

Diferenciální operátory ve válcových souřadnicích

Válcové (cylindrické) souřadnice (r, φ, z) :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}\tag{1}$$

Jednotkové vektory

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{\varphi}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}\tag{2}$$

f – skalární pole

$\vec{F} = F_r \vec{r}_0 + F_\varphi \vec{\varphi}_0 + F_z \vec{z}_0$ – vektorové pole

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}_0\tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\tag{4}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \vec{r}_0 + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{\varphi}_0 + \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} F_\varphi - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \vec{z}_0\tag{5}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\tag{6}$$

$$\Delta \vec{F} = \left(\Delta F_r - \frac{1}{r^2} F_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{r}_0 + \left(\Delta F_\varphi - \frac{1}{r^2} F_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \vec{\varphi}_0 + \Delta F_z \vec{z}_0\tag{7}$$

Besselovy funkce

Řešení diferenciální rovnice

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0\tag{8}$$

se hledá ve tvaru

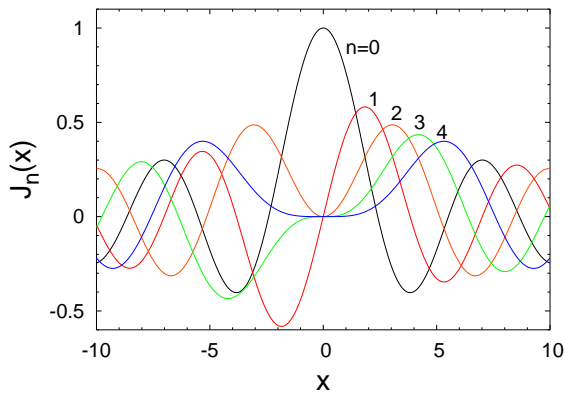
$$y(x) = x^\rho \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

což vede k rovnici

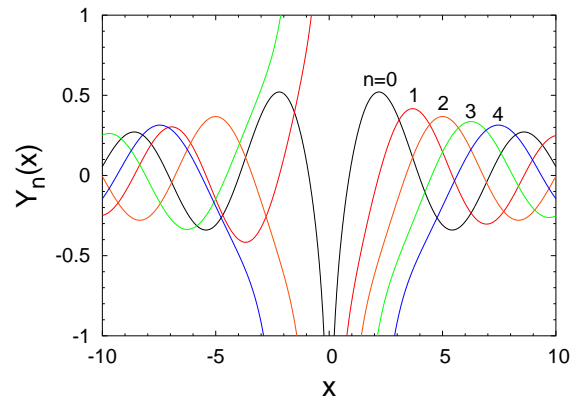
$$a_0(\rho^2 - n^2) + a_1[(\rho + 1)^2 - n^2] + \sum_{j=2}^{\infty} \{a_{j-2} + a_j[(\rho + j)^2 - n^2]\} = 0$$

a výsledkům

$$\begin{aligned}\rho &= \pm n \\a_1 &= 0 \\a_j &= -\frac{a_{j-2}}{j(j \pm 2n)}\end{aligned}$$



Obrázek 1: Besselovy funkce prvního druhu celočíselných řádů 0 až 4.



Obrázek 2: Besselovy funkce druhého druhu celočíselných řádů 0 až 4.

Řešením rovnice (8) jsou tedy tzv. Besselovy funkce 1. druhu řádu n (obr. 1):

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}}{j! \Gamma(n+j+1)} \quad (9)$$

s vlastnostmi

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{pro } n \in \mathbf{Z} \quad (10)$$

$$J'_n(x) = \pm \left(\frac{n}{x} J_n(x) - J_{n\pm 1}(x) \right) \quad (11)$$

Dalším řešením rovnice (8) jsou tzv. Besselovy funkce 2. druhu řádu n (obr. 2):

