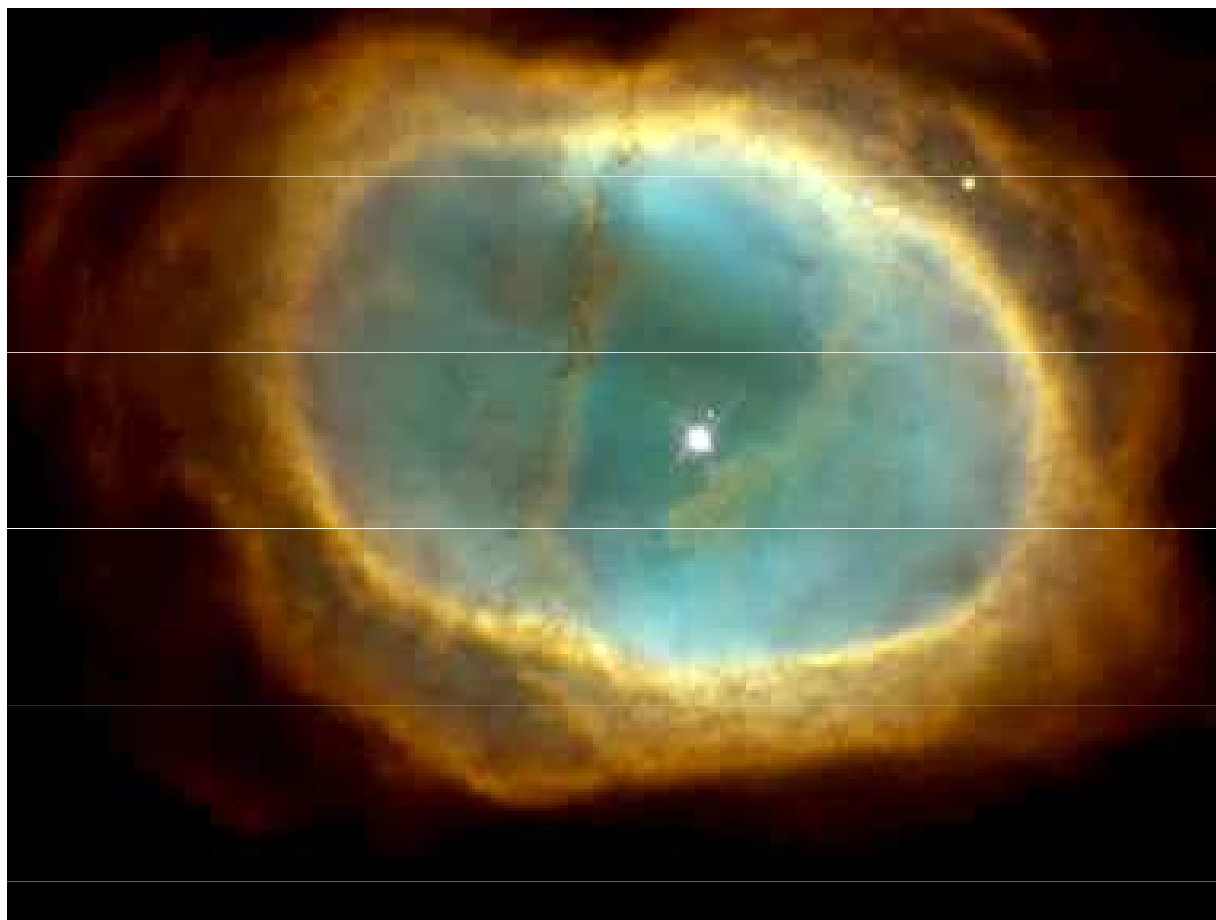
Planetární mlhovina Abell 39



Vznik planetární mlhoviny



Planetární mlhoviny



Bílí trpaslíci

5.1. Bílí trpaslíci

Při hmotnosti jádra hvězdy $M < 1,4 M_{\odot}$ se v závěrečných vývojových stádiích hvězd formuje vnější obálka, která v průběhu přibližně 10 - 20 tisíc roků obklopuje hvězdu jako planetární mlhovina a dále se pomalu rozšiřuje do okolního prostoru. Jádro se smršťuje na poloměr řádově 10^7 m a z hvězdy se stává bílý trpaslík. Uvedeným způsobem zakončuje svůj vývoj asi 95 % hvězd. Bílý trpaslík je hvězda stabilní konfigurace, tlaková síla vyvolaná degenerovaným elektronovým plynem je v rovnováze s gravitační silou.

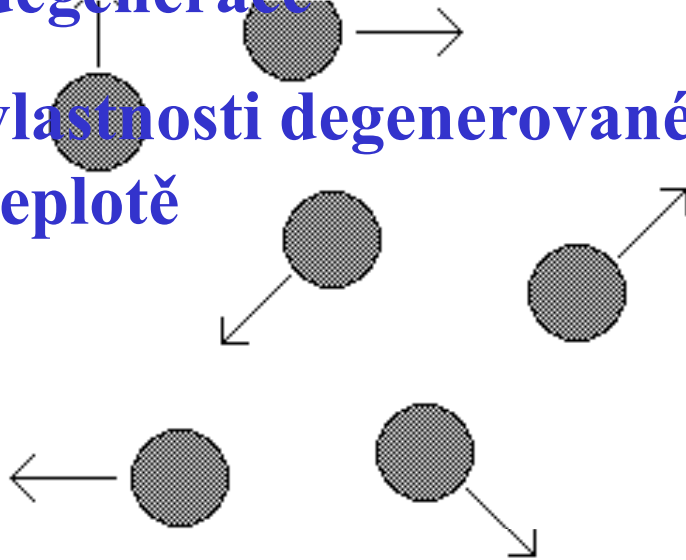
... platí obecný vztah

Bílé trpaslíci – elektronová degenerace

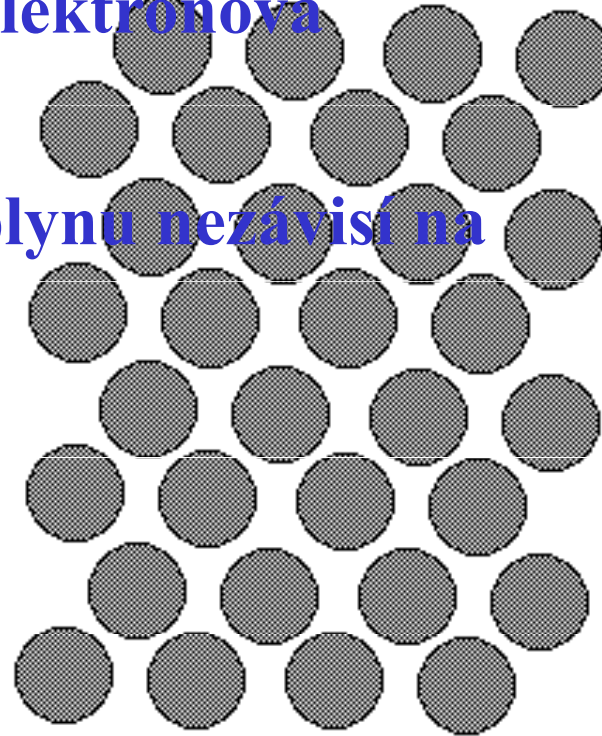
When a gas becomes extremely high in density, the atoms are not as free to move and they become degenerate.

při $\rho > 10^6 \text{ kg.m}^{-3}$ nastává elektronová degenerace

vlastnosti degenerovaného plynu nezávisí na teplotě



Normal Gas



Degenerate Gas

the result is that you can increase the temperature of the gas (the atoms can wiggle more) but the pressure stays constant (they have no where to move).

Tlak v nitru hvězd při elektronové degeneraci

d ... průměrná vzdálenost mezi elektronový plynn

Heisenbergův princip neurčitosti

$$d \cdot p_F \approx \hbar \quad \Delta x \Delta p \approx \hbar$$

p_F Fermiho hybnost - průměrná

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{redukováni Planckova konst.}$$

energie elektronu - Fermiho energie

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e d^2}$$

$$d \downarrow \quad E_F \uparrow$$

$$E_F \gg kT$$

$$E_F \sim \rho$$

degenerovaný elektronový
plyn

elektrony
Savit ~ měs ... neutrony

$$P = f[(1+X)\rho]$$

$$K_1 \rho^{5/3} \rightarrow K_2 \rho^{4/3}$$

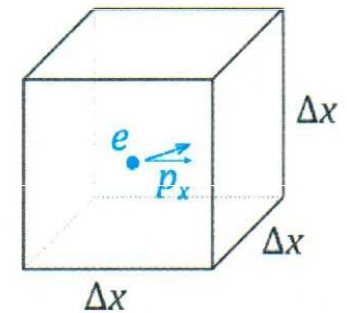
tlak degenerovaného elektronového
plynu

Tlak v nitru hvězd při elektronové degeneraci

Proč i chladný^{3b} elektronový plyn má tlak? A proč je jeho tlak, jak uvidíme, dokonce hodně velký? Je to proto, že elektrony se řídí kvantovou mechanikou. Přesně se tlak elektronového plynu počítá ve statistické fyzice; zde naznačíme jednoduché přibližné odvození, víceméně na středoškolské úrovni.

Jestliže je v látce N elektronů v objemu V , připadá na každý elektron objem V/N . Elektrony jsou fermiony a podle Pauliho vylučovacího principu tedy nemohou být dva ve stejném stavu. Můžeme si představit, že každý elektron v látce je v malé krychličce o straně $\Delta x = \sqrt[3]{(V/N)}$.

Elektron zavřený v malé krychličce ovšem nemůže být v klidu. Podle Heisenbergova principu neurčitosti, když je jeho poloha určena s přesností Δx , musí mít jeho hybnost (v x -ovém směru) neurčitost Δp_x , přičemž $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$. Střední velikost složky hybnosti v x -ovém směru, $|p_x|$, je přitom dána právě neurčitostí Δp_x .⁵⁷ Dostáváme tedy



$$|p_x| \approx \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (29)$$

Střední velikost x -ové složky rychlosti je

$$|v_x| = |p_x|/m_e, \quad (30)$$

Tlak v nitru hvězd při elektronové degeneraci

kde m_e je hmotnost elektronu. Můžeme si představit, že elektron se v krychličce odráží od pravé a levé stěny⁵⁸; doba mezi následujícími odrazy od pravé stěny je $\Delta t = 2\Delta x/|v_x|$. Počet nárazů na danou stěnu za sekundu je tedy $1/\Delta t = |v_x|/(2\Delta x)$. Při jednom nárazu předá elektron stěně hybnost $2|p_x|$, za 1 sekundu tedy $2|p_x| \cdot 1/\Delta t = |p_x||v_x|/\Delta x$. Tomu je, podle první věty impulzové, rovna síla působící na stěnu krychličky. Tlak p získáme vydělením plochou stěny krychličky, tedy $(\Delta x)^2$.

⁵⁴ Uvědomte si, že uvedená dolní hranice hustot odpovídá tisíckrát větší hustotě, než má voda. I nejhustší známý prvek, osmium, má hustotu $22,59 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Aby se výrazně projevil tlak elektronového Fermiho plynu, musí být látka opravdu hodně stlačena.

⁵⁵ To není žádné pejorativní označení, jde o čistě technický termín. ☺

⁵⁶ Při podmínkách, které panují v bílých trpaslících, je Fermiho teplota řádu miliard Kelvinů – takže i elektronový plyn o teplotě stovek miliónů stupňů můžeme z hlediska degenerace vlastně brát za „chladný“.

⁵⁷ Platí $(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2$. Přitom střední hodnota p_x je $\langle p_x \rangle = 0$, protože elektron se pohybuje střídavě doleva a doprava. Velikost složky hybnosti v x-ovém směru, $|p_x|$, bereme jako odmocninu se střední kvadratické složky hybnosti, $|p_x| = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$.

⁵⁸ Ve skutečnosti myšlená krychlička v látce samozřejmě nemá stěny, jde o názorný model pro odvození tlaku. V tomto modelu by se samozřejmě elektron odrážel i od ostatních stěn, pro naši úvahu si stačí všimnout jen pohybu ve směru jedné osy.

Tlak v nitru hvězd při elektropnové degeneraci

Dostaneme

$$p = |p_x| |v_x| / (\Delta x)^3 . \quad (31)$$

Po dosazení (29) a (30) a vztahu pro Δx odtud plyne

$$p = \frac{\hbar^2}{4m_e} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}} . \quad (32)$$

N/V je hustota počtu elektronů. Tu můžeme vypočítat z hustoty hmotnosti ρ látky hvězdy. Hmotnost je dána převážně nukleony. Počet nukleonů připadajících na jeden elektron označíme μ_e . (V látce hvězdy je přibližně dvakrát víc nukleonů, než elektronů, takže $\mu_e \doteq 2$.) Na N elektronů tedy připadá $\mu_e N$ nukleonů; jejich hmotnost je $\mu_e N m_n$ (kde m_n je hmotnost nukleonu⁵⁹). Hustota látky je tedy $\rho = \mu_e N m_n / V$, odtud $N/V = \rho / (\mu_e m_n)$. Po dosazení do (32) vychází, že tlak závisí na hustotě jako

$$p = k \rho^{\frac{5}{3}} , \quad (33)$$

kde $k = \hbar^2 / (4\mu_e^{5/3} m_e m_n^{5/3})$. Přesný výpočet pomocí statistické fyziky dává poněkud jinou hodnotu konstanty k ,⁶⁰ ovšem závislost tlaku na hustotě látky vychází se stejnou mocninou: tlak je úměrný $\rho^{5/3}$.

Tento výsledek ovšem platí jen v případě, že se elektrony pohybují **rychlostmi malými v porovnání s rychlostí světla**. (Vztah (30) je vztah newtonovské fyziky!)

Tlak v nitru hvězd při elektronové degeneraci

Z (29) je ovšem vidět, že při zvyšování hustoty roste hybnost elektronů. Rychlost elektronů ale nemůže přesáhnout rychlost světla, maximálně se jí může přibližovat. Při vysokých hustotách již tedy v_x ve vztahu (31) prakticky neroste – a můžeme si rozmyslet, že ve vztahu pro tlak tím přijdeme o faktor $\rho^{1/3}$. V *ultrarelativistickém* případě (kdy se elektrony pohybují téměř rychlostí světla) tedy tlak s rostoucí hustotou stoupá pomaleji, jen jako

$$p = \tilde{k} \rho^{\frac{4}{3}}. \quad ^{61} \quad (34)$$

Výpočet ze statistické fyziky ukáže, že relativistické efekty jsou podstatné při hustotách větších než asi $2 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^3$.

Bílé trpaslíci jsou hvězdy o hmotnostech zhruba hmotnosti Slunce a rozměrech srovnatelných s rozměry Země – tedy zhruba stokrát menších, než rozměr Slunce. Jejich hustota je tedy řádově milionkrát vyšší, než hustota Slunce, čili řádu 10^9 kg/m^3 . Tlak dostatečný k zamezení dalšího zmenšování v nich má právě elektronový Fermiho plyn. Po „vyhoření“ termojaderného paliva se jednou bílým trpaslíkem stane i naše Slunce.

Tlak v nitru hvězd při elektronové degeneraci

Pro tlak degenerovaného elektronového plynu platí obecný vztah

$$P = f[(1+X)\rho], \quad (5.1.1)$$

kde funkce f se mění od $K_1 \rho^{\frac{5}{3}}$ při nízkých hodnotách ρ do $K_2 \rho^{\frac{4}{3}}$ při vysokých hodnotách ρ .

V nerelativistickém případě, jak bude dále odvozeno, platí vztah

$$P = K_1 \rho^{\frac{5}{3}}, \quad (5.1.2)$$

kde K_1 je konstanta.

Pro relativistický případ platí vztah

$$P = K_2 \rho^{\frac{4}{3}}, \quad (5.1.3)$$

kde K_2 je konstanta.

Připomínáme, že tlak degenerovaného plynu nezávisí na teplotě a na rozdíl od stavové rovnice pro ideální plyn je závislost mezi tlakem a hustotou výraznější. To je přirozené, neboť tlak je úměrný koncentraci částic a jejich rychlosti, koncentrace částic je úměrná hustotě a rychlost částic degenerovaného plynu roste současně s hustotou, neboť v důsledku platnosti Pauliho principu roste počet částic pohybujících se velkými rychlostmi.

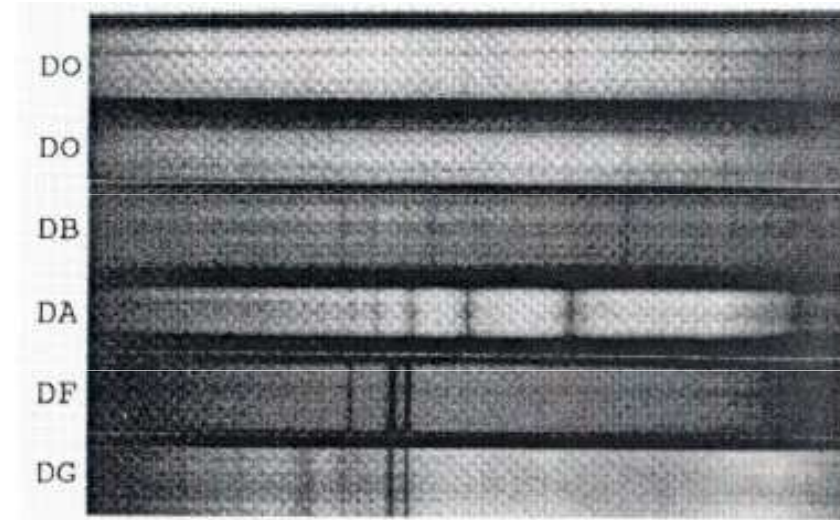
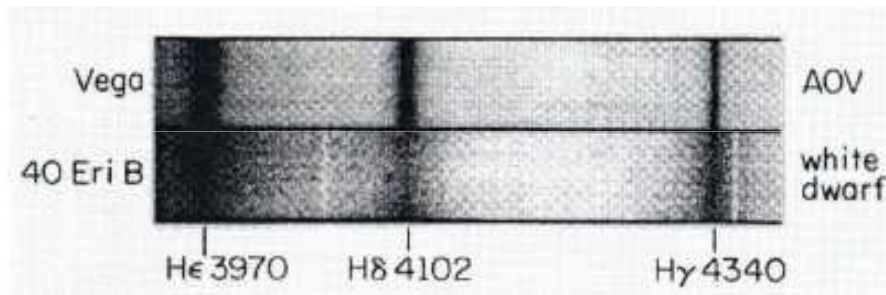
Kritériem použitelnosti rovnice (5.1.2) pro degenerovaný plyn je její srovnání se stavovou rovnicí (3.1.1.1) pro nedegenerovaný ideální plyn. Podmínku degenerace plynu lze vyjádřit nerovností

$$K_1 \rho^{\frac{5}{3}} > \frac{A \rho T}{\mu}, \quad (5.1.4)$$

podmínka degenerace:

$$K_1 \rho^{\frac{5}{3}} > \frac{A \rho T}{\mu}$$
$$\rho > \left(\frac{A T}{\mu K_1} \right)^{\frac{3}{2}}$$

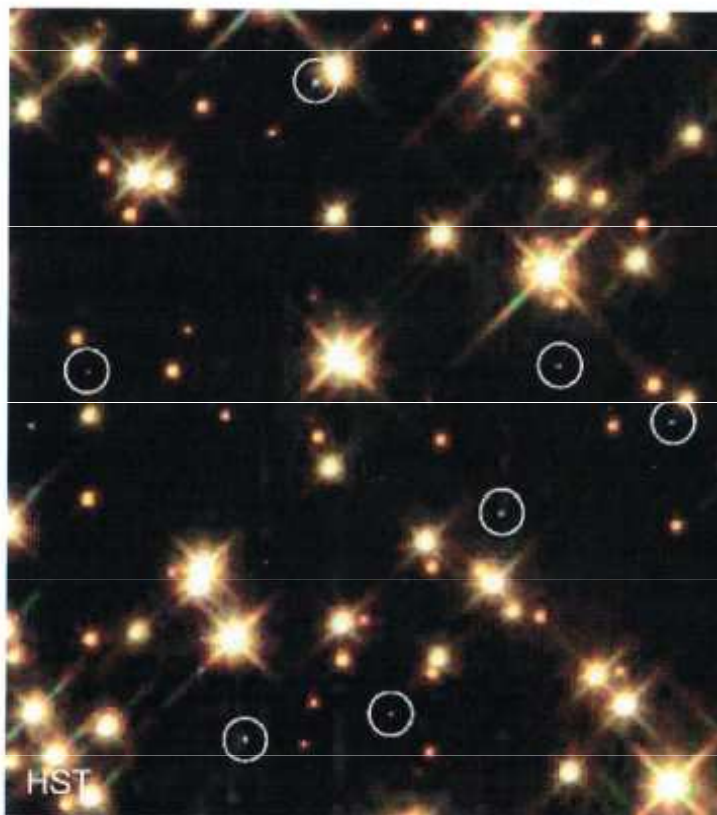
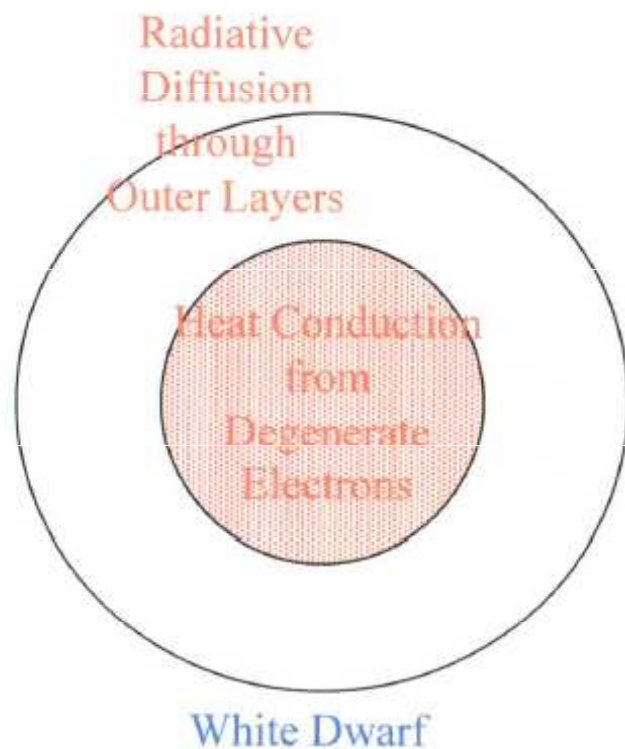
Bílí trpaslíci – spektrum



- White Dwarfs – DO, DB, DA, DF, DG, DM, DC
- Classifications NOT analogous to MS – reflect compositions, not temperature
 - DA – hydrogen lines (no other lines, pure H atmosphere)
 - DB – neutral He lines (no hydrogen at all, pure He)
 - DO – ionized He lines (no hydrogen at all, hotter DBs)
 - DC – continuous spectrum, no lines
 - DF, DG, DM ...

