

Seminář z matematiky II – jaro 2025 – 8. písemka

Přímo z definice spojitosti a vlastností suprem a infim na reálných číslech dokažte, že reálná funkce spojitá na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ nabývá na tomto intervalu v nějakém bodě nejmenší hodnoty.

Řešení:

Mějme spojitou funkci $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Uvažme množinu

$$M = \{ x \in \langle 0, 1 \rangle \mid \forall y \in \langle x, 1 \rangle: f(y) \geq f(x) \},$$

která je neprázdná, neboť obsahuje 1. Položme $a = \inf M \in \langle 0, 1 \rangle$.

Ukážeme sporem, že v bodě a nabývá f minima, tj.

$$\forall z \in \langle 0, 1 \rangle: f(z) \geq f(a).$$

Pokud tomu tak není, existuje $b \in \langle 0, 1 \rangle$ splňující $f(b) < f(a)$. Naším cílem je ukázat, že poslední bod, v němž hodnota funkce f nepřekročí $f(b)$, patří do množiny M , a proto leží napravo od a , což není v souladu s tím, že díky spojitosti funkce f patří a do M . Jelikož množina

$$N = \{ y \in \langle 0, 1 \rangle \mid f(y) \leq f(b) \}$$

je neprázdná, můžeme položit $c = \sup N \in \langle 0, 1 \rangle$.

Nejprve využijeme spojitosti funkce f v bodě c k ověření, že $f(c) \leq f(b)$. Postupujeme sporem. Předpokládáme, že $f(c) > f(b)$, a zvolíme $\varepsilon = f(c) - f(b)$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in (c - \delta, c): f(y) > f(c) - \varepsilon = f(b),$$

což je ve sporu s tím, že c je supremem množiny N .

Jelikož $c = \sup N$, tak pro všechna $y \in (c, 1)$ platí $f(y) > f(b) \geq f(c)$, což dokazuje, že c patří do množiny M . Jelikož $a = \inf M$, dostáváme tedy $a \leq c$. Navíc víme, že $f(c) \leq f(b) < f(a)$. Nyní ověříme, že existence takového bodu c je vyloučená díky spojitosti funkce f v bodě a . Zvolme $\varepsilon = f(a) - f(c)$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in \langle a, a + \delta \rangle: f(x) > f(a) - \varepsilon = f(c).$$

To mimo jiné znamená, že $c \geq a + \delta$. Proto všechny prvky $x \in \langle a, a + \delta \rangle$ splňují současně $x < c$ a $f(c) < f(x)$, takže nenáleží do M , což je ve sporu s tím, že a je infimem množiny M .