LINEÁRNÍ ALGEBRA A GEOMETRIE III.

Doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.

Obsah

Úvod

Obsah skript je zřejmý z následujícího podrobného sylabu. Každá kapitola kromě teoretického výkladu obsahuje vyřešené příklady. Na jejím konci najde čtenář kontrolní otázky a úlohy k samostatnému procvičení.

Rád bych poděkoval Richardu Lastoveckému, který celý text přepsal v LaTeXu a opatřil úlohami k samostatnému řešení.

Přesto, že jsme během psaní mnoho chyb opravili, jistě ještě nějaké v textu zůstaly. Prosím čtenáře, aby mě o chybách a nedostatcích informovali na e-mailové adrese `cadek@math.muni.cz`.

Martin Čadek

Sylabus přednášky

1. Afinní a projektivní prostory: komplexifikace vektorového a afinního prostoru, projektivní prostor, projektivní rozšíření afinního prostoru, komplexifikace projektivního prostoru.

2. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru: definice nadkvadrik, nadkvadriky a bilineární formy, klasifikace nadkvadrik v projektivním prostoru, polárně sdružené body vzhledem k nadkvadrice, tečné nadroviny, střed nadkvadriky, asymptoty, afinní klasifikace kuželoseček a kvadrik.

3. Metrické vlastnosti kvadrik: hlavní směry, hlavní nadroviny, metrická klasifikace kuželoseček a kvadrik.

4. Multilineární algebra: faktorový prostor, duální prostor, duální báze, multilineární zobrazení, definice tenzorového součinu, univerzální vlastnost tenzorového součinu, tenzorový součin lineárních zobrazení, tenzorová algebra vektorového prostoru, kontrakce, souřadnice tenzorů při změně báze, tenzory ve fyzice, povýšení a snížení tenzoru, symetrické tenzory, vnější algebra tenzorového prostoru, vnější formy.

5. Polynomiální matice a kanonické tvary: polynomiální matice a jejich ekvivalence, kriterium podobnosti matic, kanonický tvar polynomiálních matic a jeho jednoznačnost, Jordanův kanonický tvar matice A a jeho vztak ke kanonickému tvaru matice $A - \lambda E$, algoritmus pro nalezení Jordanova kanonikcého tvaru, minimální polynom.

1. Afinní a projektivní prostory

1.1. Komplexifikace reálného vektorového prostoru. Nechť V je reálný vektorový prostor. Jeho *komplexním rozšířením* (*komplexifikací*) je komplexní vektorový prostor $V^{\mathbb{C}}$ určený množinou $V \times V$, na které je definováno sčítání a násobení komplexním číslem takto:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + (\mathbf{u}',\mathbf{v}') &= (\mathbf{u}+\mathbf{u}', \mathbf{v}+\mathbf{v}')\\ (a+ib)(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= (a\mathbf{u}-b\mathbf{v}, b\mathbf{u}+a\mathbf{v})\end{aligned}$$

Není těžké dokázat, že jde skutečně o vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ s nulovým prvkem $(0,0)$.

Reálné vektory $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ ztotožníme s prvky $(\mathbf{u},0) \in V^{\mathbb{C}}$. Tedy V lze považovat za podmnožinu, nikoli však podprostor prostoru $V^{\mathbb{C}}$. Platí

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u},0) + i(\mathbf{v},0) = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

Příklad. Ukážeme, že komplexní rozšíření vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ je izomorfní s $\mathbb{C}^n$.

Definujme $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ předpisem

$$\varphi\big((x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)\big) = (x_1+iy_1, x_2+iy_2, \dots, x_n+iy_n)$$

To je bijekce, která zachovává sčítání vektorů a násobení komplexním číslem.

Cvičení. Dokažte, že komplexní rozšíření prostoru polynomů s reálnými koeficienty $\mathbb{R}[x]$ je izomorfní s prostorem polynomů s komplexními koeficienty $\mathbb{C}[x]$.

Věta. *Každá báze $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n)$ prostoru V je bazí prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

Cvičení. Dokažte předchozí větu.

Je-li U podprostor V, pak $U^{\mathbb{C}}$ je podprostor $V^{\mathbb{C}}$. Podprostory prostoru $V^{\mathbb{C}}$ tvaru $U^{\mathbb{C}}$, kde U je podprostor V, se nazývají *reálné podprostory.*

Komplexně sdružený vektor k vektoru $\mathbf{u}+i\mathbf{v} \in V$ je vektor $\mathbf{u}-i\mathbf{v} \in V^{\mathbb{C}}$.

Je-li $W \subseteq V^{\mathbb{C}}$ podprostor, pak $\overline{W} = \{\overline{\mathbf{w}}; \mathbf{w} \in W\}$ je rovněž podprostor.

Věta. *Podprostor $W \subseteq V^{\mathbb{C}}$ je reálný právě tehdy, když $W = \overline{W}$.*

Důkaz. Je-li $W = U^{\mathbb{C}}$, pak $W = \{\mathbf{u}+i\mathbf{v}; \mathbf{u},\mathbf{v} \in U\}$ a $\overline{W} = \{\mathbf{u}-i\mathbf{v}; \mathbf{u},\mathbf{v} \in U\} = W$.

Nechť $W = \overline{W}$. Položme $\operatorname{Re}(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ pro $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$. Množina $U = \{\operatorname{Re}\mathbf{w} = (\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}})/2; \mathbf{w} \in W\}$ je uzavřená na sčítání a násobení reálným číslem. Dokážeme, že $U^{\mathbb{C}} = W$. Nechť $\mathbf{w} = \mathbf{u}+i\mathbf{v} \in W$, potom $\operatorname{Re}\mathbf{w} = \mathbf{u} \in U$, $\operatorname{Re}(-i\mathbf{w}) = \mathbf{v} \in U$, tedy $\mathbf{u}+i\mathbf{v} \in U^{\mathbb{C}}$ a $W \subseteq U^{\mathbb{C}}$. Současně $U \subseteq W$, tedy $U^{\mathbb{C}} \subseteq W$. □

Definice. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory. *Komplexní rozšíření* $\varphi^{\mathbb{C}} : U^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ je zobrazení definované předpisem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + i\varphi(\mathbf{v}).$$

Toto zobrazení je opět lineární.