Bílí trpaslíci

Cooling white dwarfs
as seen by the
Hubble Space Telescope



This image was copied from H. Richer (UBC) and NASA.
Go to <http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap971102.html>
for the updated and corrected version.

Isothermal
Interior Temperature

$$L \approx \left[\frac{T_I}{7 \times 10^7 \text{ K}} \right]^{7/2} \left[\frac{M}{M_{\text{Sun}}} \right] L_{\text{Sun}}$$

$$E \approx \frac{3}{2} M k T_I = \frac{3}{2} \left[\frac{M}{12 m_H} \right] k T_I$$

$$E \approx 8 \times 10^{40} \text{ J}$$

Mass = 0.4 Solar Masses
 $T = 10^8 \text{ K}$

Time from L_{sun} to $10^{-4} L_{\text{sun}}$
is 1×10^9 years

Bílí trpaslíci

$$\frac{dP}{dr} = -6 \frac{M_r \rho_r}{r^2}$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho_r$$

$$P = 10^{12} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{5/3}$$

$\frac{1}{\rho_0}$... průměrné číslo
volných elektronů
na

$$\rho_0 = \frac{2}{1+X}$$

Model bílých trpaslíků

Začneme tím, že si zvolíme tlak, jaký bude v centru.⁶³ Z tlaku spočteme hustotu (vyjádříme ji ze vztahu (33) nebo (34) podle toho, jestli bereme klasický nebo ultrarelativistický případ) a z hustoty spočteme hmotnost vrstvy obepínající střed. (Těsně u středu to bude koule o poloměru Δr .) Z rovnice hydrostatické rovnováhy (27) určíme gradient tlaku a z něj pokles tlaku Δp . Tím jsme získali tlak pro $r = \Delta r$.

A dále už se vše opakuje: známe tlak $p(r)$ v místě vzdáleném r od centra. Z něj spočteme hustotu ρ a z ní hmotnost vrstvy o tloušťce Δr , ta bude $\Delta M = 4\pi r^2 \Delta r \rho$. Přičteme ji k hmotnosti M od centra do poloměru r .⁶⁴ A už máme vše pro pravou stranu rovnice hydrostatické rovnováhy (27), ta nám dá gradient tlaku $\frac{dp}{dr}$; pokles tlaku tedy bude $\Delta p \doteq \frac{dp}{dr} \Delta r = -G \frac{M \rho}{r^2} \Delta r$. A tlak ve vzdálenosti $r + \Delta r$ dostaneme jako $p(r + \Delta r) = p(r) + \Delta p$. Známe tedy tlak v místě o něco dál od centra hvězdy ... a vše opakujeme. Kdy skončíme? Až tlak poklesne k nule, to už jsme na povrchu hvězdy.

Bílí trpaslíci

3 rovnice pro 3 proměnné ρ_r, P, M_r

thermické podmínky:

$$\text{pro } \lambda = 0$$

$$M_r = 0, \quad \rho = \rho_c$$

$$\lambda = R$$

$$M_r = M, \quad \rho = 0$$

integrace od středu hvězdy k povrchu

sférická tloušťka hvězdy Δr

n -lá hvězda má poloměr $r_n = n (\Delta r)$

hustota ρ_n , hustota ρ_n a hustota M_n

Bílí trpaslíci

$$r_{n+1} = r_n + \Delta r$$

$$P_{n+1} = P_n + \left(\frac{dP}{dr} \right)_n (\Delta r)$$

$$\rho_{n+1} = \rho(P_{n+1})$$

$$M_{n+1} = M_n + 4\pi r_{n+1}^2 \rho_n \Delta r$$

(□)

predpoklad p_c , rovnice (*) $\rightarrow P_c$

7 rovnice (□) hodnoty r_1, P_1, ρ_1, M_1

integrace přesáníje k prvním, kde $P=0$

Bílí trpaslíci

hydrostatická rovnice

$$n m_p G \frac{M}{R^2} = \frac{P}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{R} \sim \left(\frac{M}{R^3} \right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow R \sim M^{-1/3}$$

$$v \sim c, \quad P \sim n^{4/3}$$

degenerovaná elektronová

$$n m_p G \frac{M}{R^2} = \frac{P}{R}$$

$n \dots$ hustota elektronů

$$P \sim n^{5/3}$$

nerelativistická degenerace

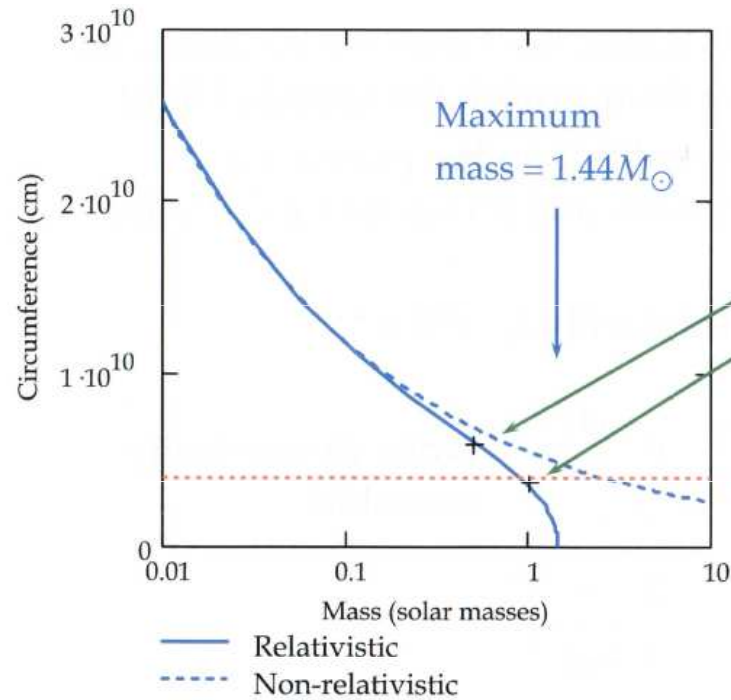
relativistická degenerace

$$\Rightarrow M_{\text{crit}} = \left(\frac{h c}{G m_p^2} \right)^{3/2} m_p$$

charakteristická

$$M_{\text{crit}} = 1,4(1+x) M_{\odot}$$

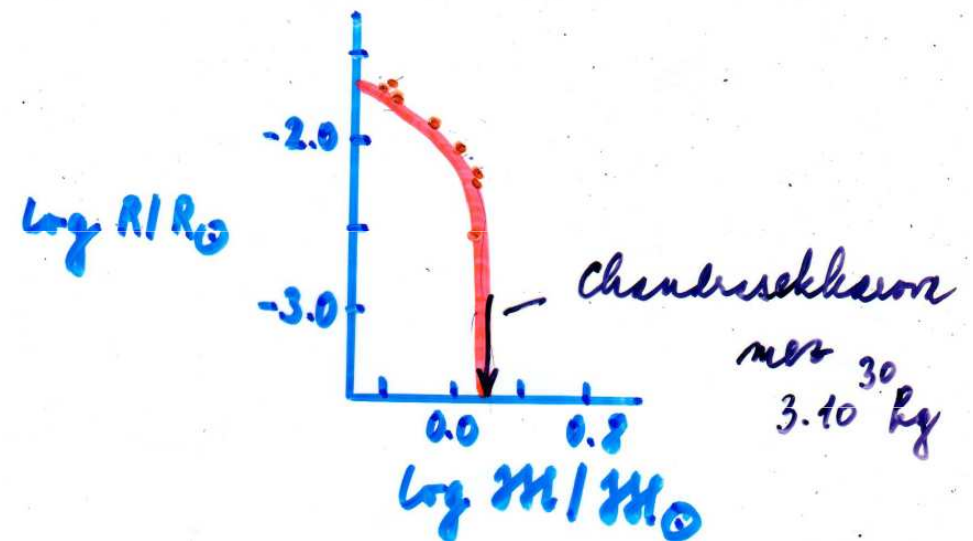
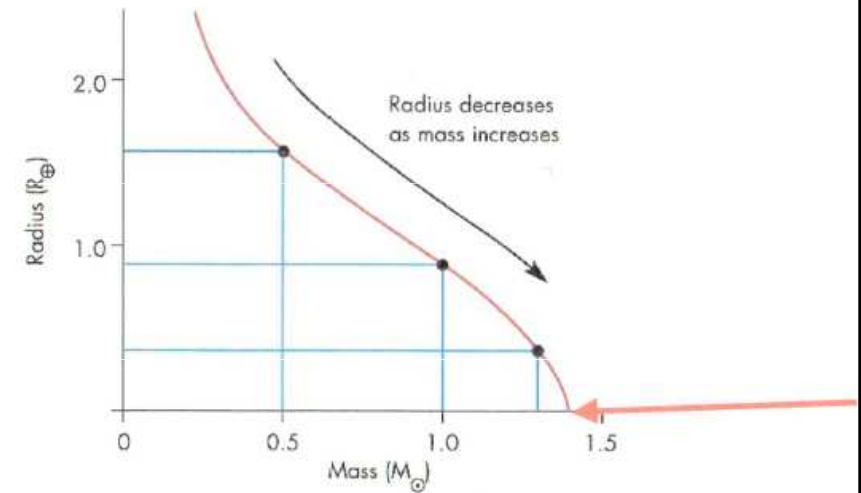
Bílí trpaslíci - Chandrasekharova limita



Exact calculation.

White dwarfs in
visual binaries:
40 Eridani B
Sirius B

Earth's
circumference



Bílí trpaslíci

slabě bílého trpaslíka:

vnitřní část ... degenerovaný elektronový plyn

$$\rho \sim 10^9 \text{ kg m}^{-3}$$

$$g_{\text{int}} \sim 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

opuštěná vnější vrstva, vrstva ležící pod vnější
degenerovaným elektronovým plynem, ležící je tedy kromě
kmitů.

vnitřní motor ... několik % protonů, je složen

z degenerovaného ideálního plynu s vysokou
teplotou, vysoký teplotní gradient

$$3 \cdot 10^7 \text{ K na } 10^9 \text{ K na povrchu hvězdy}$$

motor ale poskytl konverzní reakce

Bílí trpaslíci - stavba

Stavba bílých trpaslíků se liší od stavby klasických hvězd hlavní posloupnosti. Vnitřní část bílých trpaslíků je složena z degenerovaného elektronového plynu, jehož hustota v centrálních oblastech dosahuje až 10^9 kg m^{-3} , ve vnějších oblastech hvězdy zhruba 10^3 kg m^{-3} . Hvězdná látka je průhledná pro procházející záření, neboť v degenerovaném plynu je převážná většina energetických hladin obsazena. Při absorpci záření tudíž nemůže docházet k přechodu elektronů mezi energetickými hladinami, což je základní zdroj opacity u hvězd hlavní posloupnosti. Pouze malý počet elektronů s velkou energií může ještě přecházet mezi hladinami, proto opacita hvězdné látky bílých trpaslíků dosahuje nízkých hodnot. Hvězdná látka se dále vyznačuje velmi dobrou tepelnou vodivostí. Vzhledem k nízké opacitě a velmi dobré tepelné vodivosti degenerovaného elektronového plynu je teplota v nitru bílého trpaslíka téměř konstantní, neboť se rychle vyrovnává.

Povrchová vrstva tvořící několik procent poloměru, je složena z nede degenerovaného ideálního plynu s vysokou opacitou. Tato vrstva zadržuje tok tepelné energie z nitra a je v ní velmi výrazný teplotní gradient, teplota klesá z 10^7 K na 10^4 K na povrchu hvězdy.

Bílí trpaslíci - stavba

V povrchové vrstvě se zachoval vodík, přibližně do 0,05 %, mohou zde probíhat termonukleární reakce. Malá tloušťka této vrstvy objasňuje, proč v bílých trpaslících se uvolňuje tak málo energie, přestože teplota je stejná jako u klasických hvězd hlavní posloupnosti. Povrchová vrstva vyzařuje energii na úkor ochlazování, neboť vnitřní energie z nitra hvězdy pomalu prostupuje přes málo průhlednou vrstvu.

Celkové množství vnitřní energie v bílém trpaslíku lze přibližně určit pomocí následující úvahy. V 1 gramu jednoatomového plynu je množství vnitřní energie, které je rovno $\frac{3}{2} \frac{A T}{\mu}$, kde μ je střední molekulová hmotnost plynu, skládajícího se ze zbytků atomů - iontů, jež zůstaly po ionizaci elektronů. Vztah pro celkovou vnitřní energii ve hvězdě má tvar

$$W = \frac{3}{2} \frac{A T}{\mu} M. \quad (5.1.26)$$

Přibližné jednoduché vyjádření vztahu pro teplotu v nitru bílého trpaslíka lze odvodit za předpokladu zářivé rovnováhy ve vnějších nede degenerovaných vrstvách bílého trpaslíka, kde opacita je dána Kramervým zákonem (3.1,3.2), ve kterém platí závislost $\kappa \sim T^{-\frac{3}{2}}$. Podle Kaplana [3] vztah pro teplotu v nitru bílého trpaslíka stanovenou pomocí svítivosti a hmotnosti má tvar

$$T = 5 \cdot 10^7 \left(\frac{L}{L_{\odot}} \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{\frac{2}{7}}. \quad (5.1.27)$$

Bílí trpaslíci

centrální tlak

$$\frac{dP_r}{dr} = - G \rho \frac{M_r}{r^2} = - G \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} \rho = - \frac{4}{3}\pi G \rho^2 r$$

při $P=0$ na povrchu obdržíme tlak jako funkci r

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 (R^2 - r^2)$$

další volbou $r=0 \Rightarrow$

$$P_c \approx \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2 \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ Pa}$$

Vývoj bílých trpaslíků - ochlazování

vnější obálka - atmosféra, ideální plyn

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M \rho(r)}{r^2} ; \quad \frac{dT}{dr} = - \frac{3 \rho(r) \kappa(r)}{4 a c T^3} \frac{L}{4 \pi r^2}$$

$m(r) \rightarrow M$, kruhová. obna rovnice

$$\frac{dP}{dT} = \left[\frac{16 \pi a c G}{3} \frac{M}{L} \right] \frac{T^3}{\kappa}$$

$\kappa \sim \rho, T, c_H c$, vlnová - index absorpce, $V = 0.9$,
 $z = 0.1$

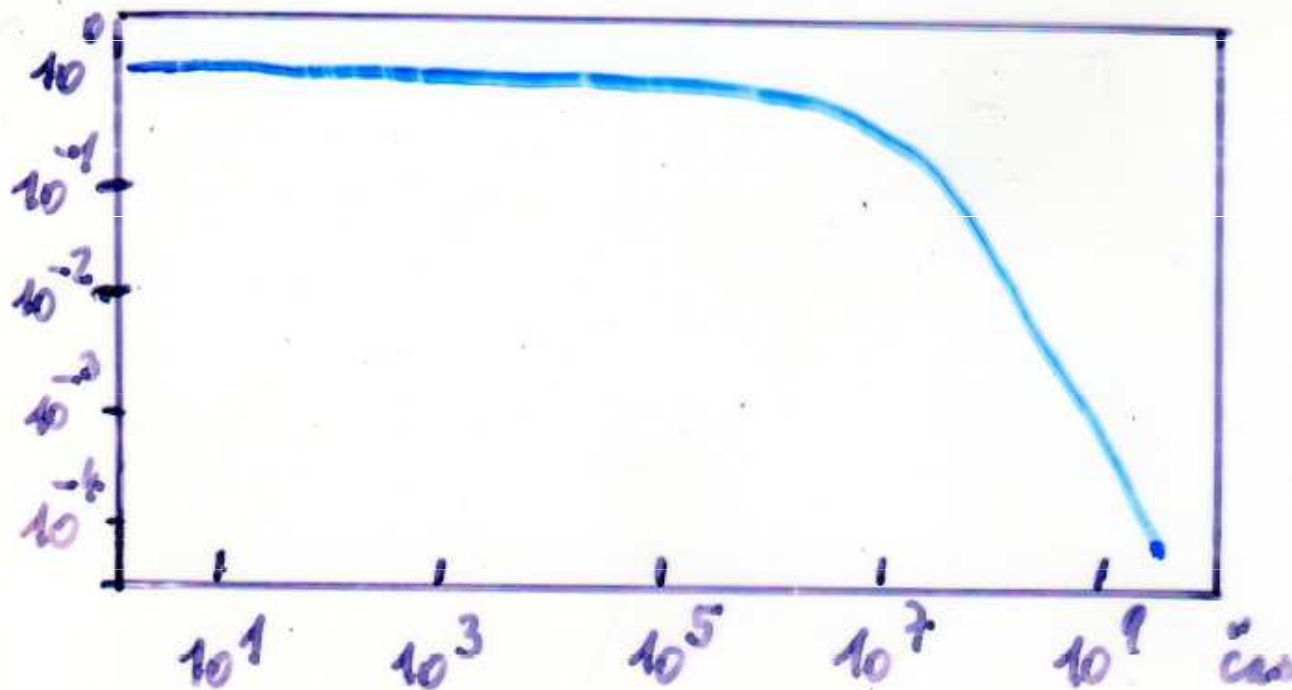
$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-7/2} = 4,34 \times 10^{19} \rho T^{-7/2} [\text{m}^2 \text{kg}^{-1}]$$

Vývoj bílých trpaslíků - ochlazování

ochlazování

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2}{3k} \left[\frac{12 \text{ MH}}{M_s} \right] L_s \left[\frac{T}{5 \times 10^7} \right]^{7/2}$$