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (12)$$

Kombinací $J_n(x)$ a $Y_n(x)$ vznikají Besselovy funkce třetího druhu (Hankelovy funkce):

$$H_n^{(1)} = J_n(x) + iY_n(x) \quad (13)$$

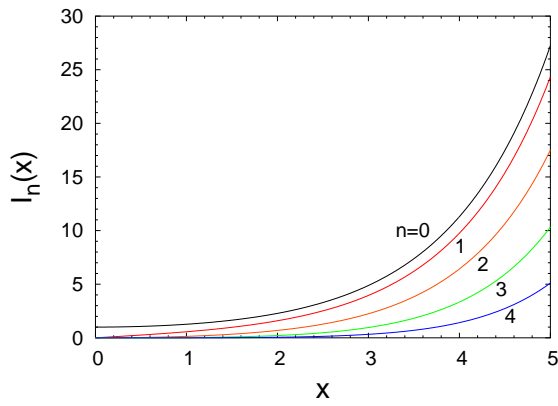
$$H_n^{(2)} = J_n(x) - iY_n(x) \quad (14)$$

Jejich význam spočívá v limitním chování pro komplexní argument z :

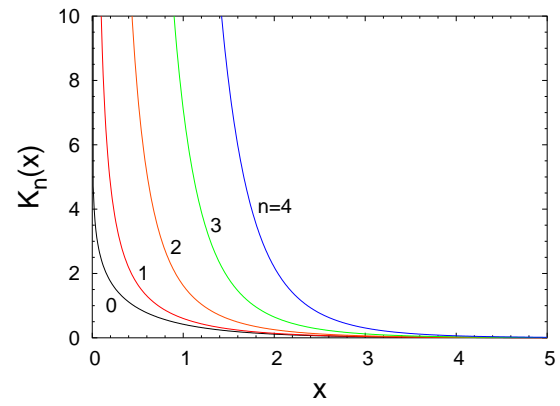
$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} H_n^{(1)}(z) = 0 \quad \text{pro } \text{Im}(z) > 0$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} H_n^{(2)}(z) = 0 \quad \text{pro } \text{Im}(z) < 0$$

Výrazy $i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$ a $i^{-(n+1)} H_n^{(2)}(-ix)$ jsou reálné pro reálná kladná x .



Obrázek 3: Modifikované Besselovy funkce prvního druhu celočíselných řádů 0 až 4.



Obrázek 4: Modifikované Besselovy funkce druhého druhu celočíselných řádů 0 až 4.

Modifikované Besselovy funkce

prvního druhu (I_n , obr. 3) a druhého druhu (K_n , obr. 4) jsou řešením diferenciální rovnice

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \quad (15)$$

Pro reálná $x > 0$ platí

$$I_n = i^{-n} J_n(ix) \quad (16)$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix) \quad (17)$$

Limitní chování I_n a K_n popisují vztahy

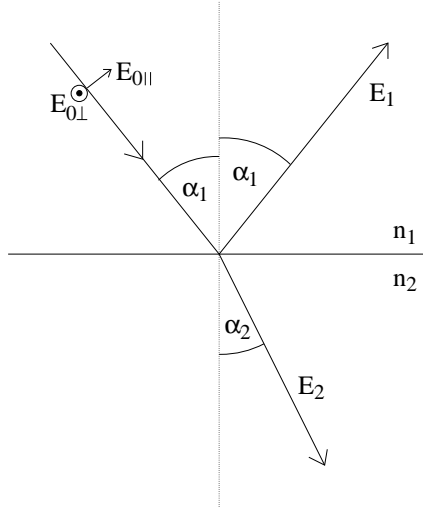
$$I_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$$

$$K_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

V optoelektronice mají význam rovnice

$$K_n'(x) = \pm \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n\pm 1}(x) \quad (18)$$

$$K_{-n}(x) = K_n(x) \quad (19)$$



Obrázek 5: Odraz a lom na rozhraní

Fresnelovy koeficienty odrazu a lomu

Pro amplitudy vlny dopadající z prostředí o indexu lomu n_1 na optické rozhraní (E_0) pod úhlem α_1 , vlny odražené (E_1) a lomené (E_2) pod úhlem α_2 (viz obr. 5) platí v případě vlny s vektorem elektrické intenzity polarizovaným

1. kolmo k rovině dopadu:

$$\left(\frac{E_1}{E_0}\right)_{\perp} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \quad (20)$$

$$\left(\frac{E_2}{E_0}\right)_{\perp} = \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \quad (21)$$

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (22)$$

2. v rovině dopadu:

$$\left(\frac{E_1}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (23)$$

$$\left(\frac{E_2}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (24)$$

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (25)$$

(R jsou koeficienty odrazivosti). Pro koeficienty propustnosti T platí $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$, $R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$.