Věta. *Je-li matice lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$ v bazích α a β rovna reálné matici A, pak $\varphi^{\mathbb{C}} : U^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ má v bazích α a β opět matici zobrazení A.*

Důkaz. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$. Matice $A = (a_{ij})$ je definována takto:

$$\varphi(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}\mathbf{v}_j$$

Pro $\varphi^{\mathbb{C}}$ platí

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_i) = \varphi(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^{l} a_{ji}\mathbf{v}_j$$

Tedy $(\varphi^{\mathbb{C}})_{\beta,\alpha} = A$. □

1.2. Afinní prostor a jeho komplexifikace. Připomeneme, že afinní prostor $\mathcal{A}$ se zaměřením V je množina $\mathcal{A}$ společně s vektorovým prostorem V a s operací $\overrightarrow{}$: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$, která má tyto dvě vlastnosti:

(1) pro každé $A \in \mathcal{A}$ a $\mathbf{v} \in V$ existuje právě jedno $B \in \mathcal{A}$ tak, že $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$. Píšeme $B = A + \mathbf{v}$.
(2) pro všechna $A, B, C \in \mathcal{A}$ je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Báze afinního prostoru $\mathcal{A}$ je dána bodem $O \in \mathcal{A}$ a bazí ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ …, $\mathbf{u}_n$) vektorového prostoru V. Souřadnice bodu X v této bázi je n-tice skalárů (x_1, x_2, …, x_n) taková, že

$$X = O + x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor, jehož zaměření V je reálný vektorový prostor. *Komplexním rozšířením* (*komplexifikací*) afinního prostoru $\mathcal{A}$ je množina $\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \mathcal{A} \times V$ s operací

$$\overrightarrow{}^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$$

definovanou předpisem

$$\overrightarrow{(A, \mathbf{u})(B, \mathbf{v})}^{\mathbb{C}} = \overrightarrow{AB} + i(\mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

Ověříme, že takto definovaná operace má vlastnosti (1) a (2) z definice afinního prostoru.
(1) Nechť $(A, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ a $\mathbf{z} + i\mathbf{w} \in V^{\mathbb{C}}$. Potom existuje právě jedno $B \in \mathcal{A}$ tak, že $\overrightarrow{AB} = \mathbf{z}$ a právě jedno $\mathbf{v} \in V$ tak, že $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{w}$. Tedy

$$\overrightarrow{(A, \mathbf{u})(B, \mathbf{v})}^{\mathbb{C}} = \mathbf{z} + i\mathbf{w}.$$

(2) Platí

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{(A, \mathbf{u})(B, \mathbf{v})}^{\mathbb{C}} + \overrightarrow{(B, \mathbf{v})(C, \mathbf{z})}^{\mathbb{C}} &= \overrightarrow{AB} + i(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \overrightarrow{BC} + i(\mathbf{z} - \mathbf{v}) \\
&= \overrightarrow{AC} + i(\mathbf{z} - \mathbf{u}) = \overrightarrow{(A, \mathbf{u})(C, \mathbf{z})}^{\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

Bod $A \in \mathcal{A}$ ztotožníme s bodem $(A, 0) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. Pro každý bod $(A, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ pak platí

$$\overrightarrow{(A, 0)(A, \mathbf{v})}^{\mathbb{C}} = \overrightarrow{AA} + i\mathbf{v} = i\mathbf{v}.$$

Tedy

$$(A, \mathbf{v}) = A + i\mathbf{v}.$$

Definice. Komplexně sdružený bod k bodu $A + i\mathbf{v}$ je bod

$$\overline{A + i\mathbf{v}} = A - i\mathbf{v}, \qquad A \in \mathcal{A}, \mathbf{v} \in V.$$

Stejně jako pro vektorové prostory můžeme dokázat

A. Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ afinní podprostor, je $\mathcal{B}^{\mathbb{C}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ afinní podprostor. $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ se nazývá *reálný afinní podprostor.*

B. Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ afinní podprostor, je $\overline{\mathcal{B}} = \{A - i\mathbf{v}; A + i\mathbf{v} \in \mathcal{B}\}$ rovněž afinní podprostor.

C. $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ je reálný afinní podprostor v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ právě tehdy, když $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$.

Příklad. Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ afinní podprostor s parametrickým popisem

$$\{B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k\},$$

pak $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ s parametrickým popisem

$$\{B + (t_1 + i\tau_1)\mathbf{u}_1 + (t_2 + i\tau_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (t_k + i\tau_k)\mathbf{u}_k\}.$$

Cvičení. Je-li $\mathcal{B}$ afinní podprostor v $\mathbb{R}^n$ daný soustavou rovnic s reálnými koeficienty

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

pak $\mathcal{B}^{\mathbb{C}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n; A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$. Dokažte.

Připomeneme, že zobrazení $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mezi afinními prostory se nazývá afinní, jestliže existuje lineární zobrazení $\overline{\varphi} : U \to V$ tak, že $\varphi(A + \mathbf{u}) = \varphi(A) + \overline{\varphi}(\mathbf{u})$ pro všechny body $A \in \mathcal{A}$ a všechny vektory $\mathbf{u} \in U$. $\overline{\varphi}$ se nazývá indukované lineární zobrazení.

Definice. Nechť $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afinní zobrazení mezi reálnými afinními prostory. Jeho *komplexní rozšíření* $\varphi^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ je definováno předpisem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(A + i\mathbf{u}) = \varphi(A) + i\overline{\varphi}(\mathbf{u}),$$

kde $\overline{\varphi}$ je indukované lineární zobrazení.

Zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ je opět afinní s indukovaným lineárním zobrazením $\overline{\varphi^{\mathbb{C}}} = \overline{\varphi}^{\mathbb{C}}$, neboť

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathbb{C}}(A + \mathbf{v} + i\mathbf{u}) &= \varphi(A + \mathbf{v}) + i\overline{\varphi}(\mathbf{u}) \\
&= \varphi(A) + \overline{\varphi}(\mathbf{v}) + i\overline{\varphi}(\mathbf{u}) \\
&= \varphi(A) + \overline{\varphi}^{\mathbb{C}}(\mathbf{v} + i\mathbf{u})
\end{aligned}$$

1.3. Projektivní prostor. Nechť W_{n+1} je $(n + 1)$-rozměrný vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ (obvykle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$).

Definice. Množinu $\mathcal{P}_n$ všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru W_{n+1} nazveme *n-rozměrným projektivním prostorem* nad $\mathbb{K}$. Vektorový prostor W_{n+1} se nazývá *aritmetickým základem* projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$.

Prvky projektivního prostoru se nazývají *body.* Každý vektor $\mathbf{x} \in W_{n+1} - \{0\}$ určuje jednorozměrný podprostor $X = [\mathbf{x}] = \{a\mathbf{x} \in W_{n+1}; a \in \mathbb{K}\} \in \mathcal{P}_n$ a nazývá se *aritmetickým základem* bodu X.

Jedna z možných názorných představ o projektivním prostoru s aritmetickým základem $\mathbb{R}^{n+1}$ je tato: Každá přímka v $\mathbb{R}^{n+1}$ protne sféru $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ právě ve dvou bodech. Tedy $\mathcal{P}_n$ je S^n, kde ztotožníme protilehlé body.

1.4. Báze a homogenní souřadnice. Body $A_1 = [\mathbf{u}_1]$, $A_2 = [\mathbf{u}_2]$, …, $A_k = [\mathbf{u}_k]$ v $\mathcal{P}_n$ se nazývají lineárně nezávislé, jestliže jsou lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$.

Aritmetickou bazí prostoru $\mathcal{P}_n$ rozumíme libovolnou bázi ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$) jeho aritmetického základu W_{n+1}. *Geometrickou bazí* prostoru $\mathcal{P}_n$ rozumíme uspořádanou $(n+2)$-tici bodů $(O_1, O_2, \dots, O_{n+1}, E)$ takových, že libovolných $n+1$ z nich je lineárně nezávislých. Body O_1, O_2, …, O_{n+1} nazýváme *základní body*, bod E *jednotkový bod.*

Věta. *Je-li* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1})$ *aritmetická báze prostoru* $\mathcal{P}_n$, *pak* $([\mathbf{u}_1], [\mathbf{u}_2], \dots, [\mathbf{u}_{n+1}], [\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{n+1}])$ *je geometrická báze.*

Opačně, je-li $(O_1, O_2, \dots, O_{n+1}, E)$ *geometrická báze, pak existuje aritmetická báze* ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$) *taková, že* $O_1 = [\mathbf{u}_1]$, $O_2 = [\mathbf{u}_2]$, …, $O_{n+1} = [\mathbf{u}_{n+1}]$, $E = [\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{n+1}]$. *Je-li* ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_{n+1}$) *jiná aritmetická báze s touto vlastností, pak existuje* $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ *tak, že* $\mathbf{v}_i = \alpha \mathbf{u}_i$ *pro všechna* i.

Důkaz prvé části. Je potřeba dokázat, že libovolných $n+1$ vektorů z $(n+2)$-tice $\mathbf{u}_1$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{n+1}$ je lineárně nezávislých. Ukažme to pro $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{n+1}$. Nechť

$$\sum_{i=2}^{n+1} a_i \mathbf{u}_i + a_{n+2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{n+1}) = 0$$

Tedy

$$a_{n+2}\mathbf{u}_1 + \sum_{i=2}^{n+1}(a_i + a_{n+2})\mathbf{u}_i = 0$$

Protože $\mathbf{u}_1$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$ jsou linerárně nezávislé, je

$$a_{n+2} = 0, \qquad a_i + a_{n+2} = 0 \text{ pro } i = 2, 3, \dots, n+1$$

Odtud $a_i = 0$ pro $i = 2, 3, \dots, n+2$.
Důkaz druhé části. Zvolme $\mathbf{w}_i \in W_{n+1} - \{0\}$, $i = 1, 2, \dots, n+2$ tak, aby $O_i = [\mathbf{w}_i]$, $E = [\mathbf{w}_{n+2}]$. Protože $\mathbf{w}_1$,…,$\mathbf{w}_{n+1}$ tvoří bázi W_{n+1}, existují jednoznačně určené skaláry a_1, a_2, …, $a_{n+1} \in \mathbb{K}$ tak, že

$$a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{n+1}\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_{n+2}.$$

Kdyby nějaké $a_i = 0$, dostali bychom lineární závislost $n+1$ vektorů. Nyní stačí položit

$$\mathbf{u}_i = a_i\mathbf{w}_i, \qquad \mathbf{u}_{n+2} = \mathbf{w}_{n+2}.$$

Potom ($\mathbf{u}_1$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$), je aritmetická báze, $O_i = [\mathbf{u}_i]$, $E = [\mathbf{u}_{n+2}]$ a bude platit

$$\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+2}.$$

Nechť ($\mathbf{v}_1$, …, $\mathbf{v}_{n+1}$) je jiná aritmetická báze taková, že $O_1 = [\mathbf{v}_1]$, …, $O_{n+1} = [\mathbf{v}_{n+1}]$, $E = [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_{n+1}]$.

Potom $\mathbf{v}_{n+2} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_{n+2} = \alpha\mathbf{u}_{n+2}$.