L/L_s

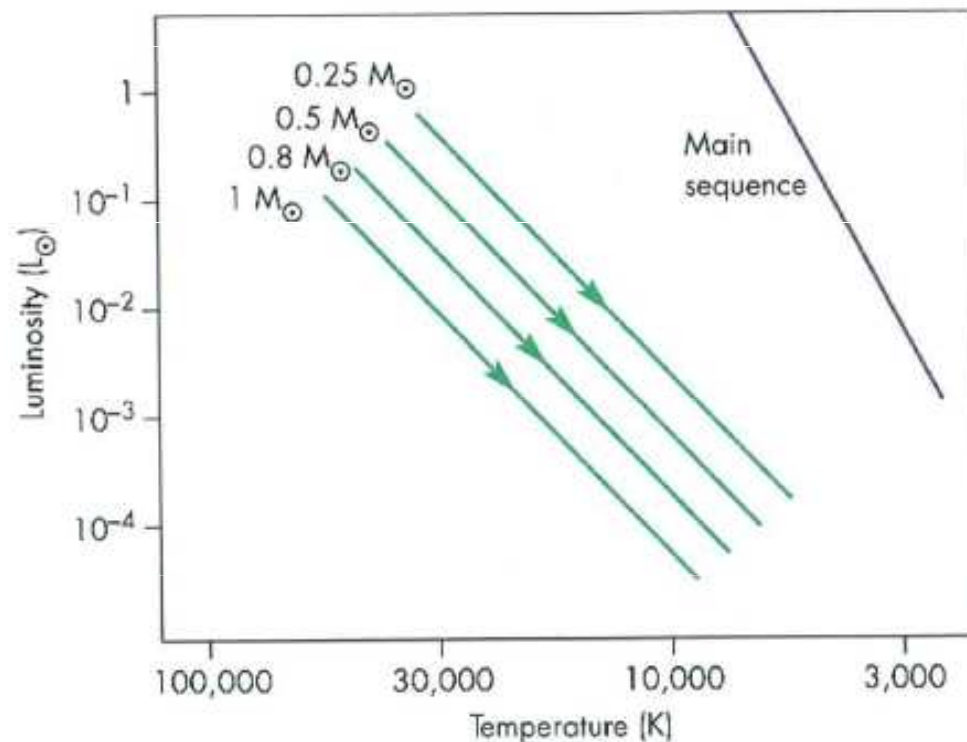


$0,4 M_s$
 $T_i \sim 10^8 \text{ K}$
 $c \sim \text{b.t.}$

Vývoj bílých trpaslíků - ochlazování

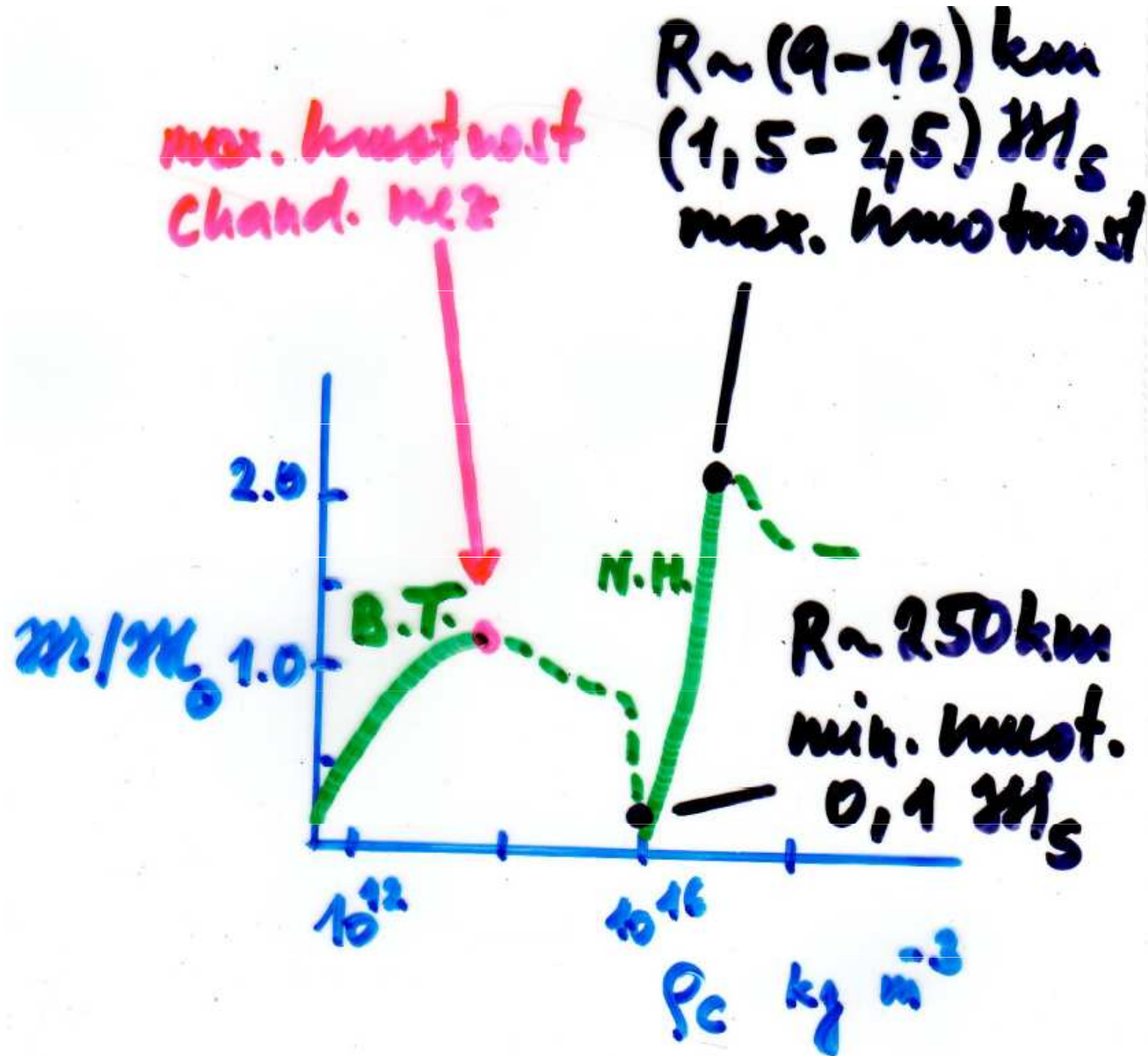
Cooling of White Dwarfs

- no nuclear fuel source
- large supply of internal heat
- just cools at constant radius



- 0.6 solar mass star declines
 - to 0.1 solar L in 20×10^6 y
 - to 0.01 solar L in 300×10^6 y
 - to 0.001 solar L in 10^9 y
- old white dwarfs are difficult to detect

Závislost mezi hmotností a hustotou, degenerované hvězdy



Neutronové hvězdy



neutronizace

$$\rho \sim 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$$

Neutronové hvězdy

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho_r}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{P}{c^2 \rho_r}\right) \left(1 + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2 M_r}\right)}{\left(1 - \frac{2G M_r}{c^2 r}\right)}$$

22 MHz

⇒

rotiční periody:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\omega_f = \omega_i \left(\frac{R_i}{R_f} \right)^2$$

magnetické pole:

$$B_i 4\pi R_i^2 = B_f 4\pi R_f^2$$

$$\int B dS = \text{const.}$$

$$B_{nh} \approx 10^{10} \text{ T}$$

Neutronové hvězdy

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M(r) \rho(r)}{r^2}$$

Tolmanova-Oppenheimerova-Volkovova rovnice,

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{\left(M(r) + 4\pi r^3 p/c^2\right) \left(\rho + p/c^2\right)}{r \left(r - 2GM(r)/c^2\right)}$$

relativistická rovnice hydrostatické rovnováhy

Vznik neutronových hvězd

Hustota látky v bílých trpaslících je v rozmezí asi 10^7 až 10^{10} kg/m³. Může nějaký mechanismus zabránit gravitačnímu zhroucení hvězdy při ještě vyšších hustotách?

Elektronový Fermiho plyn na to nestačí – výše jsme viděli, že neudrží v rovnováze hvězdu s hmotností vyšší, než Chandrasekharova mez. Navíc při vysokých hustotách začne být energeticky výhodné, aby proběhl tzv. inverzní beta-rozpad, tj. aby elektron reagoval s protonem; při této reakci vznikne neutron a neutrino.⁷⁶ Názorně si můžeme představit, že elektrony jsou „vtlačovány“ do jader a reakcí s protony utvářejí neutrony. Elektronů tedy v látce ubývá, a to přirozeně tlak elektronového plynu snižuje.⁷⁷



Při vysokých hustotách už je látka tvořena převážně neutrony, s malou příměsí protonů a elektronů. Neutrony přitom z atomových jader „odkapávají“ a pohybují se v látce jako částice plynu. Ovšem jde také o fermiony – a **neutronový Fermiho plyn** tedy určitě má tlak, podobně jako tomu bylo u elektronového Fermiho plynu. Pro nerelativistický neutronový plyn závisí tlak na hustotě analogicky, jako tomu bylo ve vztahu (33):

$$p = \tilde{k} \rho^{\frac{5}{3}}, \quad (35)$$

kde $\tilde{k} \doteq 5,4 \times 10^3 \text{ Pa} / (\text{kg m}^{-3})^{5/3}$.⁷⁸ A právě tlak neutronového Fermiho plynu (resp. jeho gradient) je tím, co může zabránit dalšímu hroucení hvězdy při velmi vysokých hustotách řádu 10^{17} kg/m³ a vyšších.

Není na to sám. Hustota asi $2,7 \cdot 10^{17}$ kg/m³ je hustotou atomových jader.⁷⁹ Při vyšších hustotách je **silná jaderná interakce nukleonů** odpudivá a přispívá významně ke zvyšování tlaku.

Neutronové hvězdy

Pro **maximální možnou hmotnost** neutronových hvězd se užívá název Tolmanova-Oppenheimerova-Volkovova mez (**TOV mez**). Uvádí se pro ni hodnota asi $2 M_{\odot}$ případně lehce vyšší, někdy až asi $2,3 M_{\odot}$.⁸⁷ I v tomto případě jsou hmotnosti blízké tomuto maximu pozorovány.⁸⁸

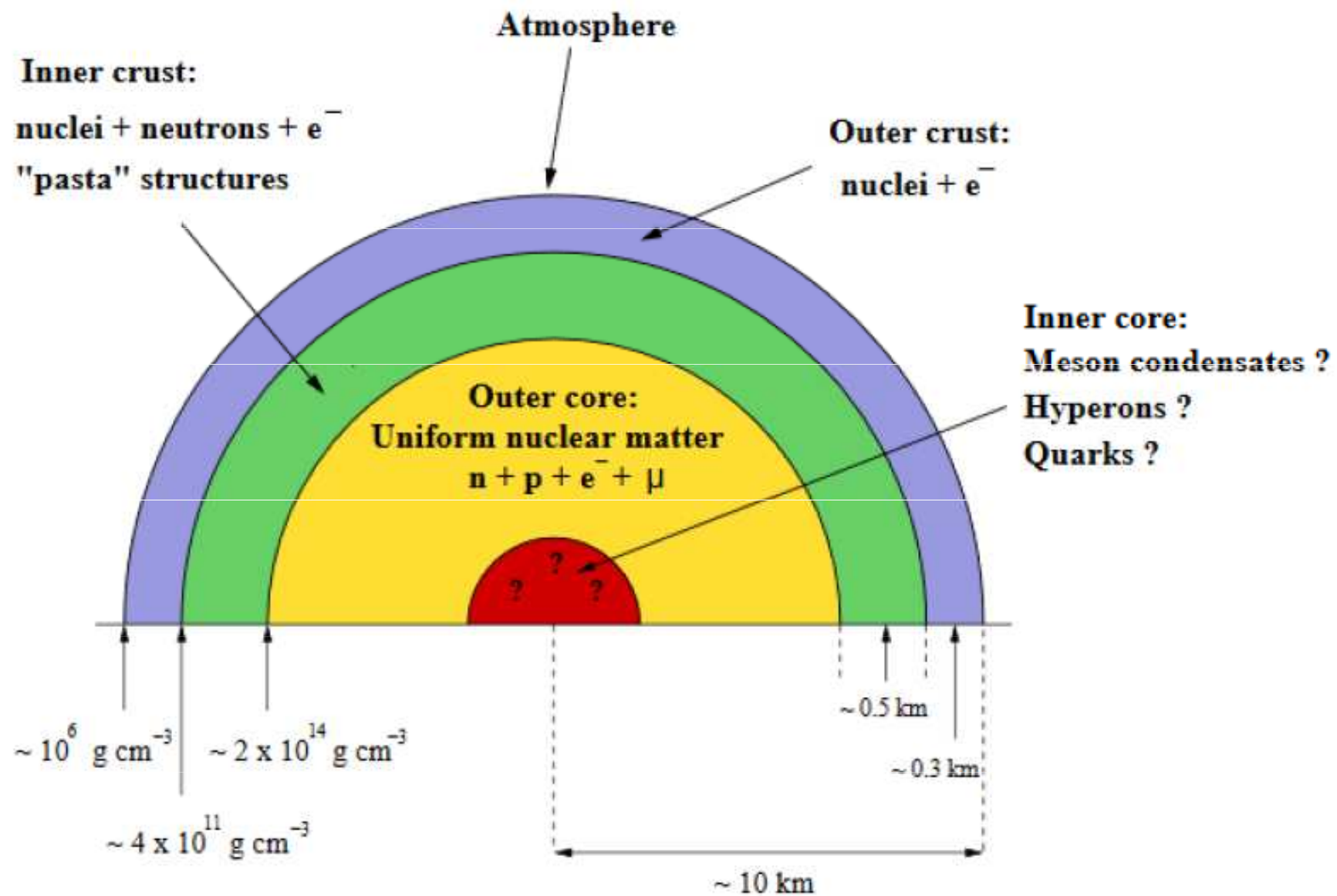
Většina neutronových hvězd se svou hmotností pohybuje mezi uvedenými extrémy, většinou v oblasti blízké $1,4 M_{\odot}$.

- Hmotnosti neutronových hvězd jsou v rozsahu 1 až asi $2,2 M_{\odot}$, „typická hmotnost“ je $1,4 M_{\odot}$.
- Poloměr neutronových hvězd je asi 10 až 15 km; „typický poloměr“ je asi 11 až 12 km.
- Hustota látky v neutronových hvězdách je extrémní, převyšuje i hustotu v atomových jádrech.⁸⁹
- Gravitační zrychlení na povrchu je řádově stomiliardkrát větší než na povrchu Země.⁹⁰
- Magnetické pole neutronových hvězd je extrémně silné, 10^7 až 10^9 T.⁹¹ Neutronové hvězdy s extrémně silným magnetickým polem zvané *magnetary* mají pole s indukcí až 10^{11} T.
- Krátce po svém vzniku je neutronová hvězda velmi horkým objektem, s teplotou stovek miliard stupňů. Rychle (v řádů dnů) ovšem zchladne na teplotu řádu miliard stupňů, pak už pomaleji (v řádu let) na teplotu řádově milión stupňů.

Vznik neutronových hvězd

Neutronové hvězdy vznikají z hvězd o hmotnosti asi 8 až 25 $M_{\odot}$. V závěrečné fázi jejich vývoje začne vlivem gravitace kolabovat jejich jádro o hmotnosti převyšující Chandrasekharovu mez. Je to proces velmi rychlý, fakticky volný pád. Až toto kolabující jádro dosáhne hustot řádu 10^{17} až 10^{18} kg/m^3 (tedy hustoty atomových jader nebo vyšší), je kolaps zastaven tlakem neutronového Fermiho plynu a odpudivými silami nukleon-nukleonové interakce. Ohromná energie získaná z tohoto „volného pádu“⁹² se přemění na vnitřní energii, látka se tedy extrémně zahřeje. Na úkor této energie mohou probíhat reakce elementárních částic produkující vysokoenergetická neutrina. Ta se šíří ven a předávají svou energii obálce (zbytku hvězdy kolem zkolabovaného jádra). Navíc se z jádra šíří rázová vlna. Energie předaná obálce je tak velká, že obálka se přestane smršťovat a začne expandovat – a to velkou rychlostí, až řádu 10^4 km/s . Obálka je horká a září – na několik týdnů může převýšit svítivost

Neutronové hvězdy – stavba

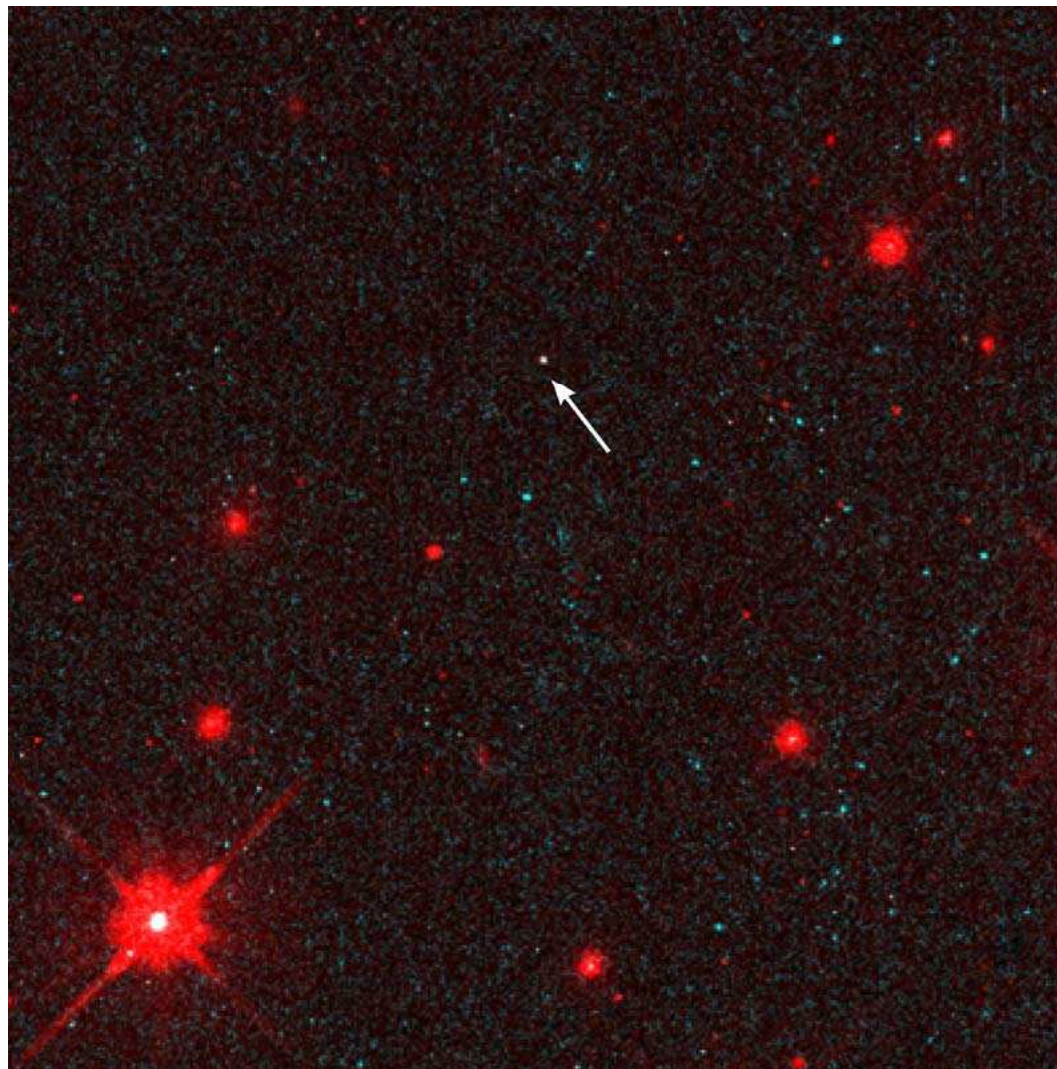


Neutronová hvězda

15 km

1,5 $M_{\odot}$

10^6 K



Neutronové hvězdy

při $\rho > 10^{12} \text{ kg.m}^{-3}$ nastává neutronová degenerace

neutronizace $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$



výrazné gravitační a magnetické pole neutronových hvězd



Neutronové hvězdy

srovnání neutronových hvězd a obrů básníkem

Jan Neruda

Písně kosmické

*Tot' prostě tím: ty maličké
z jaderného jsou fládru,
ale ty velké a poslušné
jen z plynových jsou hadrů.*



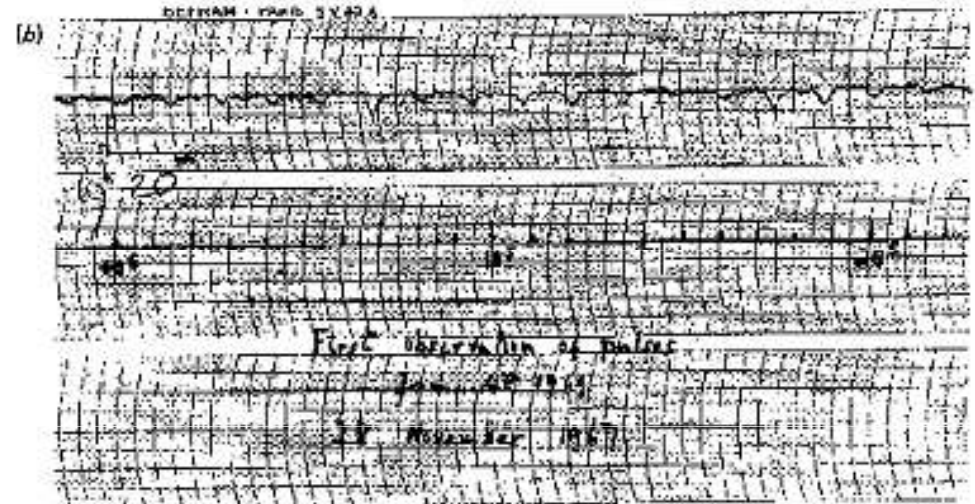
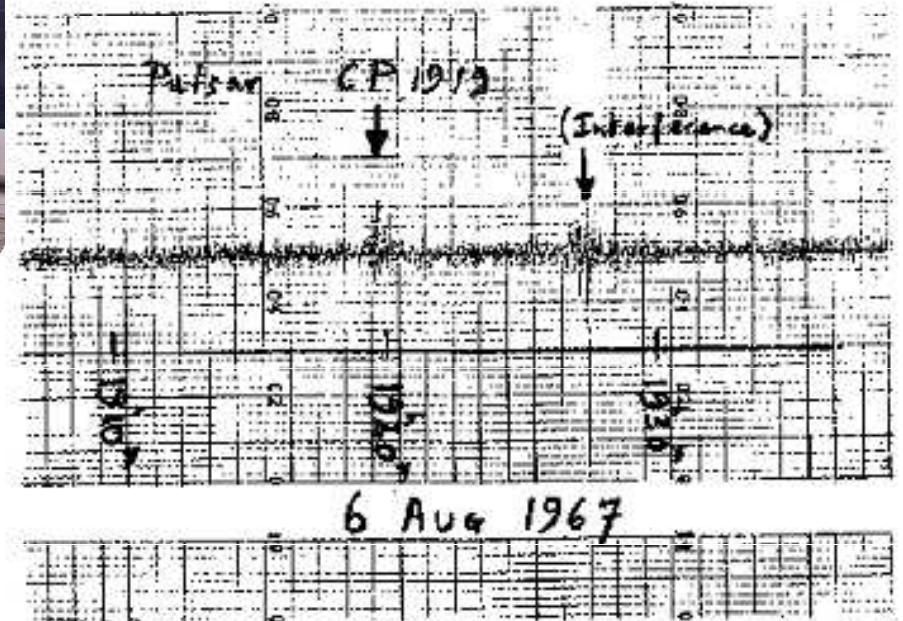
Objev pulsarů - neutronových hvězd



- Don't look in the optical
- 2 radio astronomers at Cambridge (Jocelyn Bell and Tony Hewish) recording intensity of radio waves from several stars

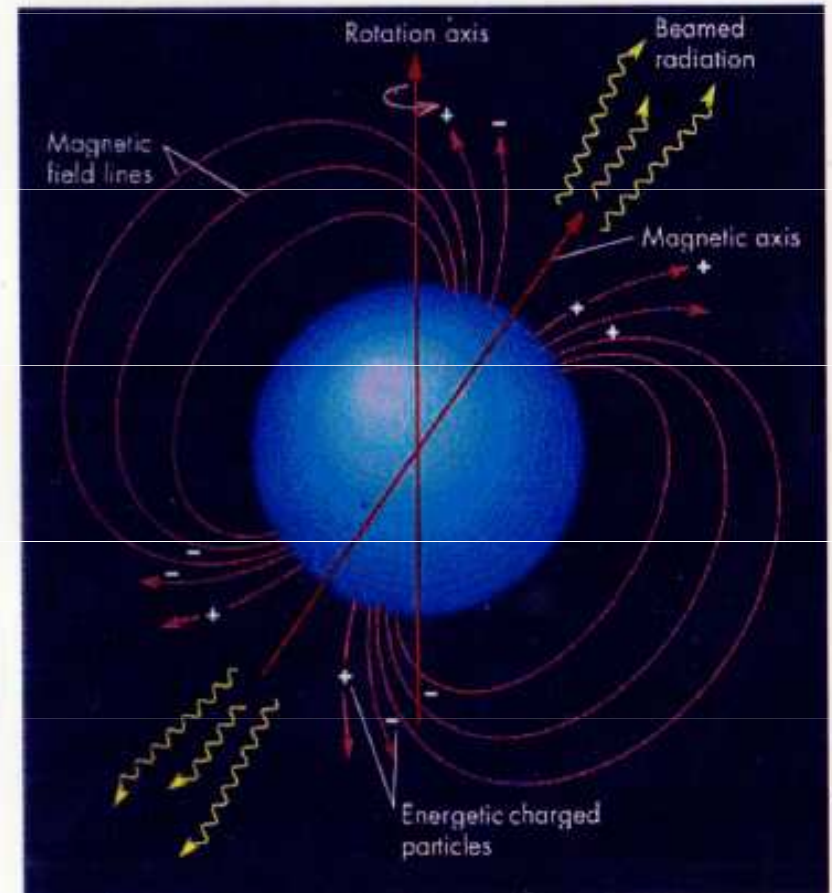
Nobelova cena za fyziku A. Hewish 1974

- CP 1919 (now known as PSR B1919+21) seen to have a period of 1.337 s.

