Geometrická pravděpodobnost

Geometrickou pravděpodobnost můžeme považovat za zobecnění klasické pravděpodobnosti pro případ, že prostor elementárních jevů je nespočetný.

1 **Definice** *Nechť Ω je borelovská množina v $\mathbb{R}^n$ s kladnou a konečnou Lebesgueovou mírou. $\mathcal{A}$ nechť je systém všech borelovských podmnožin množiny Ω a $\mu(A)$ nechť značí Lebesgueovu míru množiny A. Potom množinovou funkci P_G definovanou pro každé $A \in \mathcal{A}$ vztahem* $\boxed{P_G(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}}$ *budeme nazývat* ***geometrickou pravděpodobností****.*

2 **Poznámka** *Specifickou vlastností geometrické pravděpodobnosti je, že pravděpodobnost přiřazení jevu A je úměrná jeho n-rozměrnému objemu (pro n=2 jeho obsahu, pro n=1 jeho délce) a nezáleží na jeho „umístění“ v Ω (přesněji řečeno kongruentní jevy mají stejnou geometrickou pravděpodobnost).*

Geometrická pravděpodobnost je vhodným nástrojem na zkoumání a řešení řady úloh, na které nestačilo klasické pojetí pravděpodobnosti. Později však byla vystavena vážné kritice a byla ukázána nemožnost její obecné aplikace - viz. např. Bertrandův paradox.

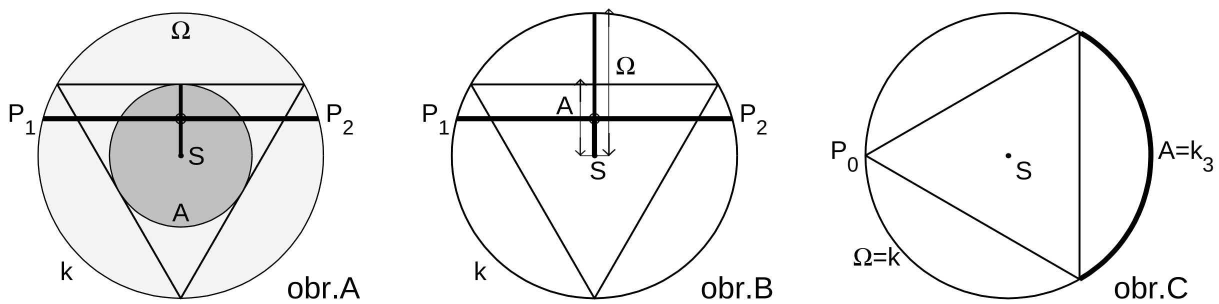
3 **Příklad (Bertrandův paradox)** *Jde o tento problém:* S jakou pravděpodobností bude délka náhodně vybrané tětivy v kružnici delší než délka strany vepsaného rovnostranného trojúhelníka? *(viz Alfréd Rényi: Teorie pravděpodobnosti, Academia Praha 1972, str. 62).*

Potíž úlohy spočívá v tom, že není jasné, co znamená předpoklad „**náhodné volby**“. Každé z následujících tří různých pojetí se zdá přirozené.

Pojetí 1 (pokud určíme tětivu jejím středem) Poloha tětivy je určena jednoznačně polohou jejího středu. Můžeme tedy provést náhodnou volbu tětivy tím způsobem, že volíme náhodně bod uvnitř kruhu. Pravděpodobnost, že tětiva bude delší než strana rovnostranného trojúhelníka vepsaného kružnici, rovná se pak pravděpodobnosti, že střed tětivy padne dovnitř kružnice vepsané tomuto trojúhelníku, tj. dovnitř soustředné kružnice, jejíž poloměr je polovinou poloměru základní kružnice (viz obr. A). Z předpokladu, že **střed tětivy má uvnitř kruhu rovnoměrné rozdělení**, plyne, že hledaná pravděpodobnost se rovná $\boxed{\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}}$.

Pojetí 2 (pokud nejprve určíme směr tětivy) Délka tětivy je jednoznačně určena vzdáleností jejího středu od středu kružnice. Z důvodů symetrie můžeme předpokládat, že **střed tětivy leží na daném poloměru kružnice** a že **střed tětivy má na tomto poloměru rovnoměrné rozdělení**. Tětiva bude delší než strana pravidelného trojúhelníka, když její střed nebude mít od středu kružnice větší vzdálenost než $\frac{r}{2}$. Hledaná pravděpodobnost se pak rovná $\boxed{\frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}}$ (viz obr. B).

Pojetí 3 (pokud nejprve určíme jeden z krajních bodů tětivy) Z důvodu symetrie můžeme předpokládat, že jeden koncový bod tětivy je pevný; označme jej P_0. Druhý zvolíme náhodně na kružnici. **Pravděpodobnost, že druhý koncový bod P bude ležet v daném oblouku kružnice nechť je úměrná délce tohoto oblouku**. Tětiva P_0P je zřejmě delší než strana rovnostranného trojúhelníka vepsaného kružnici, jestliže P padne do určitého oblouku (označme jej k_3), jehož délka se rovná třetině délky celé kružnice (viz obr. C). Hledaná pravděpodobnost se pak rovná $\boxed{\frac{1}{3}}$.



Příklad se zdál svého času paradoxní proto, že se nechápalo, že třem popsaným pojetím odpovídají tři různé způsoby náhodné volby tětivy. Tento paradox byl později objasněn podrobnějším rozborem, kdy se ukázalo, že každý ze tří postupů je vlastně řešením jiné úlohy a že tyto úlohy nejsou ekvivalentní.