Protože rovnice

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} = \alpha\mathbf{u}_{n+2}$$

má jediné řešení, a tím je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = \alpha$, $\mathbf{v}_i = \alpha\mathbf{u}_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n+1$. □

Definice. Nechť $(O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}, E)$ je nějaká geometrická báze v $\mathcal{P}_n$ s aritmetickými zástupci $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\cdots+\mathbf{u}_{n+1}$. Nechť $X \in \mathcal{P}_n$ a nechť $\mathbf{u}$ je nějaký jeho aritmetický zástupce. Potom souřadnice $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ vektoru $\mathbf{u}$ v bázi ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_{n+1}\mathbf{u}_{n+1}$$

se nazývají *homogenní souřadnice* bodu X. Vezmeme-li za aritmetického zástupce bodu X vektor $\alpha\mathbf{u}$, $\alpha \neq 0$, jsou jeho souřadnice v bázi ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_{n+1}$) rovny $(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_{n+1})$. Tedy dva body X, $Y \in \mathcal{P}_n$ jsou totožné právě tehdy, když jejich souřadnice splňují

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_{n+1}) \qquad \text{pro nějaké } \alpha \neq 0.$$

1.5. Projektivní podprostory. Jednorozměrné podprostory v $(k+1)$-rozměrném podprostoru $W \subseteq W_{n+1}$ tvoří *k-rozměrný projektivní podprostor* $\mathcal{P}$ v projektivním prostoru $\mathcal{P}_n$. Jednorozměrný projektivní podprostor v $\mathcal{P}_n$ se nazývá *přímka*.

Příklad. Každé dvě přímky p, q v $\mathcal{P}_2$ mají společný bod. V aritmetickém základu W_3 přímkám p a q odpovídají dva podprostory U a V dimenze 2. Protože

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U + V)$$

a $\dim(U+V) \leq 3$, je $\dim U \cap V \geq 1$.

Tedy $p \cap q$ obsahuje alespoň jeden bod projektivního prostoru $\mathcal{P}_2$.

Nechť $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_n$ je k-rozměrný projektivní podprostor, kterému odpovídá $(k+1)$-rozměrný podprostor $W \subseteq W_{n+1}$ popsaný v souřadnicích báze ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …,$\mathbf{u}_{n+1}$) homogenní soustavou rovnic

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n+1} & = & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-k,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n-k,n+1} & = & 0
\end{array}$$

Stejná soustava rovnic pak popisuje homogenní souřadnice bodů projektivního prostoru $\mathcal{P}$.

1.6. Kolineace. Nechť $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{P}'_n$ jsou dva projektivní prostory dimenze n. Zobrazení $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}'_n$ se nazývá *kolineace*, jestliže existuje lineární izomorfismus $\overline{\varphi} : W_{n+1} \to W'_{n+1}$ tak, že

$$\varphi([\mathbf{u}]) = [\varphi(\mathbf{u})]$$

pro všechna $\mathbf{u} \in W_{n+1}$. Kolineace $\mathcal{P}_n$ do $\mathcal{P}_n$ tvoří grupu, kterou budeme značit $PGL(\mathcal{P}_n)$.

Věta. *Pro každou dvojici geometrických bazí $(O_1, \ldots, O_{n+1}, E)$ v $\mathcal{P}_n$ a $(O'_1, \ldots, O'_{n+1}, E')$ v $\mathcal{P}'_n$ existuje právě jedna kolineace $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}'_n$ taková, že*

$$\varphi(O_i) = O'_i, \qquad \varphi(E) = E'$$

pro všechna $i = 1, \ldots, n+1$.

Důkaz. Nechť $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1})$ a $(\mathbf{u}_1{}', \dots, \mathbf{u}_{n+1}{}')$ jsou báze aritmetických základů W_{n+1} a W'_{n+1} prostorů $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{P}'_n$ takové, že

$$O_i = [\mathbf{u}_i], \quad E = [\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{n+1}], \quad O'_i = [\mathbf{u}'_i], \quad E' = [\mathbf{u}'_1 + \dots + \mathbf{u}'_{n+1}]$$

Pak existuje právě jeden izomorfismus $\psi : W_{n+1} \to W'_{n+1}$ takový, že $\psi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}'_i$. Platí

$$\psi(\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{u}'_1 + \dots + \mathbf{u}'_{n+1}.$$

Ten určuje kolineaci $\varphi : P_n \to \mathcal{P}'_n$ s požadovanými vlastnostmi.

Nechť $\overline{\psi} : W_{n+1} \to W'_{n+1}$ je jiný izomorfismus takový, že

$$\overline{\psi}(\mathbf{u}_i) = \alpha_i \mathbf{u}'_i, \qquad \overline{\psi}(\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{n+1}) = \alpha(\mathbf{u}'_1 + \dots + \mathbf{u}'_{n+1}).$$

Potom

$$\alpha_1 \mathbf{u}'_1 + \alpha_2 \mathbf{u}'_2 \dots + \alpha_{n+1} \mathbf{u}'_{n+1} = \alpha \mathbf{u}_1{}' + \alpha \mathbf{u}'_2 + \dots + \alpha \mathbf{u}'_{n+1},$$

odtud plyne $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1}$, neboť $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$, $\dots$, $\mathbf{u}'_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé. □

1.7. Afinní prostor jako podmnožina projektivního prostoru. Nechť $\mathcal{P}_n$ je n-rozměrný projektivní prostor s aritmetickým základem W_{n+1}. Nechť $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}_n$ je projektivní nadrovina s aritmetickým základem $V_n \subseteq W_{n+1}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n - \mathcal{N}$ je afinní prostor se zaměřením V_n.