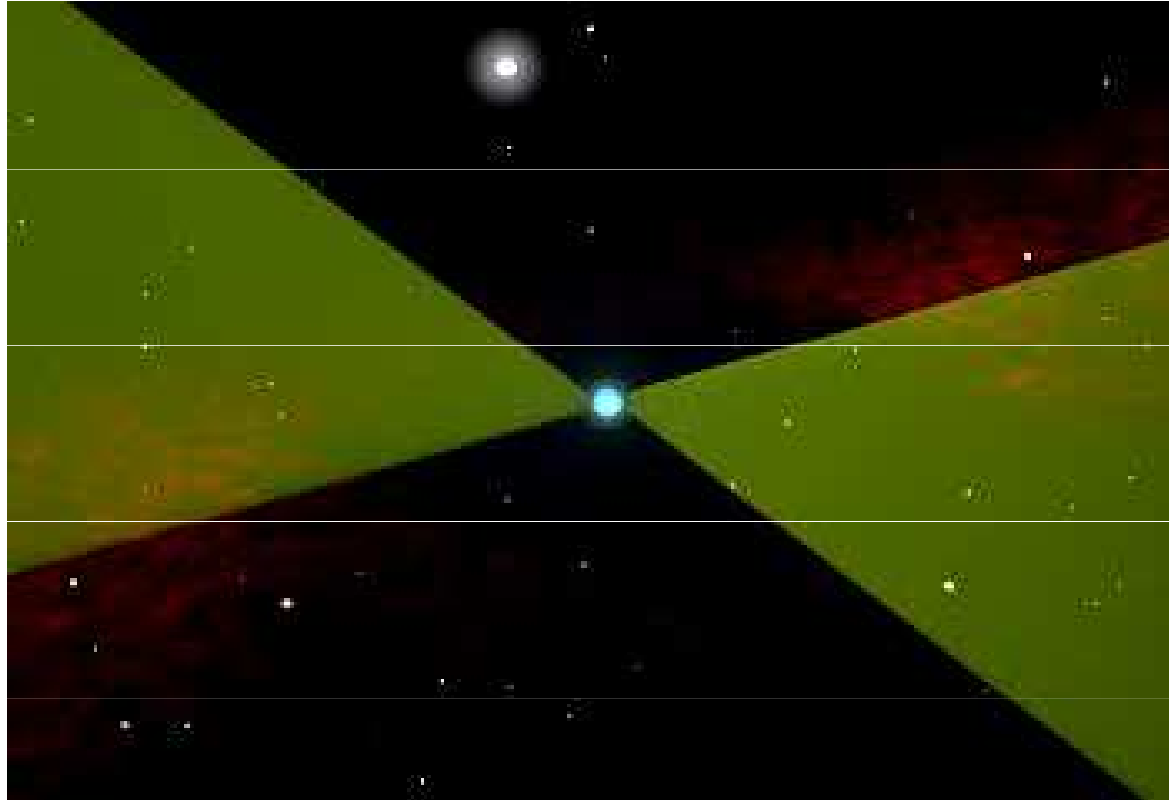


Neutronové hvězdy - pulsary

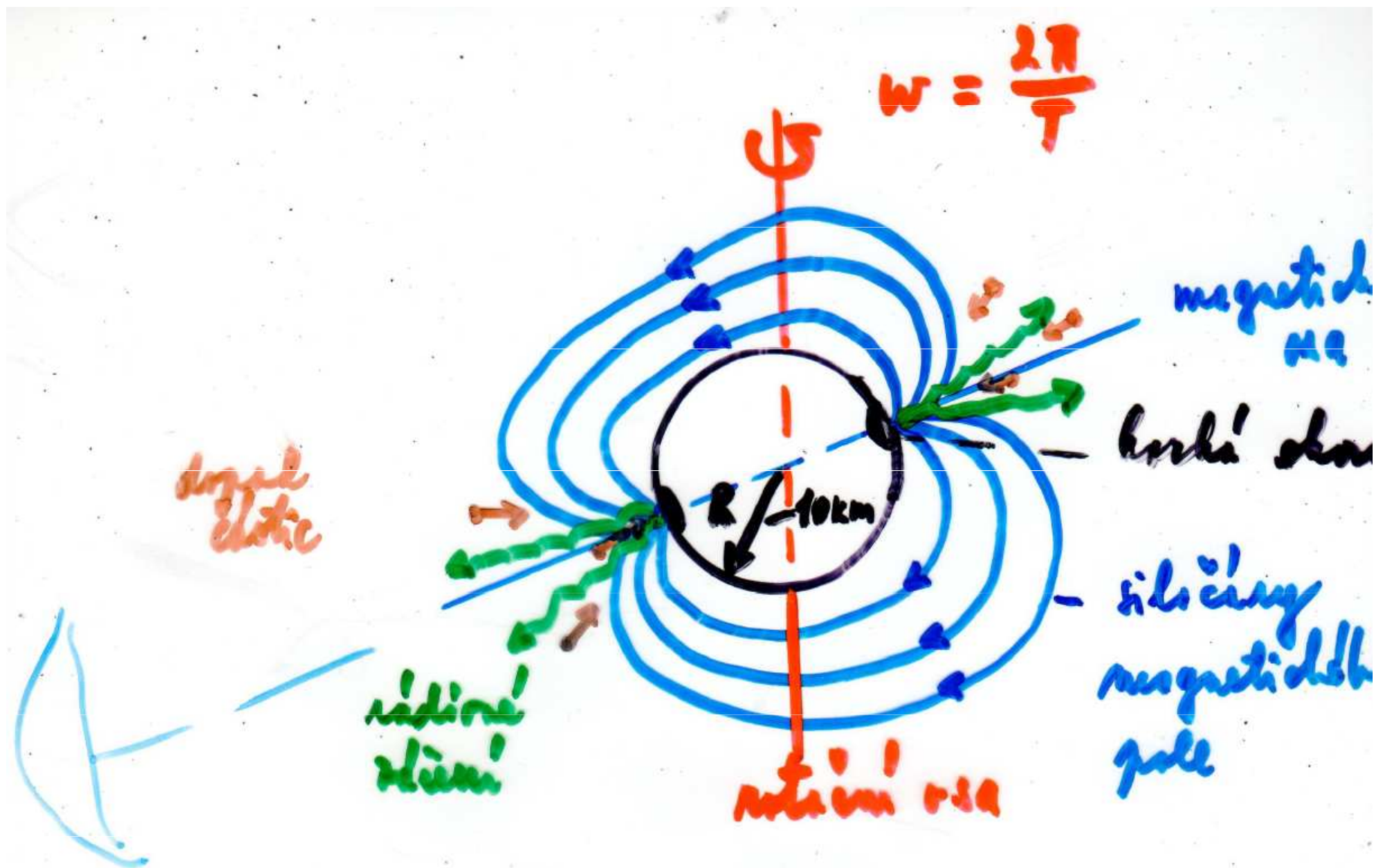
- 1968: T. Gold & F. Pacini
- Magnetic axis is tipped to rotation axis
- Charged particle can move along magnetic field lines only
 - escape along open field lines
 - trapped along closed field lines



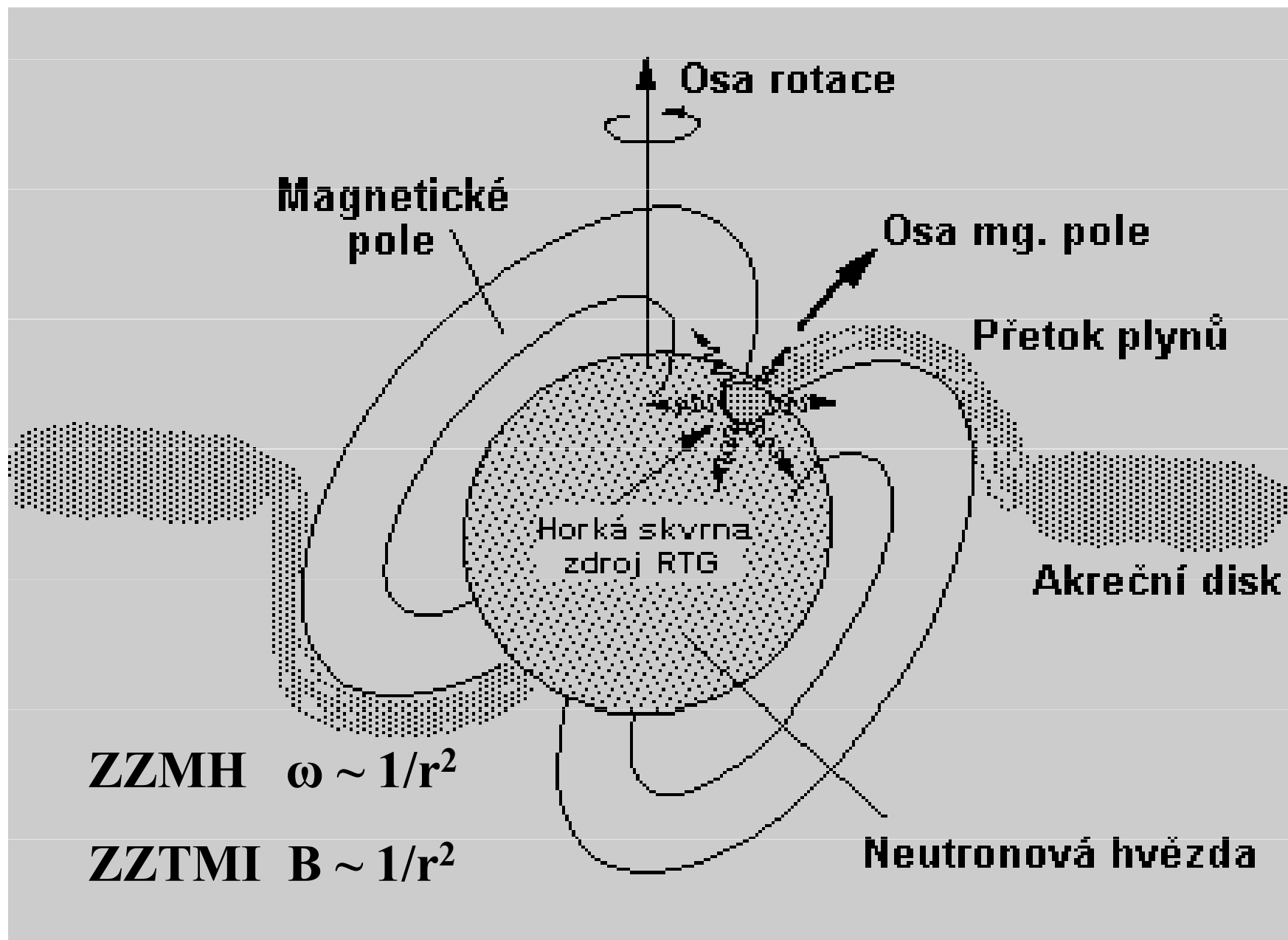
Neutronová hvězda - model



Neutronová hvězda model



Majákový model pulsaru



Pulsar 1913+16

Slavný je pulzar PSR 1913+16. Jde o první objevený *binární pulzar*, tedy dvojhvězdu tvořenou neutronovými hvězdami.¹⁰⁵ Poskytl totiž první, byť nepřímý důkaz existence gravitačních vln. Podle obecné teorie relativity totiž dva kolem sebe obíhající objekty musí vyzařovat gravitační vlny. Ty odnášejí energii; v důsledku toho se obě složky dvojhvězdy k sobě musí pomalu přibližovat. U daného binárního pulzaru je přibližování významné, protože obě neutronové hvězdy jsou blízko sebe (jejich nejmenší vzdálenost je necelých 750 tisíc km, tedy srovnatelná s poloměrem Slunce) a doba oběhu je proto krátká (necelých 8 hodin). Hmotnost obou neutronových hvězd je přibližně $1,4 M_{\odot}$.¹⁰⁶ „Významná změna“ periody ovšem znamená asi 76,5 μ s za rok – ale i takovouto hodnotu se podařilo spolehlivě změřit. A co je důležitější, teoretická hodnota, kterou pro vyzařované gravitační vlny a z nich plynoucí změnu periody oběhu předpovídá obecná teorie relativity, se shoduje s hodnotou určenou z pozorování. Již dávno před tím, než byly gravitační vlny detekovány na Zemi, tedy podal binární pulzar PSR 1913+16 astrofyzikální důkaz, že tyto vlny opravdu existují. O významnosti tohoto důkazu svědčí fakt, že Hulse a Taylor byli za objev daného pulzaru odměněni v roce 1993 Nobelovou cenou.¹⁰⁷

OTR, existence gravitačních vln...

Krabí mlhovina



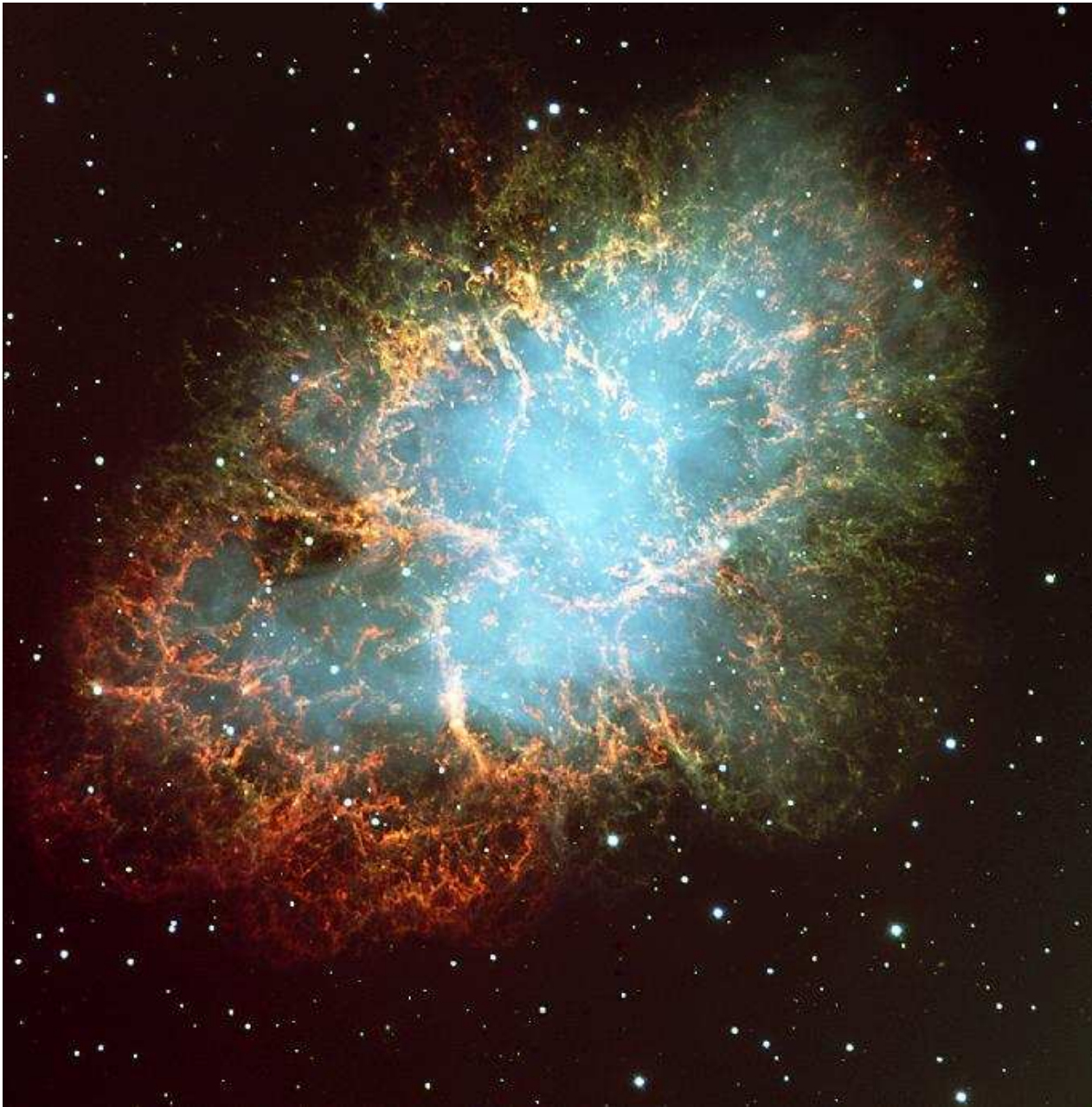
Vznik Krabí mlhoviny



Vznik Krabí mlhoviny



Krabí mlhovina



vznik r. 1054

$r = 2 \text{ kpc}$, $d = 3 \text{ pc}$

hmotnost $3,5 M_{\odot}$

pulsar $1,4 M_{\odot}$

$P = 0,033 \text{ s}$

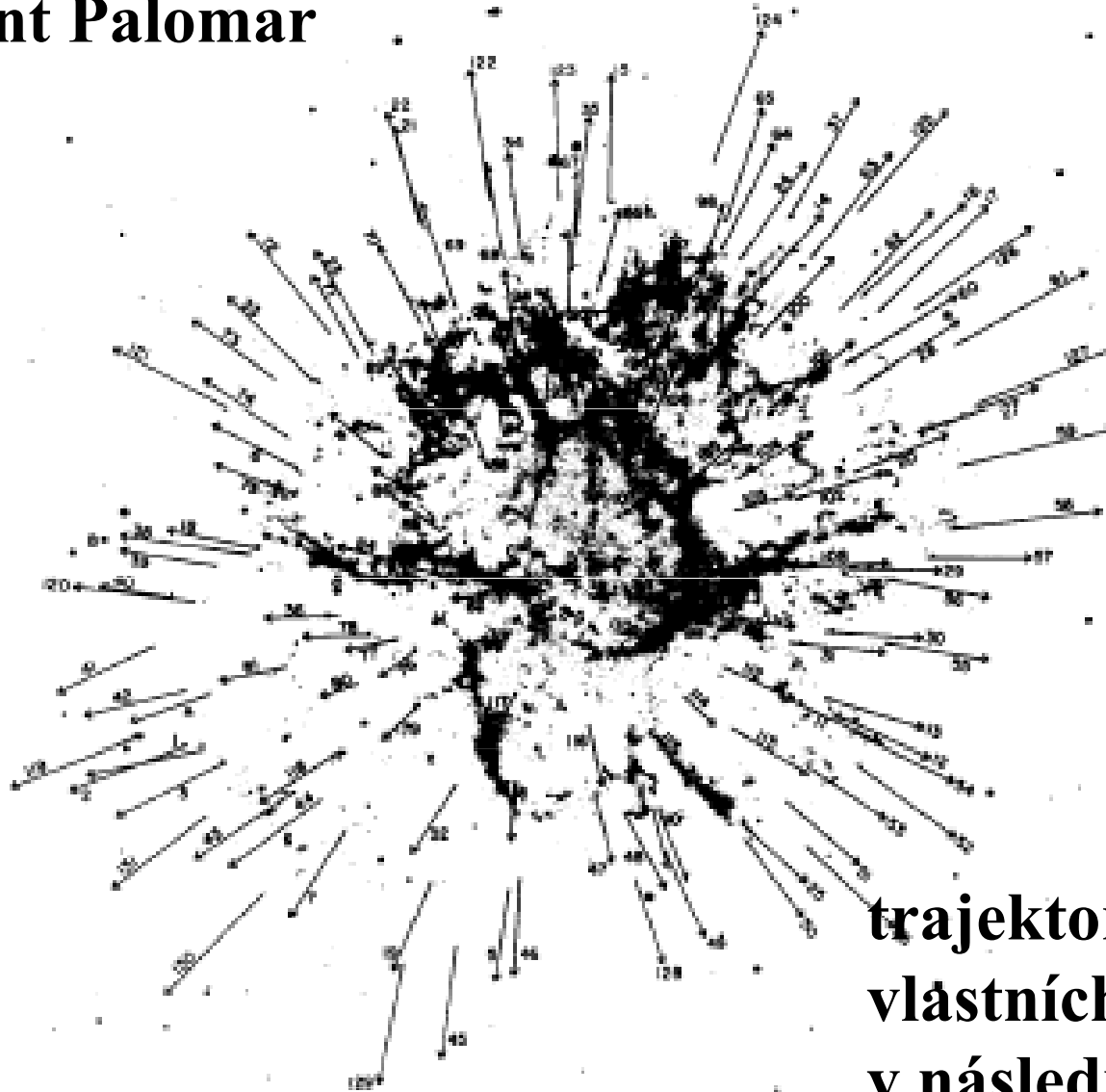
$L = 5 \cdot 10^{31} \text{ W}$

$v_{\text{exp}} = 1\,500 \text{ km.s}^{-1}$

vodíkové čáry - II typ
supernovy

Expanze Krabí mlhoviny

snímek v čáře H_α
z Mount Palomar



trajektorie
vlastních pohybů 132 uzlů
v následujících 270 rocích při
současné rychlosti