Nechť $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je báze prostoru V_n. Vektorem $\mathbf{e}_{n+1}$ ji doplňme na bázi prostoru V_{n+1}. Nadrovina $\mathcal{N}$ je v homogenních souřadnicích popsána rovnicí $x_{n+1} = 0$. Pro homogenní souřadnice bodů $X \in \mathcal{A}_n$ tedy platí $x_{n+1} \neq 0$. Speciálně, bod $O = [\mathbf{e}_{n+1}] \in \mathcal{A}_n$. Definujme *nehomogenní souřadnice* bodu $X \in \mathcal{A}_n$ jako $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$, kde $\overline{x}_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$. Tato volba souřadnic odpovídá parametricky tomu, že každou přímku p ve $W_{n+1} - V_n$ procházející počátkem (tedy bod $\mathcal{P}_n - \mathcal{N}$) reprezentujeme bodem $X \in p$ o homogenních souřadnicích $(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$. $\mathcal{A}_n$ si lze tedy představovat jako nadrovinu určenou rovnicí $x_{n+1} = 1$.

Operaci $\overrightarrow{} : \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n \to V_n$ definujeme v nehomogenních souřadnicích takto:

$$\overrightarrow{XY} = (\overline{y}_1 - \overline{x}_1)\mathbf{e}_1 + (\overline{y}_2 - \overline{x}_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\overline{y}_n - \overline{x}_n)\mathbf{e}_n.$$

Věta. *Trojice* $(A_n, V_n, \overrightarrow{})$ *je afinní prostor.*

Důkaz. Nechť bod $X \in \mathcal{A}_n$ má souřadnice $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ a vektor $\mathbf{v} \in V_n$ má souřadnice $(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Pak existuje právě jeden bod Y o nehomogenních souřadnicích $(\overline{x}_1 + z_1, \overline{x}_2 + z_2, \dots, \overline{x}_n + z_n)$ takový, že $\overrightarrow{XY} = \mathbf{v}$.

Není těžké se přesvědčit, že i druhá vlastnost z definice afinního prostoru

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$

je splněna. □

1.8. Projektivní rozšíření afinního prostoru. Nechť $\mathcal{A}_n$ je n-rozměrný afinní prostor se zaměřením $Z(\mathcal{A}_n)$. Projektivní $(n-1)$-rozměrný prostor $\nu(\mathcal{A}_n)$ sestrojený na aritmetickém základu $Z(\mathcal{A}_n)$ se nazývá *nevlastní podprostor afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$.

Nechť W_{n+1} je $(n+1)$-rozměrný vektorový prostor obsahující $Z(\mathcal{A}_n)$ jako svůj podprostor. $\mathcal{A}_n$ pak můžeme ztotožnit s nadrovinou ve W_{n+1} rovnoběžnou, nikoli však totožnou, se $Z(\mathcal{A}_n)$. Sjednocení

$$\overline{\mathcal{A}_n} = \mathcal{A}_n \cup \nu(\mathcal{A}_n)$$

je potom totožné s n-rozměrným projektivním prostorem na aritmetickém základu W_{n+1}. Tento prostor nazýváme *projektivním rozšířením afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$.

Zvolíme-li v $\mathcal{A}_n$ souřadnou soustavu $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots, \mathbf{e}_n)$ a označíme-li $\mathbf{e}_{n+1} \in W_{n+1}$ vektor určený bodem O, pak homogenní souřadnice bodu $X = O + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathcal{A}_n$ v souřadné soustavě $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+1})$ jsou $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$, $\alpha \neq 0$ a homogenní souřadnice bodů z $\nu(\mathcal{A}_n)$ jsou $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$, $\alpha \neq 0$.

1.9. Komplexní rozšíření projektivního prostoru. Nechť $\mathcal{P}_n$ je n-rozměrný projektivní prostor s aritmetickým základem reálným vektorovým prostorem W_{n+1}. *Komplexifikací projektivního prostoru* $\mathcal{P}_n$ je prostor $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ s aritmetickým základem $W_{n+1}^{\mathbb{C}}$. Komplexně sdružený bod v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ k bodu $X = [\mathbf{u} + i\mathbf{v}]$ je bod $\overline{X} = [\mathbf{u} - i\mathbf{v}]$.

Věta. *Platí* $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}} = (\overline{\mathcal{A}_n})^{\mathbb{C}}$.

Důkaz. Uvažujme afinní bázi $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathcal{A}_n \subseteq W_{n+1}$. Buď $\mathbf{e}_{n+1} \in W_{n+1}$ vektor určený bodem O. Potom

$$\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \subseteq W_{n+1}^{\mathbb{C}}$$

a $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ je projektivní prostor sestrojený na $W_{n+1}^{\mathbb{C}}$. $\overline{\mathcal{A}_n}$ je projektivní prostor sestrojený na W_{n+1}. Tedy $(\overline{\mathcal{A}_n})^{\mathbb{C}}$ je projektivní prostor sestrojený na $W_{n+1}^{\mathbb{C}}$.

Odtud $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}} = (\overline{\mathcal{A}_n})^{\mathbb{C}}$. □

Kontrolní otázky.

(1) Nechť V je reálný vektorový prostor. Definujte jeho komplexifikaci $V^{\mathbb{C}}$. Ukažte na příkladu $V = \mathbb{R}_2[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 2. Co je $V^{\mathbb{C}}$ v tomto případě?

(2) Vyslovte definici afinního prostoru a afinního zobrazení. Demonstrujte na několika příkladech.

(3) Co jsou body projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$? Co jsou přímky v $\mathcal{P}_n$? Mají každé dvě projektivní přímky v $\mathcal{P}_3$ neprázdný průnik?

(4) Vysvětlete projektivní rozšíření afinní roviny $\mathcal{A}_2$ na projektivní prostor $\mathcal{P}_2$. Představujte si $\mathcal{A}_2$ jako rovinu v $\mathbb{R}^3$ zadanou v souřadnicích rovnicí $x_3 = 1$. Co jsou v tomto případě nevlastní body?

Příklady k procvičení.