Parametry expanze

Eliptický tvar – **rotační elipsoid**, $b/a = 0,67$,
úhlová velikost os $4'$ a $6'$, skutečná 2 pc a 3 pc při
vzdálenosti mlhoviny 1,8 kpc

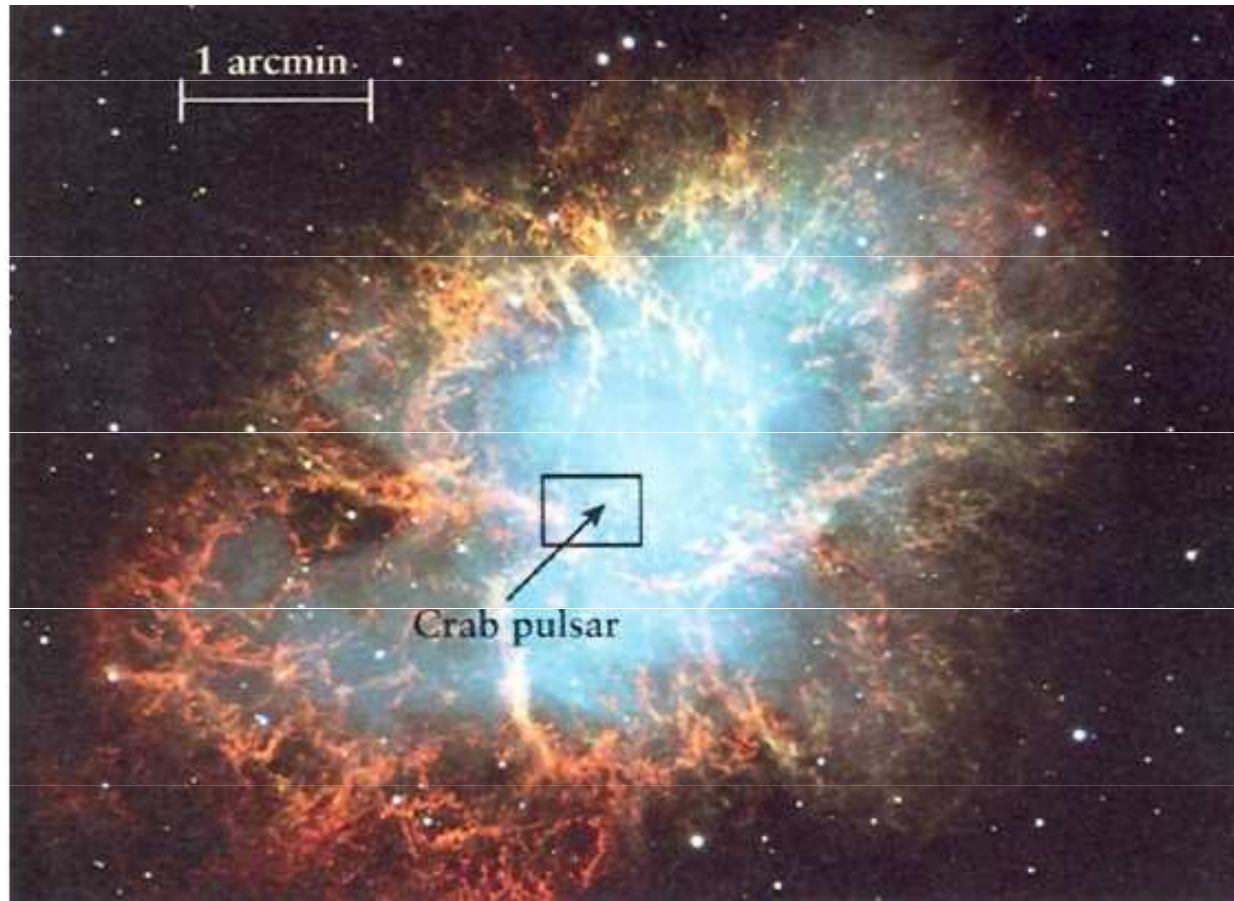
ve směru hlavní osy expanze $v \approx 1\,700 \text{ km.s}^{-1}$

u vedlejší osy $v \approx 1\,100 \text{ km.s}^{-1}$

vnitřní část expanduje $v \approx 700 \text{ km.s}^{-1}$

vlákna tvoří dvě soustředné obálky o průměru $135''$ a $340''$ s rychlostmi rozpínání 700 km.s^{-1} a 1600 km.s^{-1} ,
mezi nimi ojedinělá vlákna

Vznik neutronové hvězdy – pulsaru



Krabí mlhovina – M 1

Pulsar v Krabí mlhovině

úbytek kinetické rotační energie = vyzářená energie

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{dE_{zar}}{dt}$$

zářivý výkon Krabí mlhoviny

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = -5 \cdot 10^{31} W$$

- odpovídá změně rotační energie za sekundu

rotující magnetický dipól, ve vnitřní části mlhoviny

produkce vysoce energetických elektronů

Pulsar v Krabí mlhovině

Proč má **takové** extrémní vlastnosti ?

jeho vznik - zákon zachování momentu hybnosti $L = mrv$

při $M = 1,4 M_{\odot}$, $R = 10 \text{ km}$, **$P = 0,033 \text{ s}$** , $dP/dt = 4 \cdot 10^{-13}$

moment setrvačnosti tuhého tělesa - koule $J = \frac{2}{5}MR^2$

rotační kinetická energie $E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$

úhlová rychlost $\omega = \frac{2\pi}{P}$

změna rotační energie

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = -\frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3} \frac{dP}{dt}$$



Vlastnosti neutronových hvězd

Neutronové hvězdy

$$M \approx (1-2) M_{\odot}$$

PSR J 1614-2230

$$(1,97 \pm 0,04) M_{\odot}$$

$$R \approx (10-14) \text{ km}$$

$$\rho \approx 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

teoretické modely - interpretace měření,
analýza

relativistické objekty, významnost

parametr kompaktnosti $x_g = \frac{r_g}{R}$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \approx \frac{2,95}{M_{\odot}} M \text{ [km]}$$

$$g = \frac{GM}{R^2 \sqrt{1-x_g}}$$

kanonická n. hvězda $1,4 M_{\odot}$, $R \approx 12 \text{ km}$

relativistické efekty ~ desítky %

většina n. hvězd - pozorování efekty OTR

Vývoj neutronových hvězd
 pro neutronové záření, $W \downarrow$, $T \downarrow$
 ochlazování v kvazistacionárním
 režimu: 1. Neutronové ochlazování
 10^5 roků
 2. Fotonové ochlazování
 při $t \geq 10^5$ roků

$$\frac{dW}{dt} = c \frac{dT}{dt} = -L_V - L_f$$

$$L_f = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

teorie $\propto$ pozorování $\rightarrow M, R$ n.h.

Supernovy – přehled historie

Jahr	Sternbild	Dokumente	Entfernung	Helligkeit	Bezeichnung
185	Zentaur	China, Rom	3300 Lj.	-2 mag	RCW 86
393	Skorpion	China	?	-3 mag	CTB 37 A/B
1006	Lupus	Japan, China, Ägypten, Europa	6600 Lj.	-9 mag	PKS 1459-41
1054	Stier	China, Anasazi	6000 Lj.	-6 mag	Krebsnebel
1181	Cassiopeia	China, Japan	?	-1 mag	3C 58
1572	Cassiopeia	Tycho Brahe	10000 Lj.	-4 mag	3C 10
1604	Ophiuchus	Johannes Kepler	< 20000 Lj.	-2,5 mag	3C 358



Krebsnebel:
Bild im sichtbaren Bereich
der SN1054 Überreste

Vznik supernov jejich klasifikace

- Typ Ib, Ic – podobné jako typ II. Staré masivní hvězdy, které vlivem hvězdného větru nebo interakcí s průvodcem ztratily vrchní vrstvy.
- II. typu – samostatná stará hvězda hmotnosti 10-25 Slunci, po skončení termonukleárních reakcí (tvorba Fe) jádro gravitačně zkolabuje (rychlostí řádově 10 000 km/s během několik sekund) na neutronovou hvězdu, (kvarkovou hvězdu) nebo čenou díru. Vnější vrstvy jsou pádem na zkolabované jádro extrémně stlačeny, zahřáty a při výbuchu odvrženy. 99% energie z kolabujícího jádra je odnášeno neutriny (elektricky neutrální částice, má téměř nulovou hmotnost, velice slabě interaguje s hmotou).
- Během kolapsu jádra je za několik málo sekund uvolněna energie $\sim 10^{46}$ J, asi 50x více, než uvolní Slunce za 10 miliard let svého života.
- Teplota zkolabovaného jádra při výbuchu supernovy 1000-10⁹ K, teplota vnějších vrstev 2-3 · 10⁹ K – mohou proběhnout reakce, při kterých vznikají prvky těžší než železo.
- V naší Galaxii dochází k výbuch supernovy II. druhu jednou za 25-50 let, většinou ve spirálních ramenech, kde je velké množství prachu a plynu. Naposledy byla supernova v naší Galaxii pozorována v roce 1604.

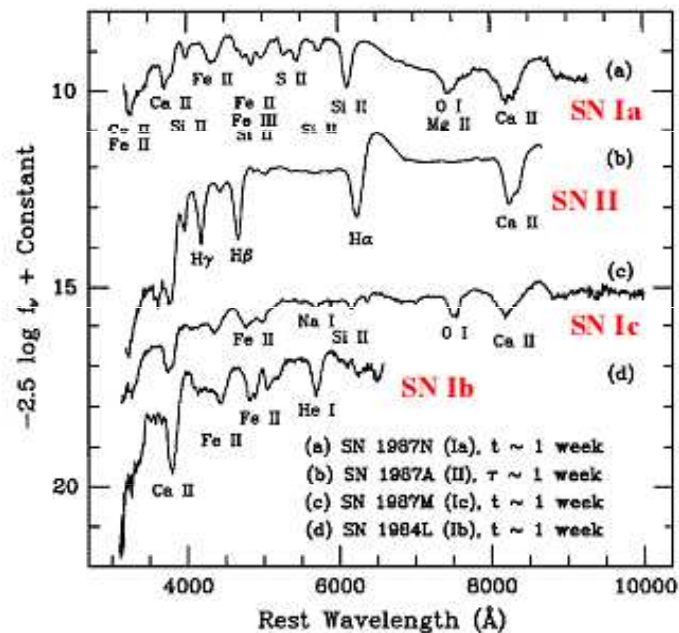
Zaznamenané supernovy:

- 1054 (Cassiopeia)
- 1572 (Krab)
- 1604 (Hadonoš, poslední pozorovaná supernova v naší Galaxii)
- 1885 (galaxie v Andromedě)
- 1987 (Velké Magellanovo mráčko) – podařilo se detekovat vzniklá neutrina

Klasifikace supernov

Supernova Classification

312 FILIPPENKO



6.4.2 SUPERNOVA CLASSIFICATION

observational:

- Type I: no hydrogen lines in spectrum
- Type II: hydrogen lines in spectrum

theoretical:

- thermonuclear explosion of degenerate core
- core collapse $\rightarrow$ neutron star/black hole

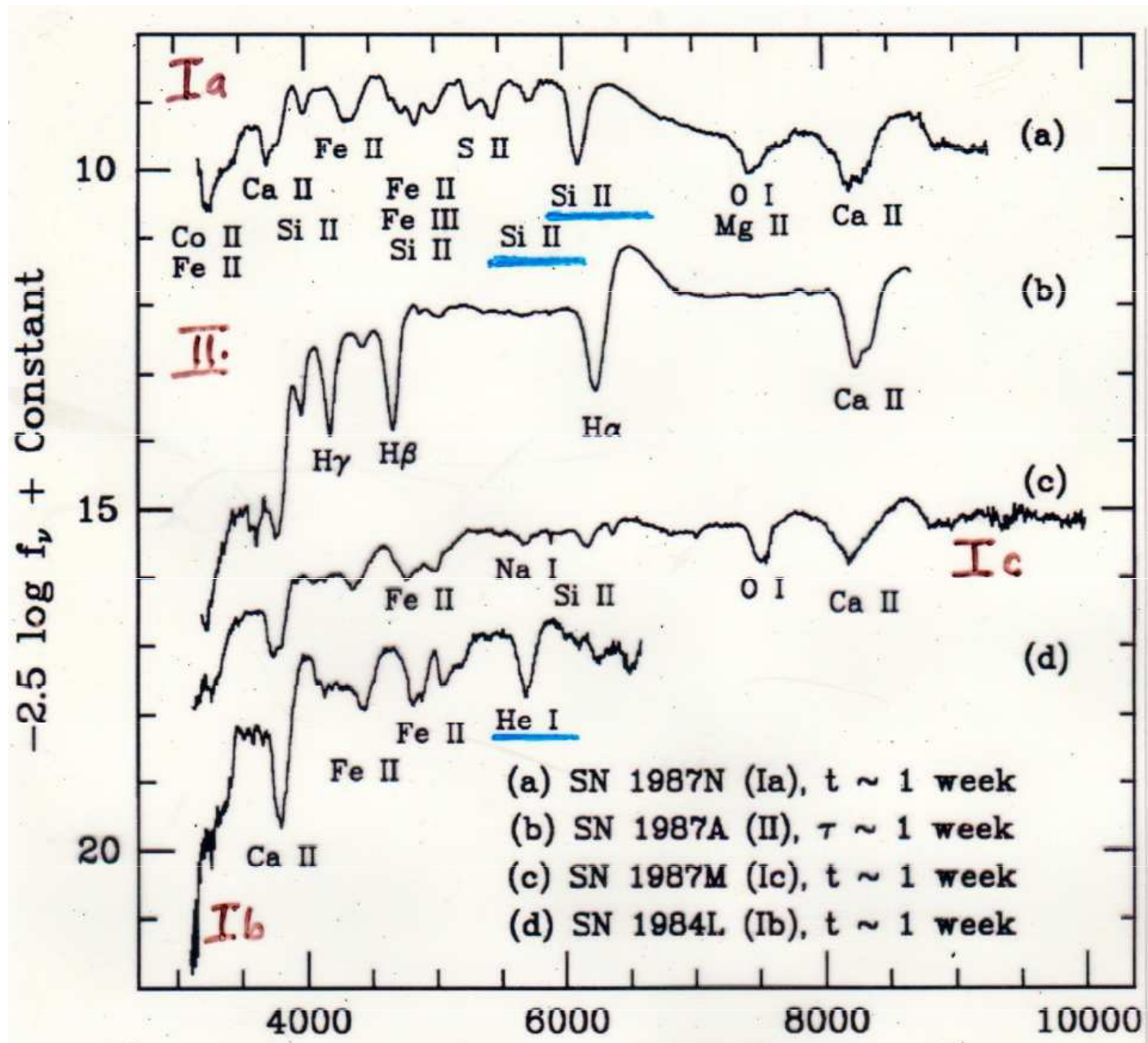
relation no longer 1 to 1 $\rightarrow$ confusion

- Type Ia (Si lines): thermonuclear explosion of white dwarf
- Type Ib/Ic (no Si; He or no He): core collapse of He star
- Type II-P: "classical" core collapse of a massive star with hydrogen envelope
- Type II-L: supernova with linear lightcurve (thermonuclear explosion of intermediate-mass star? probably not!)

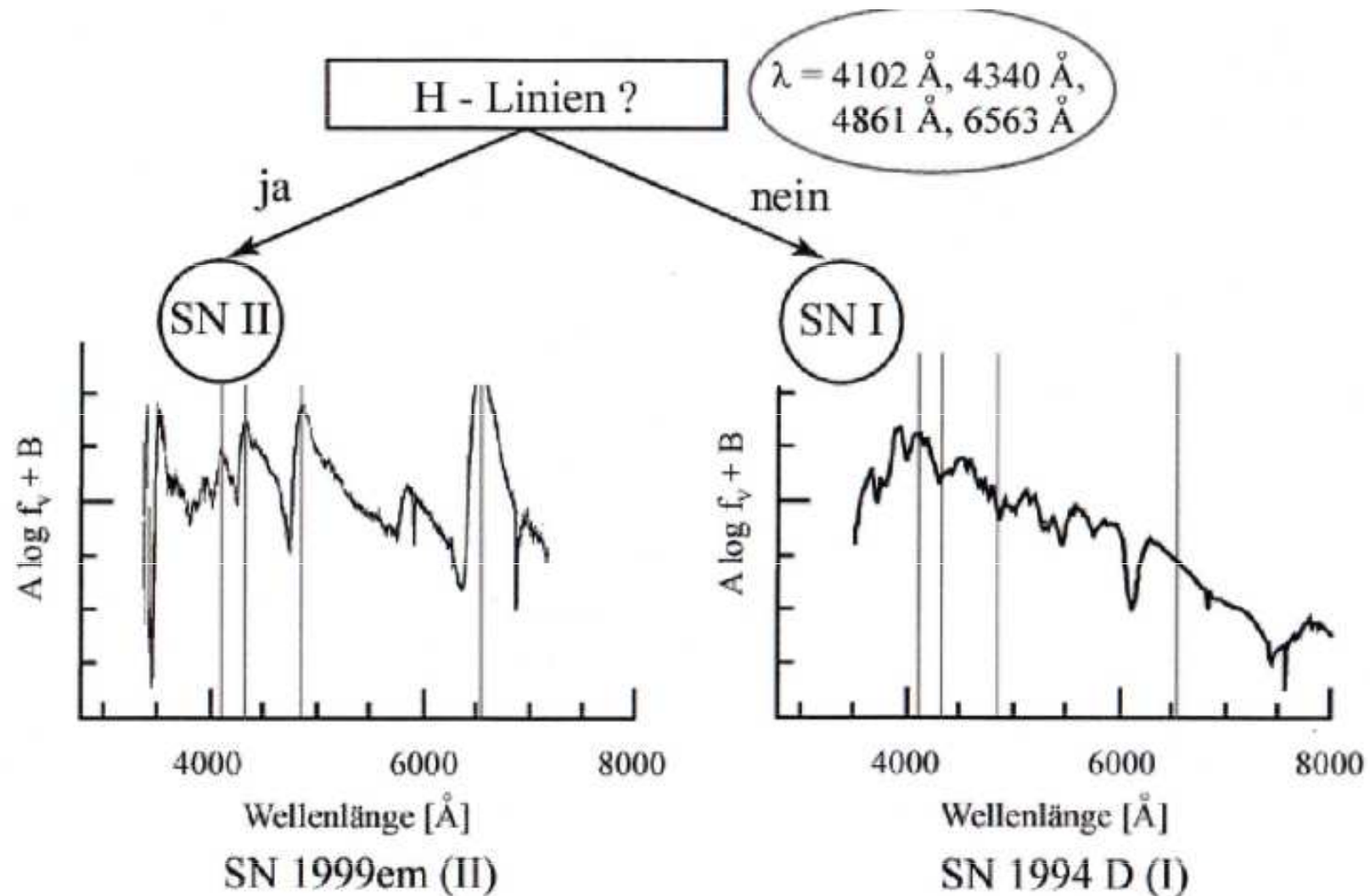
complications

- special supernovae like SN 1987A
- Type IIb: supernovae that change type, SN 1993J (Type II $\rightarrow$ Type Ib)
- some supernova "types" (e.g., IIn) occur for both explosion types ("phenomenon", not type; also see SNe Ic)
- new types: thermonuclear explosion of He star (Type Iab?)