(1) Ke komplexnímu vektorovému prostoru V lze definovat konjugovaný prostor $\overline{V}$ takto: množinově $\overline{V} = V$, sčítání vektorů je stejné jako ve V a násobení skalárem $\cdot_{\overline{V}}$ definujeme předpisem

$$(a + ib) \cdot_{\overline{V}} \mathbf{u} = (a - ib) \cdot \mathbf{u}.$$

Dokažte, že $\overline{V}$ je komplexní vektorový prostor.

(2) Ke komplexnímu vektorovému prostoru V lze definovat jeho *realifikaci* $V^{\mathbb{R}}$ takto: množinově $V^{\mathbb{R}} = V$, sčítání vektorů je stejné jako ve V a násobení reálným číslem je stejné.

Nechť $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze V. Najděte nějakou bázi $V^{\mathbb{R}}$.
[Řešení: Např. $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, i\mathbf{u}_1, \dots, i\mathbf{u}_n)$.]

(3) Dokažte, že pro reálný vektorový prostor V platí
$$(V^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} \simeq V \oplus V.$$

(4) Dokažte, že pro komplexní vektorový prostor V platí
$$(V^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}.$$

(5) Nechť $f : V \to U$ je lineární zobrazení mezi komplexními vektorovými prostory. Zobrazením f je indukováno zobrazení
$$f^{\mathbb{R}} : V^{\mathbb{R}} \to U^{\mathbb{R}}.$$
Dokažte, že $f^{\mathbb{R}}$ je lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory.

(6) Jsou-li v prostorech V a U z předchozího příkladu zvoleny báze $\alpha = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a $\beta = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, můžeme najít matice A a B takové, že matice zobrazení $(f)_{\beta\alpha} = A + iB$.

Zvolme v prostoru $V^{\mathbb{R}}$ bázi $\alpha^{\mathbb{R}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_1, \dots, i\mathbf{v}_n)$ a v prostoru $U^{\mathbb{R}}$ bázi $\beta^{\mathbb{R}} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, i\mathbf{u}_1, \dots, i\mathbf{u}_m)$. Dokažte, že matice zobrazení $f^{\mathbb{R}}$ v těchto bazích je
$$(f^{\mathbb{R}})_{\beta^{\mathbb{R}}\alpha^{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$
Uvědomte si, jaké jsou rozměry jednotlivých matic!

(7) Lze definovat na jednotkové kružnici v $\mathbb{R}^2$ operaci $\overrightarrow{}$ tak, že bude splňovat axiomy afinního prostoru?

(8) Lze definovat realifikaci $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}$ komplexního afinního prostoru $\mathcal{A}$ podobně jako pro komplexní vektorový prostor v příkladě (2)? Jakým způsobem? Lze definovat konjugovaný afinní prostor k prostoru $\mathcal{A}$?

(9) V prostoru $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ udejte příklady přímky p takové, že přímky p a $\overline{p}$ jsou rovnoběžné, různoběžné, mimoběžné.

(10) Nechť $(O_1, \dots, O_{n+1}, E)$ je geometrická báze projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$. Popište, jak se změní homogenní souřadnice bodu $X = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ při přechodu ke geometrické bázi $(O'_1, \dots, O'_{n+1}, E')$.

(11) V části 1.7 se definuje operace $\overrightarrow{}$ pomocí souřadnic pevně zvolené báze zaměření afinního prostoru. Dokažte, že definice této operace na zvolené bázi nezávisí.

2. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru

2.1. Definice nadkvadriky v reálném afinním prostoru. Uvažujme reálný afinní prostor $\mathcal{A}_n$. Nechť $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je nějaká jeho báze. *Nadkvadrikou* v $\mathcal{A}_n$ rozumíme množinu $Q \subseteq \mathcal{A}_n$ všech bodů, jejichž souřadnice v dané bázi splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}x_i + a_{n+1,n+1} = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a aspoň jedno $a_{ij} \neq 0$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Nadkvadriky v $\mathcal{A}_2$ se nazývají *kuželosečky*, nadkvadriky v $\mathcal{A}_3$ *kvadriky*.

Mnohé rovnice výše uvedeného typu (např. $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$) nemají v reálném oboru řešení. Proto je výhodné místo s nadkvadrikami v $\mathcal{A}_n$ pracovat s nadkvadrikami v komplexním rozšíření $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$.

2.2. Definice nakvadriky v komplexním rozšíření afinního prostoru. Uvažujme komplexní rozšíření $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ reálného afinního prostoru. Nechť $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je nějaká jeho báze. *Nadkvadrikou* v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ rozumíme množinu $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ všech bodů, jejichž souřadnice v dané bázi splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}x_i + a_{n+1,n+1} = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a aspoň jedno $a_{ij} \neq 0$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Pro nadkvadriky v afinním prostoru chceme definovat takové pojmy jako střed, tečná nadrovina, asymptotická nadrovina, a to nejlépe v řeči koeficientů a_{ij}, aby nalezení těchto objektů bylo početně co nejjednodušší. To se nám podaří celkem snadno, když od afinního prostoru přejdeme k jeho projektivnímu rozšíření a od kvadriky $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ k jejímu rozšíření $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$.

Je-li $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ báze v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$, pak geometrická báze v $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ je zadána body $[\mathbf{e}_1]$, $[\mathbf{e}_2]$, $\ldots$, $[\mathbf{e}_n]$, $[\mathbf{e}_{n+1} = \overrightarrow{PO}]$, $[\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_{n+1}]$. V této bázi mají body $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ homogenní souřadnice $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$. Tedy homogenní souřadnice bodů nadkvadriky $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}x_ix_{n+1} + a_{n+1,n+1}x_{n+1}^2 = 0.$$

Množinu všech bodů $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$, jejichž homogenní souřadnice splňují výše uvedenou rovnici, nazveme *projektivním rozšířením nadkvadriky* Q a budeme ji označovat $\overline{Q}$. Množina $\overline{Q}$ může obsahovat i nevlastní body z $\nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$ o souřadnicích $(x_1, \ldots, x_n, 0)$.