Supernovy

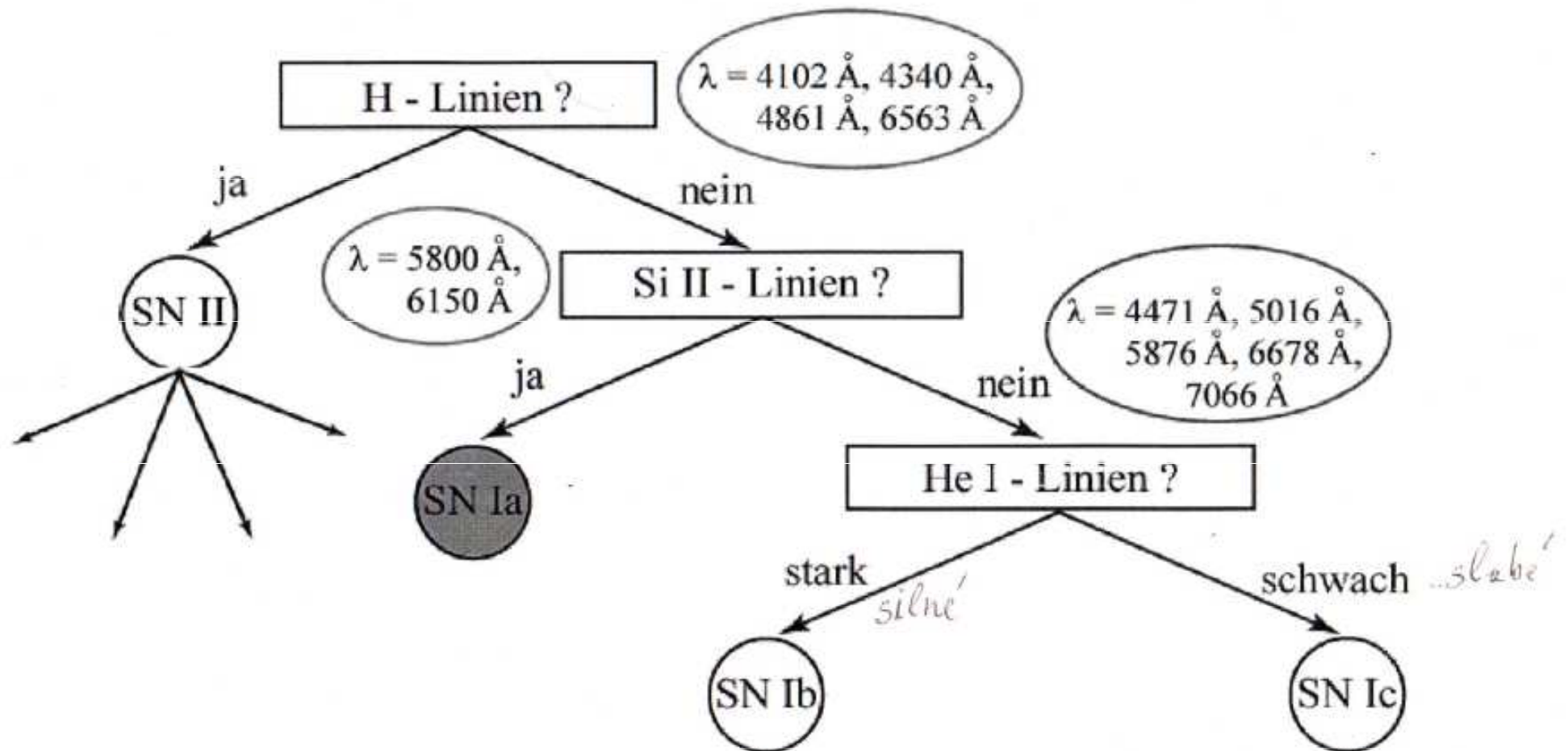


Supernovy – klasifikace



SN 1987 A

Supernovy – klasifikace



Supernovy Ia typ

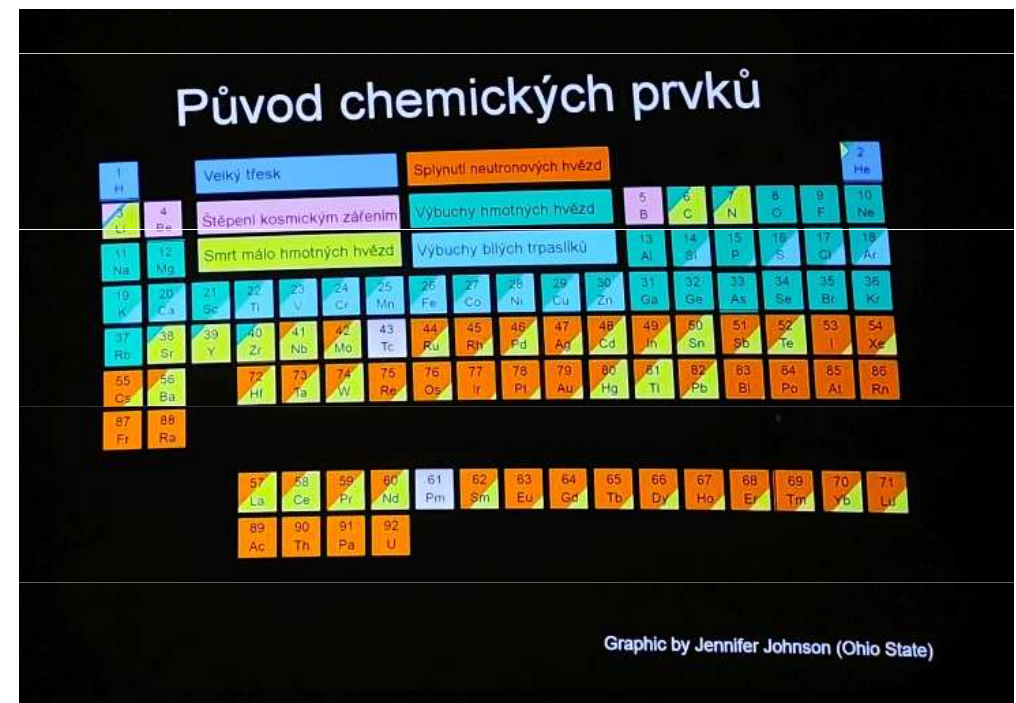
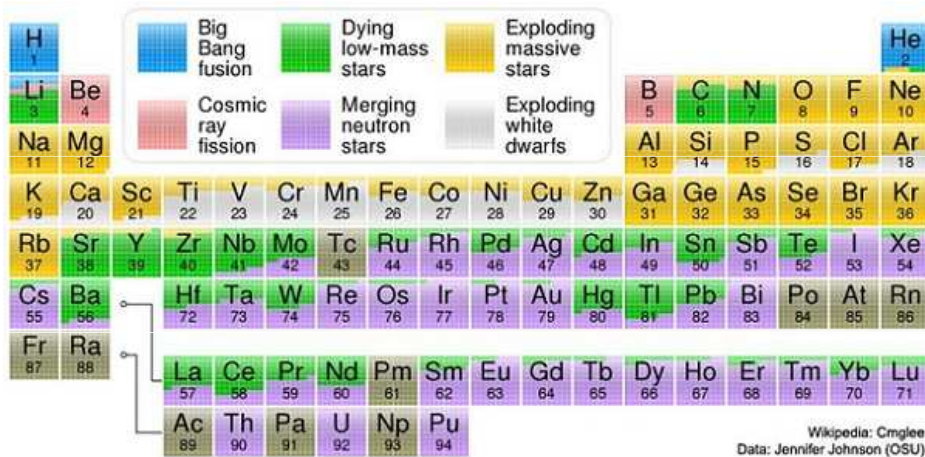
první scénář - bílý trpaslík, těsná dvojhvězda, **přenos hmoty z druhé složky**, $\text{nárůst hmotnosti} \approx 10^{-6} - 10^{-8} M_S/\text{rok}$
překročení Chandrasekharovy meze, nestabilita,

$T \approx 3 \cdot 10^8 \text{ K}$ hoří uhlík, $\rightarrow T \uparrow \approx 10^9 \text{ K}$, spalování explozivní, šíří se rychlostí 100 km/s, vznikají Fe, Co, Ni, Si, P, S,...**exploze celého bílého trpaslíka**, zjasnění hvězdy o 10^{12} , plyn expanduje rychlostí až 25 000 km/s, ve spektru chybí vodík (b.t. – C,O), maximální zářivý výkon $10^9 L_S$, Chandrasekharova mez je téměř stejná, po maximu jasnosti exponenciální pokles v průběhu řádově měsíce,

druhý scénář – srážka neutronové hvězdy a bílého trpaslíka
- srážka neutronových hvězd

Původ prvků ve vesmíru

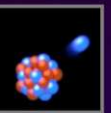
dvojhvězdný systém, srážka složek, vznik prvků za železem zachycováním neutronů, protonů, další hledání...



srážka neutronových hvězd – gravitační vlny, detekce 2017

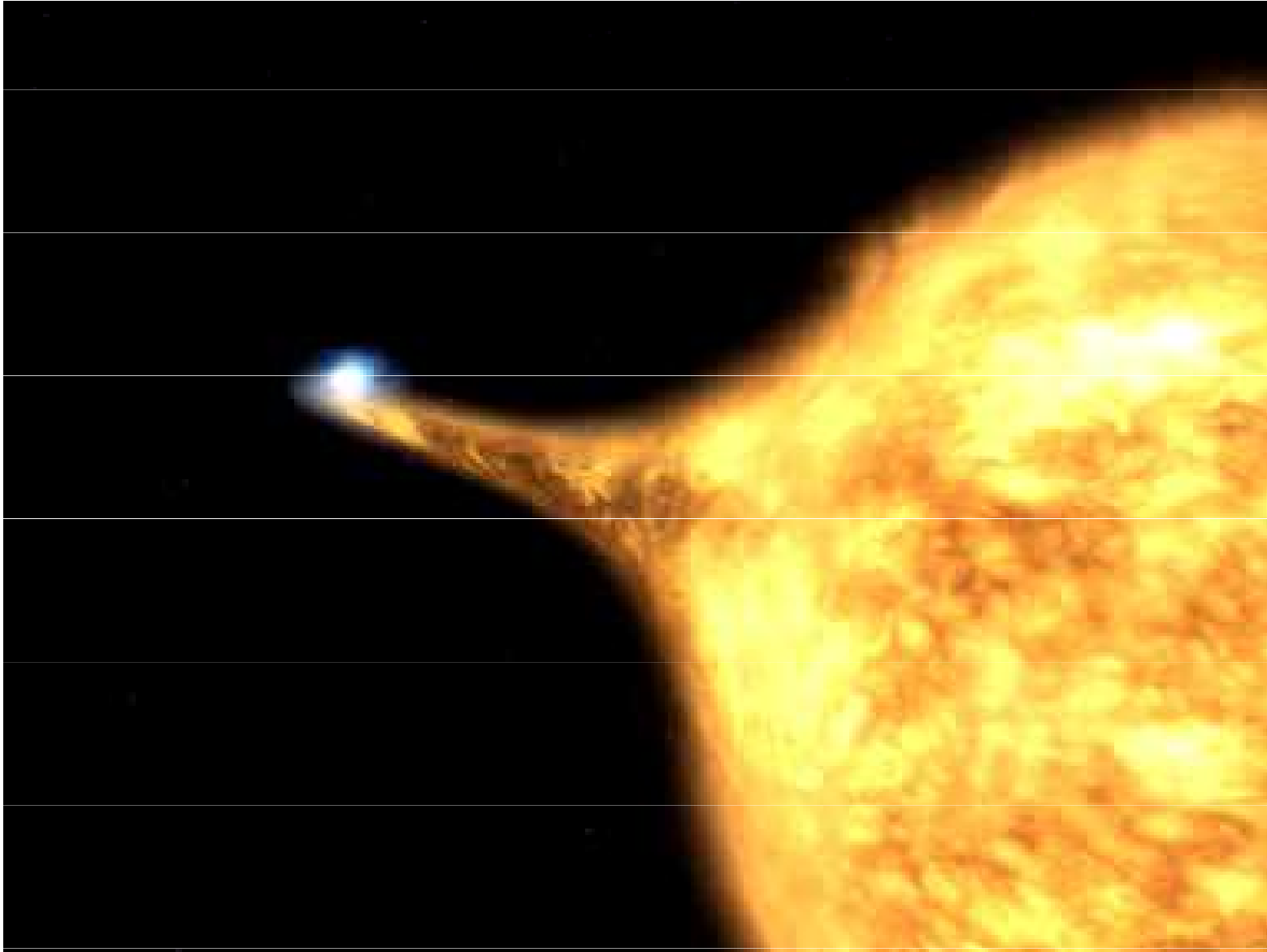
Původ prvků ve vesmíru

ORIGINS OF THE ELEMENTS

H1 Hydrogen	 The big bang  Dying low-mass stars  White dwarf supernovae  Radioactive decay																He2 Helium															
Li3 Lithium	Be4 Beryllium																	B5 Boron	C6 Carbon	N7 Nitrogen	O8 Oxygen	F9 Fluorine	Ne10 Neon									
Na11 Sodium	Mg12 Magnesium	 Cosmic ray collisions  Dying high-mass stars  Merging neutron stars  Human-made																Al13 Aluminum	Si14 Silicon	P15 Phosphorus	S16 Sulfur	Cl17 Chlorine	Ar18 Argon									
K19 Potassium	Ca20 Calcium	Sc21 Scandium	Ti22 Titanium	V23 Vanadium	Cr24 Chromium	Mn25 Manganese	Fe26 Iron	Co27 Cobalt	Ni28 Nickel	Cu29 Copper	Zn30 Zinc	Ga31 Gallium	Ge32 Germanium	As33 Arsenic	Se34 Selenium	Br35 Bromine	Kr36 Krypton															
Rb37 Rubidium	Sr38 Strontium	Y39 Yttrium	Zr40 Zirconium	Nb41 Niobium	Mo42 Molybdenum	Tc43 Technetium	Ru44 Ruthenium	Rh45 Rhodium	Pd46 Palladium	Ag47 Silver	Cd48 Cadmium	In49 Indium	Sn50 Tin	Sb51 Antimony	Te52 Tellurium	I53 Iodine	Xe54 Xenon															
Cs55 Cesium	Ba56 Barium																	Hf72 Hafnium	Ta73 Tantalum	W74 Tungsten	Re75 Rhenium	Os76 Osmium	Ir77 Iridium	Pt78 Platinum	Au79 Gold	Hg80 Mercury	Tl81 Thallium	Pb82 Lead	Bi83 Bismuth	Po84 Polonium	At85 Astatine	Rn86 Radon
Fr87 Francium	Ra88 Radium																	Rf104 Rutherfordium	Db105 Dubnium	Sg106 Seaborgium	Bh107 Bohrium	Hs108 Hassium	Mt109 Meitnerium	Ds110 Darmstadtium	Rg111 Roentgenium	Cn112 Copernicium	Nh113 Nihonium	Fl114 Flerovium	Mc115 Moscovium	Lv116 Livermorium	Ts117 Tennessine	Og118 Oganesson
		La57 Lanthanum	Ce58 Cerium	Pr59 Praseodymium	Nd60 Neodymium	Pm61 Promethium	Sm62 Samarium	Eu63 Europium	Gd64 Gadolinium	Tb65 Terbium	Dy66 Dysprosium	Ho67 Holmium	Er68 Erbium	Tm69 Thulium	Yb70 Ytterbium	Lu71 Lutetium																
		Ac89 Actinium	Th90 Thorium	Pa91 Protactinium	U92 Uranium	Np93 Neptunium	Pu94 Plutonium	Am95 Americium	Cm96 Curium	Bk97 Berkelium	Cf98 Californium	Es99 Einsteinium	Fm100 Fermium	Md101 Mendelevium	No102 Nobelium	Lr103 Lawrencium																

This periodic table depicts the primary source on Earth for each element. In cases where two sources contribute fairly equally, both appear.

Supernovy Ia typ

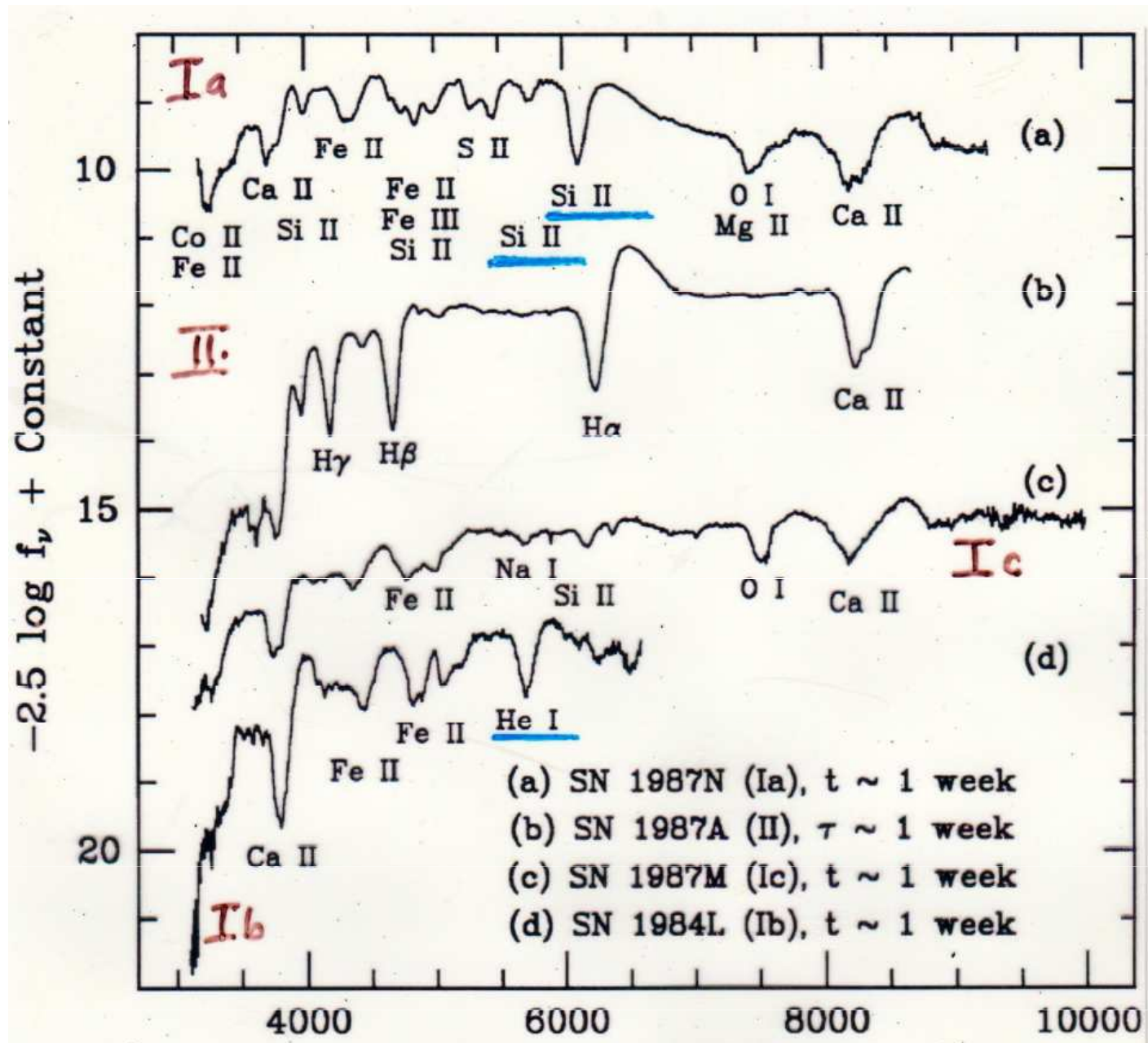


Supernovy Ia

srážka dvou neutronových hvězd



Supernovy



Supernovy II. typu

předchůdce červený, modrý velebobr, $\approx (10 - 25) M_S$, nestabilní stav, efekty obecné teorie relativity - $T \approx 10^{11} \text{ K}$, hustoty $\approx 10^{18} \text{ kg.m}^{-3}$ nejprve imploze, zhroucení do jádra $(1-2) M_S$,

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$$

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

$$e^+ + n \rightarrow p + \bar{\nu}_e$$

neutrino odnáší energii

následně exploze, maximální zářivý výkon $10^8 L_S$, rychlost expanze $(6\,000 - 20\,000) \text{ km/s}$, silné vodíkové čáry ve spektru

Supernova 1987 A



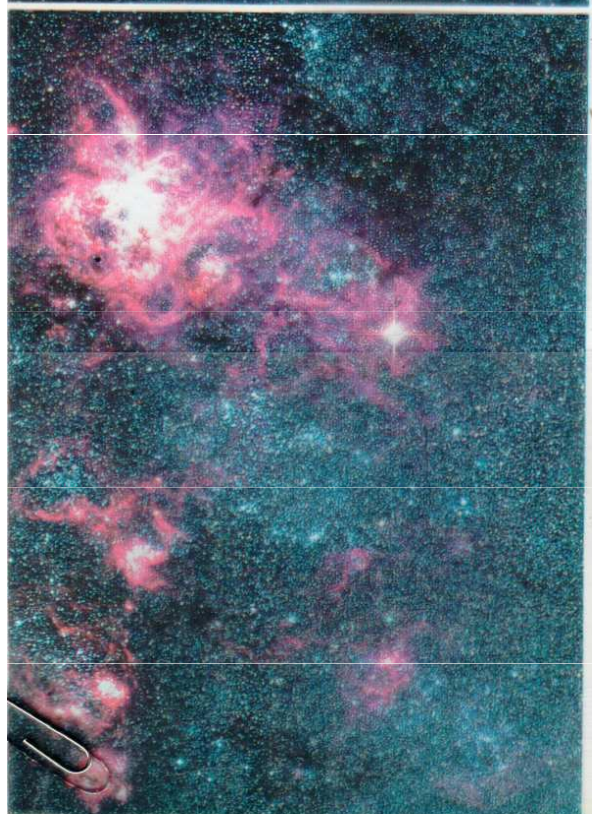
23. 2. 1987

modrý veleobr, $18 M_{\odot}$
 $8 \times 10^4 L_{\odot}$, 12,3 mag



25. 2. 1987

supernova, v maximu
 $2 \times 10^8 L_{\odot}$, 2,8 mag



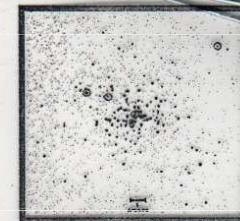
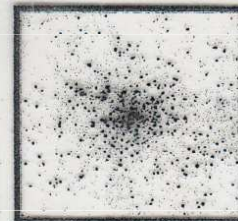
Tarantule NGC 2070

$3 \times 10^5 M_{\odot}$

1500 sv. r. 12 hvězd ~

$150 M_{\odot}$

oblast $H II$ 50 000 K



1

Hubble Space Telescope • WFPC2 • FOS
 WFPC2 Science Team and NASA / P. Massey (NGAO), D. Hunter (Lowell Obs.)