Položíme-li $a_{n+1,i} = a_{i,n+1}$ a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$, je A symetrická nenulová matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Výše uvedenou rovnici můžeme psát ve tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = 0.$$

Symetrická matice A definuje reálnou bilineární formu f na aritmetickém základu projektivního prostoru $\overline{\mathcal{A}_n}$ předpisem

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_i y_j = \mathbf{x}^\top A\mathbf{y}.$$

2.3. Definice nadkvadriky v projektivním prostoru. Nechť $\mathcal{P}_n$ je reálný projektivní prostor s aritmetickým základem W_{n+1}. Nechť f je reálná nenulová symetrická bilineární forma na W_{n+1}. Nadkvadrika Q v projektivním prostoru $\mathcal{P}_n$ je množina bodů $[\mathbf{x}]$ v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$, pro které

$$f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0.$$

V souřadnicovém vyjádření v nějaké bázi $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ jde o řešení rovnice

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_i x_j = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a $a_{ij} \neq 0$ pro nějaké i,j.

Lemma. *Nadkvadrika Q^p v $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ je rozšířením nějaké kvadriky $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ právě tehdy, když existuje nějaký nevlastní bod $X \in \nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$, který v Q^p neleží.*

Důkaz. Nechť $Q^p = \overline{Q}$, potom matice $A = (a_{ij})$, pomocí které je definováno Q, má $a_{ij} \neq 0$ pro nějaké $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$. Tedy bod X o souřadnicích $x_i = x_j = 1$ a $x_k = 0$ pro ostatní k neleží v Q^p. Nechť $X \notin Q^p$. Potom pro jeho homogenní souřadnice $(x_1,\dots,x_n,0)$ a koeficienty matice A, pomocí které je Q definováno, platí

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \neq 0.$$

Tedy nutně $a_{ij} \neq 0$ pro nějaké $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$. □

2.4. Vzájemná korespondence mezi nadkvadrikami a symetrickými bilineárními formami. Nechť $\mathcal{K}_n$ je množina všech nadkvadrik v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$, nechť $\mathcal{B}_n$ je množina všech nenulových symetrických bilineárních forem na aritmetickém základě W_{n+1}. V $\mathcal{B}_n$ budeme psát $f \sim g$ právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ tak, že $g = k \cdot f$.

Zobrazení $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathcal{K}_n$, definované předpisem $\varphi(f) = \{[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}; f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0\}$, indukuje zobrazení $\widetilde{\varphi} : (\mathcal{B}_n/\sim) \to \mathcal{K}_n$.

Věta. *Zobrazení $\widetilde{\varphi} : (\mathcal{B}_n/\sim) \to \mathcal{K}_n$ je bijekce. Speciálně nadkvadriky v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ tvoří projektivní prostor dimenze $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$.*

Důkaz. Z definice existuje ke každé nadkvadrice příslušná bilineární symetrická forma, tedy $\widetilde{\varphi}$ je surjektivní zobrazení. Chceme dokázat, že je také injektivní, to znamená, že zadávají-li dvě bilineární symetrické formy f a g tutéž kvadriku, pak $g = k \cdot f$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$.

Vezměme $\mathbf{u} \in W_{n+1}$ takové, že $f(\mathbf{u},\mathbf{u}) \neq 0$. Protože f a g zadávají tutéž kvadriku, je také $g(\mathbf{u},\mathbf{u}) \neq 0$. Můžeme proto psát $g(\mathbf{u},\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u},\mathbf{u})$ pro nějaké $0 \neq k \in \mathbb{R}$. Vezměme nyní libovolné $\mathbf{v} \in W_{n+1}^{\mathbb{C}}$. Potom výrazy

$$f(t\mathbf{u}+\mathbf{v}, t\mathbf{u}+\mathbf{v}) = t^2 f(\mathbf{u},\mathbf{u}) + 2tf(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{v})$$

a

$$g(t\mathbf{u}+\mathbf{v},t\mathbf{u}+\mathbf{v}) = t^2 g(\mathbf{u},\mathbf{u}) + 2tg(\mathbf{u},\mathbf{v}) + g(\mathbf{v},\mathbf{v})$$

chápané jako polynomy druhého stupně v proměnné t mají podle předpokladů stejné kořeny t_1, t_2. Z algebry víme, že koeficienty polynomů se stejnými kořeny musí být úměrné, proto ze vztahu $g(\mathbf{u},\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u},\mathbf{u})$ plyne $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = kf(\mathbf{u},\mathbf{v})$ a $g(\mathbf{v},\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v},\mathbf{v})$. Protože vektor $\mathbf{v}$ byl volen libovolně, platí $g = k \cdot f$.

Zbývá dokázat, že nadkvadriky v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ tvoří projektivní prostor dimenze $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$. Prostor bilineárních forem na W_{n+1} je vektorový prostor izomorfní s vektorovým prostorem matic typu $(n+1)\times(n+1)$. Protože každá symetrická matice $(n+1)\times(n+1)$ je určena prvky na diagonále a nad diagonálou, jichž je $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, je dimenze $\mathcal{B}_n/\sim$ chápaného jako projektivní prostor $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$. □

2.5. Klasifikace nadkvadrik v projektivním prostoru. *Nechť $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je nadkvadrika. Potom v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ existuje geometrická báze $(O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}, E)$, tvořená body $\mathcal{P}_n$, v níž je nadkvadrika popsána právě jednou z rovnic*

(a) *pro $n = 1$*

$x_1^2 + x_2^2$	$= 0$	*dva imaginární body*
$x_1^2 - x_2^2$	$= 0$	*dva reálné body*
x_1^2	$= 0$	*dvojný bod*