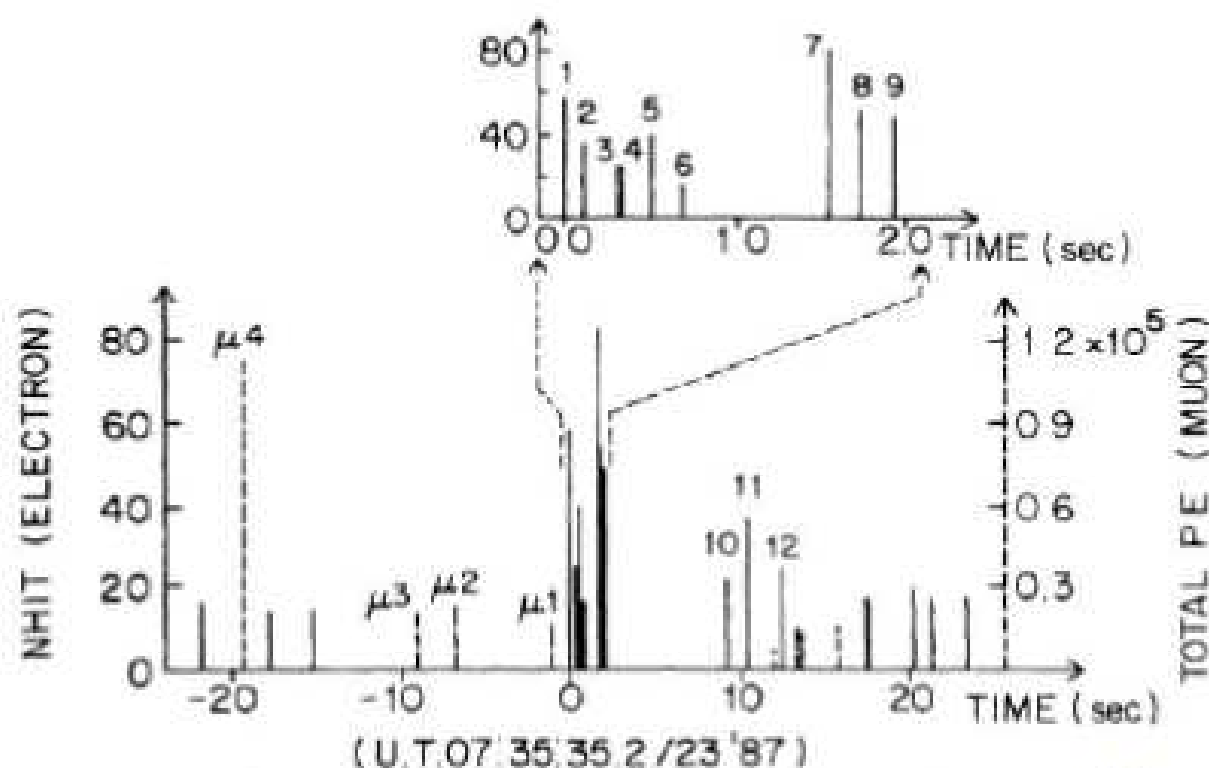
Supernova 1987 A



Supernova 1987 A

Neutrina se supernovy SN1987A

23. února 1987 byl ve Velkém Magellanově mraku pozorován výbuch supernovy SN1987A. Kamiokande zaznamenal 3 hodiny před optickým signálem shluk 11 případů během 13 vteřin.

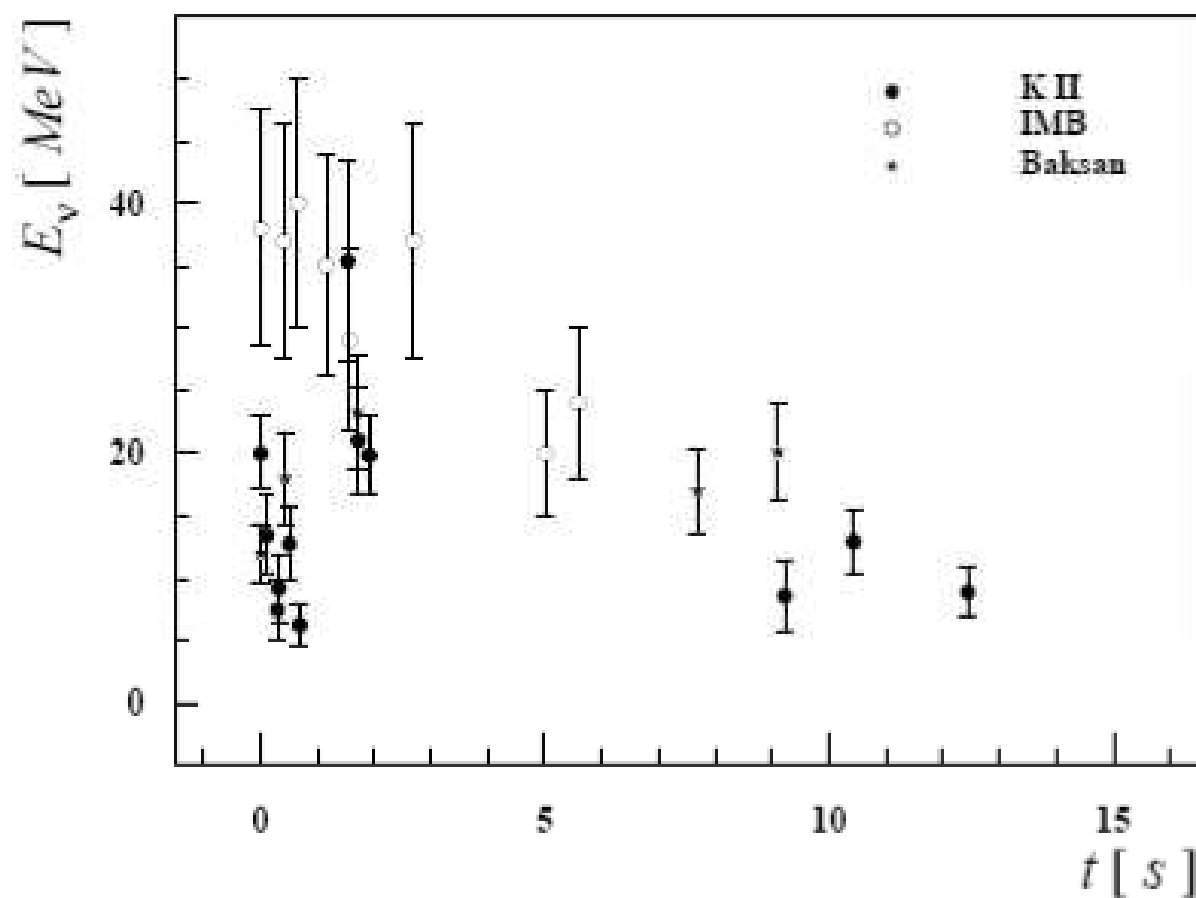


Interpretace: neutrina doprovázející vznik neutronové hvězdy u supernov typu II v procesu: $e^- + p \rightarrow \bar{\nu}_e + n$

Supernova 1987 A

Neutrino ze supernovy SN1987A

37



Černé díry - vznik

Jestliže se smršťování jádra hvězdy nezastaví při elektronovém degenerovaném plynu jako u bílých trpaslíků respektive při neutronovém degenerovaném plynu jako u neutronových hvězd a pokračuje dále, pak hvězda přechází do stavu tzv. černé díry. Ta vzniká jako závěrečné stádium vývoje hvězdy při relativistickém gravitačním smršťování - kolapsu hvězdy, jejíž hmotnost jádra v okamžiku smršťování převyšuje určitou kritickou hodnotu hmotnosti z intervalu $2,5 M_{\odot} - 3,0 M_{\odot}$, v závislosti na přijaté stavové rovnici. Při zrychlujícím se smršťování jádra hvězdy se uvolňuje gravitační potenciální energie, jejíž podstatná část je z jádra hvězdy odnášena prostřednictvím neutrin.

Pokud pro poloměr hvězdy platí, že $r > 10 R_g$, smršťování probíhá rychlostí volného pádu za čas

$$t = (6\pi G \rho)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.3.1)$$

Uvedený vztah lze zjednodušeně odvodit z volného pádu částice na povrch kolabující koule o poloměru r , hmotnosti M a hustotě ρ . Ze zákona zachování mechanické energie pro jednotkovou hmotnost platí

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{G M}{r}, \quad (5.3.2)$$

odkud úpravou obdržíme

$$dt = \left(\frac{r}{2 G M} \right)^{\frac{1}{2}} dr. \quad (5.3.3)$$

Černé díry - vznik

Trochu historie – aneb opravdu nejde černou díru popsat newtonovsky?

V jistém smyslu o existenci „něčeho jako černá díra“ spekulovali už fyzici v rámci newtonovské fyziky. John Michell¹²⁰ v roce 1783 přišel s myšlenkou, že by mohly existovat hvězdy tak hmotné, že by z nich nemohlo uniknout jejich vlastní světlo. (Nazýval je „temné hvězdy“.) Myšlenka je v zásadě jednoduchá:

Úniková rychlost z povrchu tělesa o poloměru R a hmotnosti M je

$$v = \sqrt{2 \frac{GM}{R}} .^{121} \quad (37)$$

Je-li $2GM/R > c^2$, je úniková rychlost větší, než rychlost světla. To znamená, že světlo z povrchu takové hvězdy nemůže nikdy doletět ke vzdálenému pozorovateli. Ten proto danou hvězdu nemůže vidět, bude pro něj „černá“.¹²²

Aby taková situace nastala, musí být

$$R < \frac{2GM}{c^2} . \quad (38)$$

Náhodou zde vychází stejná hodnota, jako máme v TOV rovnici nebo ve Schwarzschildově metrice (21), viz Schwarzschildův poloměr (22). Je to ale opravdu spíš náhoda, vlastnosti černých děr rozhodně nelze popisovat newtonovsky.¹²³

Černé díry, gravitační kolaps - historie

SEPTEMBER 1, 1939

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 56

On Continued Gravitational Contraction

J. R. OPPENHEIMER AND H. SNYDER

University of California, Berkeley, California

(Received July 10, 1939)

When all thermonuclear sources of energy are exhausted a sufficiently heavy star will collapse. Unless fission due to rotation, the radiation of mass, or the blowing off of mass by radiation, reduce the star's mass to the order of that of the sun, this contraction will continue indefinitely. In the present paper we study the solutions of the gravitational field equations which describe this process. In I, general and qualitative arguments are given on the behavior of the metrical tensor as the contraction progresses: the radius of the star approaches asymptotically its gravitational radius; light from the surface of the star is progressively reddened, and can escape over a progressively narrower range of angles. In II, an analytic solution of the field equations confirming these general arguments is obtained for the case that the pressure within the star can be neglected. The total time of collapse for an observer comoving with the stellar matter is finite, and for this idealized case and typical stellar masses, of the order of a day; an external observer sees the star asymptotically shrinking to its gravitational radius.

Černé díry - vznik

Dosazením za hmotnost $M = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$ a další úpravou dostaneme vztah (5.3.1).

Při $r < 10 R_g$ se stávají výraznými efekty obecné teorie relativity a k popisu dalšího smršťování volným pádem použijeme povrchu jádra hvězdy, přičemž popis však nyní závisí na volbě vztažné soustavy, ve které se nachází pozorovatel. V případě, že pozorovatel je ve vztažné soustavě spojené s povrchem smršťujícího se jádra, naměří tzv. vlastní čas. Zaregistruje, že od počátku pohybu ze vzdálenosti $r = 10 R_g$ do vzdálenosti $r = R_g$ uběhlo řádově několik sekund. Rychlost smršťování vzrostla prakticky až na rychlost světla. Průchod přes povrch sféry o Schwarzschildově poloměru proběhne okamžitě. Pro vnějšího pozorovatele, spojeného se vztažnou soustavou kosmických těles vně černé díry, rychlost smršťování povrchu jádra hvězdy nejprve roste, ale potom se pohyb zpomaluje a při $r \rightarrow R_g$ rychlost klesá k nule. Časový interval přechodu povrchu jádra hvězdy přes povrch sféry o Schwarzschildově poloměru je nekonečně velký.

Černé díry - vznik

Horizont černé díry

Ploše (sféře) o radiální souřadnici $r = r_g = \frac{2GM}{c^2}$ se říká **horizont** černé díry.¹²⁹ Můžeme ho považovat za hranici černé díry. Výše jsme odvodili, že foton, vyslaný na horizontu směrem ven, od černé díry, zůstává na horizontu, je tedy vůči černé díře i vůči vzdálenému pozorovateli v klidu.

Možná námitka:

Přirozeně se může objevit námitka, že foton se přece pohybuje rychlostí světla. Jak tedy může zůstat v klidu?

Foton se skutečně pohybuje rychlostí c , tedy rychlostí světla.¹³⁰ Ale *vůči čemu* se pohybuje rychlostí c ? Vůči inerciálním systémům. V gravitačním poli, jak už jsme rozebrali v předchozí kapitole, musí jít o *lokální inerciální systémy*¹³¹ (viz též Dodatek B), například o lokální inerciální systém pozorovatele padajícího do černé díry.¹³² Vůči takovému pozorovateli se daný foton opravdu pohybuje rychlostí světla – přesto vůči vzdálenému pozorovateli stojí.

Schwarzschildův poloměr

$$\frac{r_g}{r}, \text{ kde } r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

objekt	hmotnost M („typická“)	gravitační poloměr r_g	poloměr r („typický“)	r_g/r
Země	$6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	0,9 cm	$6 \cdot 10^3 \text{ km}$	$1 \cdot 10^{-9}$
Slunce	$2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	3 km	$7 \cdot 10^5 \text{ km}$	$4 \cdot 10^{-6}$
bílý trpaslík	$2 \cdot 10^{30} \text{ kg}^{35}$	3 km	$6 \cdot 10^3 \text{ km}$	$5 \cdot 10^{-4}$
neutronová hvězda	$3 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	4 km	12 km	0,3

Černé díry - vznik

Charakter řešení rovnic popisujících gravitační pole ve sféricko-symetrickém případě byl nalezen K. Schwarzschildem. Podle jeho řešení je závislost poloměru kolabující hvězdy na čase z hlediska vztažné soustavy spojené s vnějším pozorovatelem dána vztahem

$$r = R_g + (r_1 - R_g) e^{-\frac{c(t-t_1)}{2R_g}}, \quad (5.3.4)$$

kde r_1 je poloměr hvězdy v čase t_1 a ve vztahu se předpokládá, že $(r_1 - R_g) \ll R_g$. Ze vztahu vyplývá, že z hlediska vnějšího pozorovatele při přibližování $r \rightarrow R_g$ rychlost smršťování se asymptoticky zmenšuje k nule. Schwarzschildovo řešení kolapsu nerotující hvězdy vede k tomu, že pohyb každého bodu na povrchu kolabujícího jádra je zkoumán jako volný pád ve sféricko-symetrickém gravitačním poli.

Rovněž svítivost kolabující hvězdy klesá s časem podle vztahu

$$L = L_0 e^{-\frac{2c}{3\sqrt{3}R_g}(t-t_1)}, \quad (5.3.5)$$

kde L_0 je svítivost hvězdy v čase t_1 , při $t \rightarrow \infty$ svítivost $L \rightarrow 0$.

Černé díry, charakteristiky

Jaké mohou být obecné černé díry?

Zajímavým výsledkem řady prací je zjištění, že černé díry musí být vlastně velmi jednoduché, a stačí je popsat jen třemi parametry (!).

Při gravitačním kolapsu se totiž prakticky všechny nesymetrie¹⁴⁹ jednak vyzáří pryč (gravitačními vlnami) a jednak „skryjí“ pod horizont. Výsledná černá díra je pak charakterizována jen třemi čísly:

- hmotností M ,
- momentem hybnosti L ,
- nábojem Q .

Žádné další charakteristiky už černá díra nemá.¹⁵⁰ Podle příslušných řešení Einsteinových rovnic nesou proto obecnější černé díry následující názvy (uvádíme i sféricky symetrické případy):

- Schwarzschildova černá díra (sféricky symetrická, charakterizována jen svou hmotností M),
- Reissnerova-Norströмова černá díra (sféricky symetrická, ale nabitá, charakterizovaná M a Q),
- Kerrova černá díra (rotující, nenabitá, charakterizovaná M a momentem hybnosti L),
- Kerrova-Newmannova (nabitá rotující černá díra, charakterizovaná M , L a Q).

Reálně zřejmě černé díry nemají významnější náboj, takže typickou černou dírou je **Kerrova**.¹⁵¹

Černé díry

Kerova černá díra

hmotnost M , moment hybnosti J ,
elektrický náboj Q

↓
charakterizujeme
bezrozměrnými parametry

$$a = \frac{cJ}{GM^2}$$

max... $a \leq 1$

$$a_0 = 0.185$$

Schwarzschildova černá díra

$$J = 0, Q = 0$$

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

Černé díry - vznik

Nechť $\Delta\mathcal{T}$ je časový interval mezi dvěma událostmi, které probíhají ve vzdálenosti r od středu černé díry, pro konkrétnost zvolme že r je poloměr černé díry. Čas naměřený pozorovatelem na povrchu černé díry je vlastní čas $\mathcal{T}$. Dále nechť Δt je časový interval mezi stejnými dvěma událostmi, který je naměřen pozorovatelem v tzv. souřadnicovém čase τ nekonečně velké vzdálenosti od černé díry. Oba časové intervaly jsou mezi sebou vázány vztahem

$$\Delta t = \frac{\Delta\mathcal{T}}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta\mathcal{T}}{\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.3.6)$$

Jestliže je vzdálenost r od středu černé díry podstatně větší než gravitační poloměr R_g , pak platí $\Delta t = \Delta\mathcal{T}$, tedy ve velkých vzdálenostech od černé díry je souřadnicový čas shodný s vlastním časem. Při $r \rightarrow R_g$ pro libovolný interval vlastního času $\Delta\mathcal{T}$ platí, že $\Delta t \rightarrow \infty$. Jinými slovy časový interval mezi dvěma událostmi je nekonečně velký.

Pod časovým intervalem $\Delta\mathcal{T}$ můžeme rozumět periodu elektromagnetické vlny $\mathcal{T} = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c}$. Ze vztahu (5.3.6) vyplývá, že vlnová délka λ registrovaná pozorovatelem bude větší než vlnová délka λ_0 , kterou emituje atom ve vzdálenosti r od černé díry, přičemž platí

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.3.7)$$

Ze vztahu vyplývá, že při $r \rightarrow R_g$ dostáváme $\lambda \rightarrow \infty$.

Relativistický efekt gravitačního rudého posuvu vlnových délek v blízkosti hvězd s velkou hmotností je nutno uvažovat při studiu smršťování jader hvězd v závěrečných stádiích vývoje hvězd.

Černé díry

Horizont černé díry

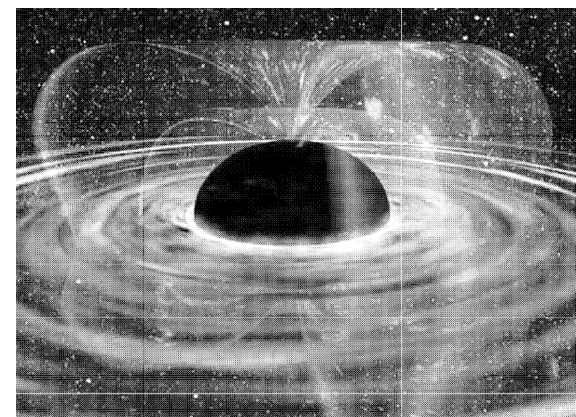
Ploše (sféře) o radiální souřadnici $r = r_g = \frac{2GM}{c^2}$ se říká **horizont** černé díry.¹²⁹ Můžeme ho považovat za hranici černé díry. Výše jsme odvodili, že foton, vyslaný na horizontu směrem ven, od černé díry, zůstává na horizontu, je tedy vůči černé díře i vůči vzdálenému pozorovateli v klidu.

Možná námitka:

Přirozeně se může objevit námitka, že foton se přece pohybuje rychlostí světla. Jak tedy může zůstat v klidu?

Foton se skutečně pohybuje rychlostí c , tedy rychlostí světla.¹³⁰ Ale *vůči čemu* se pohybuje rychlostí c ? Vůči inerciálním systémům. V gravitačním poli, jak už jsme rozebrali v předchozí kapitole, musí jít o *lokální inerciální systémy*¹³¹ (viz též Dodatek B), například o lokální inerciální systém pozorovatele padajícího do černé díry.¹³² Vůči takovému pozorovateli se daný foton opravdu pohybuje rychlostí světla – přesto vůči vzdálenému pozorovateli stojí.

Černé díry



Další aplikaci rozměrové analýzy spojujeme s astrofyzikálně exotickými objekty - černými děrami (obr. 2), zpracováno podle [7]. Nechť A je plocha horizontu událostí. Vyjádříme ji pomocí konstant G , c a hmotnosti černé díry M . Platí vztah $A \sim G^x c^y M^z$. Rozměr jednotlivých parametrů je $[A] = \text{m}^2$, $[G] = \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $[c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $[M] = \text{kg}$. Srovnáním rozměrů levé a pravé části vztahu obdržíme $\text{m}^2 = \text{m}^{3x} \cdot \text{kg}^{-x} \cdot \text{s}^{-2x} \cdot \text{m}^y \cdot \text{s}^{-y} \cdot \text{kg}^z$. K platnosti rozměrové rovnice musí být splněny podmínky algebraických rovnic:

$$[\text{m}] \quad 2 = 3x + y$$

$$[\text{kg}] \quad 0 = -x + z$$

$$[\text{s}] \quad 0 = -2x - y$$

Řešením rovnic obdržíme $x = 2$, $y = -4$, $z = 2$, hledaný vztah má tvar $A \sim G^2 c^4 m^2$.

Černé díry

Předpokládejme, že plocha povrchu černé díry odpovídá ploše horizontu událostí. V roce 1971 *Hawking* v [8] na základě úvah vyplývajících z obecné teorie relativity dospěl k závěru, že plocha horizontu událostí černé díry se při libovolných klasických procesech nemůže zmenšovat, tj. chová se jako entropie, $\Delta A \geq 0$. Platí tvrzení analogické druhému zákonu termodynamiky konstatujícímu, že celková entropie uzavřeného systému se nezmenšuje. *Bekenstein* [9] formuloval názor, že entropie černé díry je úměrná ploše jejího povrchu, $S = \eta A$. Při znalosti rozměru entropie $[S] = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ vyjádřete prostřednictvím konstant c , G , h a k o rozměrech:

$$[c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$[G] = \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$[h] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$[k] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Úpravou obdržíme $\eta = \frac{S}{A}$, $[\eta] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Platí $\eta \sim C^x G^y h^z k^w$. Srovnáním rozměrů levé a pravé části máme:

$$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} = \text{m}^x \cdot \text{s}^{-x} \cdot \text{m}^{3y} \cdot \text{kg}^{-y} \cdot \text{s}^{-2y} \cdot \text{kg}^z \cdot \text{m}^{2z} \cdot \text{s}^{-z} \cdot \text{kg}^w \cdot \text{m}^{2w} \cdot \text{s}^{-2w} \cdot \text{K}^{-w}$$

Černé díry

K platnosti rozměrové rovnice musí být splněny podmínky algebraických rovnic:

$$[\text{m}] \quad 0 = x + 3y + 2z + 2w$$

$$[\text{s}] \quad -2 = -x - 2y - z - 2w$$

$$[\text{kg}] \quad 1 = -y + z + w$$

$$[\text{K}] \quad -1 = -w$$

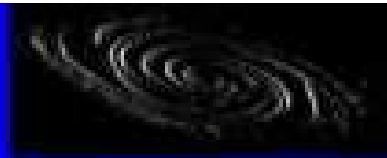
Řešením systému obdržíme $x = 3$, $y = -1$, $z = -1$, $w = 1$. Odtud pro $\eta = \frac{c^3 k}{G \hbar}$, tedy platí $S = \frac{c^3 k}{G \hbar} A$. Až na numerický faktor jde o stejný vztah, který obdržel v původním historickém odvození [9] Bekenstein.

[8] *Hawking, S.*: Gravitational radiation from colliding black holes. Phys. Rev. Lett., 26, (1971), p. 1344.

[9] *Bekenstein, J.*: Black holes and entropy. Phys. Rev. D, 7 (1973), p. 2333.

Černé díry

Černé díry



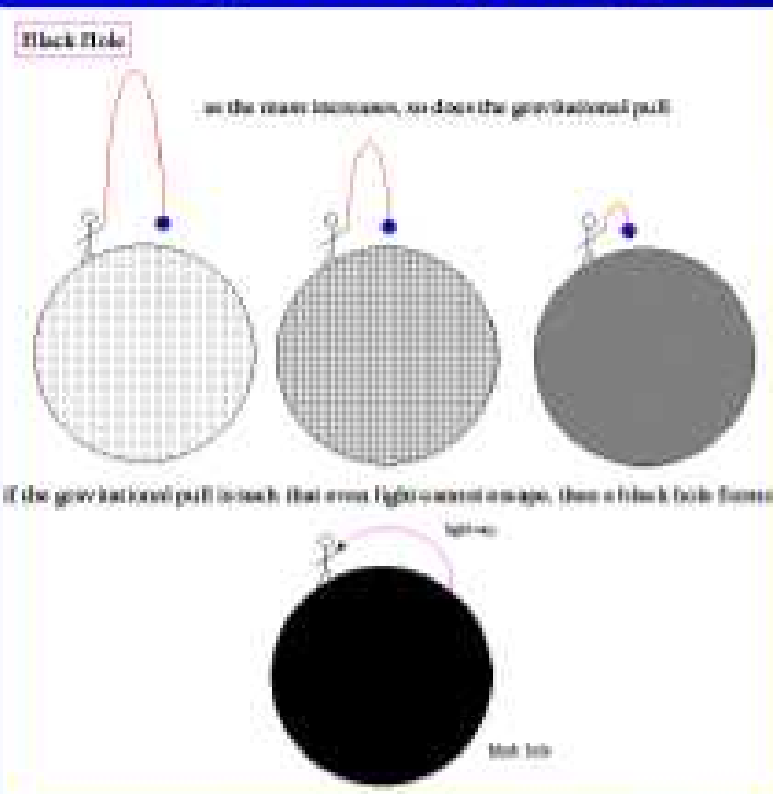
- Konečné stadium hvězd s hmotností $> 25 M_{\text{Slunce}}$
 - hvězdné černé díry s hmotností $3-15 M_{\text{Slunce}}$
- Jádra galaxií
 - hmotnost $10^6 - 10^9 M_{\text{Slunce}}$
- Mikroskopické černé díry ($10^{11} \text{ kg} =$ hmotnost hory)



John A. Wheeler
(1911-)



Karl Schwarzschild
(1873-1916)



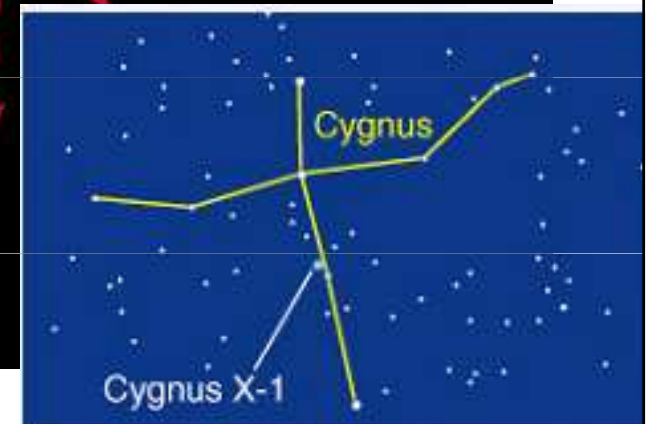
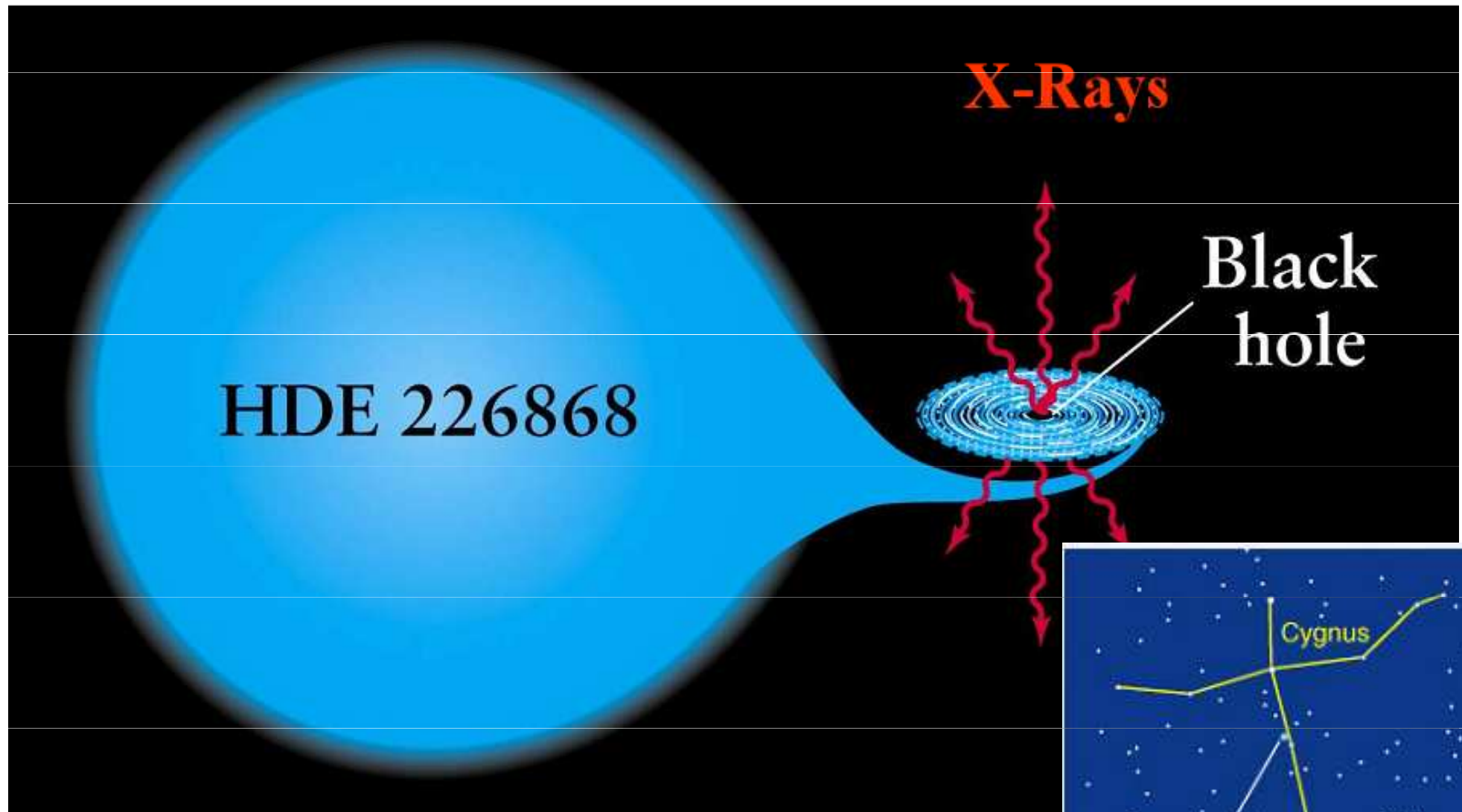
Poloměr černé díry s danou hmotou

Objekt	Hmotnost	Poloměr černé díry
Země	$5.98 \times 10^{27} \text{ g}$	0.9 cm
Slunce	$1.989 \times 10^{33} \text{ g}$	2.9 km
Hvězda $5x M_{\odot}$	$9.945 \times 10^{33} \text{ g}$	15 km
Jádro galaxie	$10^6 M_{\odot}$	$3 \times 10^6 \text{ km}$

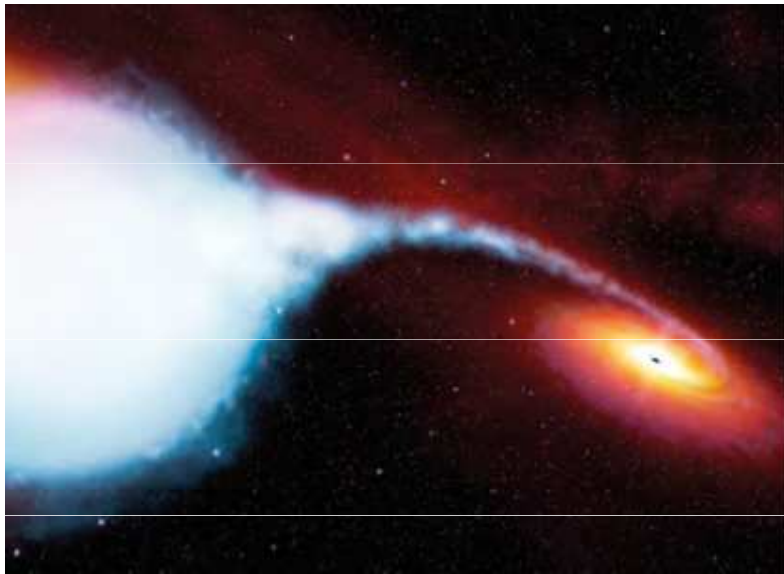


Dvojhvězda Cygnus X - 1

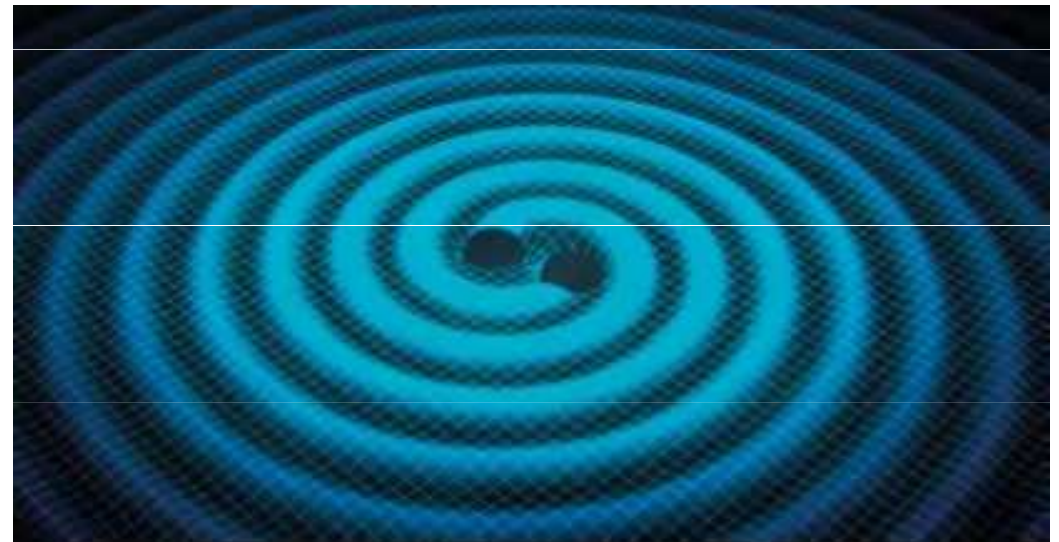
Model of Cygnus X-1



Černé díry



Obr. 7 Umělecká představa černé díry v rentgenové dvojhvězdě Cygnus X-1. Jedná se o první objevenou černou díru. Váží okolo 15 hmot Sluncí – stejně jako hvězda, spolu s níž obíhají okolo společného těžiště. *Kredit: NASA*



Obr. 2 Když se dvě černé díry k sobě přibližují, uvolňuje se energie ve formě gravitačních vln, které rozvlní okolní prostoročas. Tato porucha se pak rychlostí světla šíří do vesmírného okolí. Nejintenzivnější je pak těsně před samotným splnutím černých děr do sebe za vzniku větší černé díry. *Kredit: LIGO*

Vypařování černých děr, Hawkingovo záření

Ovšem s entropií by měla být spojena teplota – černá díra, resp. její horizont by tedy měly mít určitou teplotu. Ale co má nenulovou teplotu, mělo by zářit. Protože černá díra pohlcuje vše, co na ni dopadne, včetně světla, chová se jako absolutně černé těleso. Měla by tedy jako absolutně černé těleso také zářit. Ale jak může zářit, když vše pohlcuje?

Hawkingovo záření

Tento zdánlivý rozpor vyřešil v roce 1974 Steven Hawking. Ukázal, že díky kvantovým efektům v blízkosti horizontu černé díry opravdu září, a že záření má charakter záření černého tělesa.¹⁵⁴ Pro černé díry hvězdných hmotností je ovšem toto *Hawkingovo záření* zcela zanedbatelné – černá díra o hmotnosti Slunce vyzařuje záření s teplotou ani ne 10^{-7} K. Pro hmotnější černé díry je teplota ještě nižší, teplota záření je totiž nepřímo úměrná hmotnosti černé díry.¹⁵⁵ I pro černou díru, která by byla ve vesmíru docela osamocena, by tedy nad vyzařováním o mnoho řádů převládlo pohlcování reliktního záření.¹⁵⁶

Vypařování černých děr, Hawkingovo záření

II. věta termodynamiky použitelná k teorii černých děr

S. Hawking 1971: Plocha A horizontu událostí černé díry při libovolných klasických procesech se nemůže zmenšovat, tj. chová se jako entropie.

Předpokládáme, že entropie černé díry S je úměrná ploše povrchu horizontu

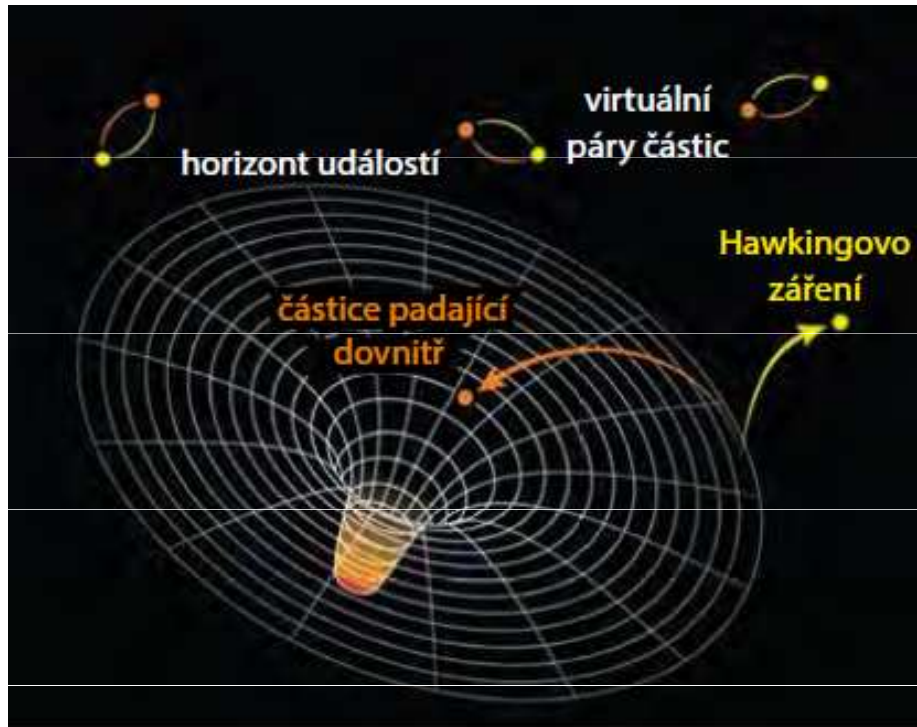
událostí $S \sim A$, (Bekenstein):
$$S = \frac{\pi k c^3}{2 h G} A$$

Fyzikální vakuum: stav, ve kterém chybí reálné částice, ale probíhají v něm neustálé procesy vzniku, interakce a zániku krátkodobých **virtuálních částic**

v okolí černých děr probíhá proces vzniku dvojic *částice – antičástice*, v souladu s principem neurčitosti Heisenberga energie částic E můžeme určit s přesností nepřevyšující $\hbar/\Delta t$, kde Δt je doba měření, platí $\Delta E \Delta t \geq \hbar$

v krátkém časovém okamžiku Δt vzniká dvojice *částice – antičástice*, za dobu Δt částice anihilují a mizí, v přítomnosti vnějšího pole virtuální částice stihne získat energii proto, aby se stala částicí reálnou, efekt kvantového vzniku částic z vakua

Vypařování černých děr, Hawkingovo záření



$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 kGM}$$

Obr. 6 Schematická představa, jak by mohlo vznikat Hawkingovo záření. Virtuální pár částice–antičástice se rozdělí na horizontu událostí. Zatímco jedna částice zůstane v černé díře, druhé se podaří uniknout.

Kredit. ESO

Evaporation takes this long –
10⁹ M_☉ black hole: 10⁹⁴ years.
2 M_☉ black hole: 10⁶⁷ years.
10⁸ gram black hole: 1 second (!)

Přehled vývoje hvězd