(b) *pro $n = 2$*

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$= 0$	*imaginární regulární kuželosečka*
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$= 0$	*reálná regulární kuželosečka*
$x_1^2 + x_2^2$	$= 0$	*dvojice imaginárních přímek*
$x_1^2 - x_2^2$	$= 0$	*dvojice reálných přímek*
x_1^2	$= 0$	*dvojnásobná přímka*

(c) *pro $n = 3$*

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$	$= 0$	*imaginární regulární kvadrika*
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$	$= 0$	*nepřímková regulární kvadrika*
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$	$= 0$	*přímková regulární kvadrika*
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$= 0$	*imaginární kuželová plocha*
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$= 0$	*reálná kuželová plocha*
$x_1^2 + x_2^2$	$= 0$	*imaginární dvojice rovin*
$x_1^2 - x_2^2$	$= 0$	*reálná dvojice rovin*
x_1^2	$= 0$	*dvojnásobná rovina*

Důkaz. Každá nadkvadrika je určena nějakou reálnou symetrickou bilineární formou f na aritmetickém základu W_{n+1}. Pro tuto formu lze nalézt vhodnou bázi W_{n+1}, v níž má f diagonální tvar s koeficienty ± 1 nebo 0 na diagonále. Případným vynásobením číslem -1 dostaneme rovnici tvaru

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0,$$

kde $p \geq q$ a $p + q \leq n + 1$. $\square$

2.6. Průniky nadkvadrik v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ s podprostory. *Nechť $\mathcal{P}_k$ je k-rozměrný podprostor v $\mathcal{P}_n$ a nechť Q je nadkvadrika v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$. Potom buď $\mathcal{P}_k^{\mathbb{C}} \subseteq Q$ nebo $\mathcal{P}_k^{\mathbb{C}} \cap Q$ je nadkvadrika v $\mathcal{P}_k^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Nechť $F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ je kvadratická forma definující Q. Potom buď $F|\mathcal{P}_k^{\mathbb{C}} \equiv 0$ a tudíž $\mathcal{P}_k^{\mathbb{C}} \subseteq Q$ nebo $F|\mathcal{P}_k^{\mathbb{C}}$ není identicky rovno nule a tedy $\mathcal{P}_k^{\mathbb{C}} \cap Q = \{[\mathbf{v}] \in \mathcal{P}_k^{\mathbb{C}}; F(\mathbf{v}) = 0\}$ je nadkvadrikou v $\mathcal{P}_k^{\mathbb{C}}$. $\square$

Důsledek. *Nechť p je přímka v $\mathcal{P}_n$, Q nadkvadrika v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$. Jestliže $p^{\mathbb{C}} \cap Q$ obsahuje tři body, pak $p^{\mathbb{C}} \subseteq Q$.*

Důkaz. Podle klasifikační věty nadkvadriky v $\mathcal{P}_1^{\mathbb{C}}$ obsahují nejvýše dva body. $\square$

Příklad. Průnik kvadriky

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$$

s rovinou $x_3 = x_4$ je reálná regulární kuželosečka

$$x_1^2 + x_2^2 - z^2 = 0,$$

kde $z = \frac{1}{\sqrt{2}} x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_4$.

2.7. Pojem polárně sdružených bodů. Začneme motivací. Nadkvadrika Q v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je v souřadnicích určena množinou $M = \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = 0\}$. Tečný vektor k této množině v $\mathbb{C}^{n+1}$ je derivací křivky $\mathbf{x}(t)$ ležící v M v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)$. Derivováním v rovnici $\mathbf{x}(t)^\top A\mathbf{x}(t) = 0$ dostáváme $(\mathbf{x}'(t))^\top A\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^\top A\mathbf{x}'(t) = 0$.

Vzhledem k tomu, že A je symetrická matice, platí

$$(\mathbf{x}(0))^\top A\mathbf{x}'(0) = 0.$$

Nechť $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n+1}$ leží v tečné nadrovině, pak

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{x}'(0)$$

a platí

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top A(\mathbf{x} + \mathbf{x}'(0)) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}'(0) = 0 + 0 = 0.$$

Tedy pro $[\mathbf{y}] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ v tečné nadrovině ke Q v bodě $[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ platí $\mathbf{x}^\top A\mathbf{y} = 0$.

Definice. Nechť $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je nadkvadrika definovaná pomocí bilineární symetrické formy f. Body $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ jsou *polárně sdružené (konjugované)* vzhledem ke Q právě tehdy, když

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Lemma. *Množina polárně sdružených bodů k bodu $[\mathbf{x}]$ vzhledem k nadkvadrice Q je buď celé $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ nebo nadrovina v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Množina polárně sdružených bodů k $[\mathbf{x}]$ je $\{[\mathbf{y}] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}; \mathbf{y} \in \ker f(\mathbf{x}, -)\}$.

Protože $f(\mathbf{x}, -) : W_{n+1}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ je lineární zobrazení, je buď $\operatorname{Im} f(\mathbf{x}, -) = 0$ nebo $\mathbb{C}$. Dále

$$\dim \ker f(\mathbf{x}, -) = n + 1 - \dim \operatorname{Im} f(\mathbf{x}, -),$$

což dává tvrzení lemmatu. □

Příklad (a). V $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ uvažujme kvadriku

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Polárně sdružené body k bodu $[(1, 1, 0, \sqrt{2})]$ mají homogenní souřadnice (y_1, y_2, y_3, y_4) a tvoří rovinu

$$0 = f\big((1, 1, 0, \sqrt{2}), (y_1, y_2, y_3, y_4)\big) = y_1 + y_2 - \sqrt{2} y_4.$$

Příklad (b). V $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ uvažujme kuželosečku

$$x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Polárně sdružené body k bodu $[(0, 0, 1)]$ jsou všechny body $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, neboť pro jejich homogenní souřadnice (y_1, y_2, y_3) platí

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 0.$$

Definice. Bod $[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *regulárním bodem* nadkvadriky Q, jestliže množina polárně sdružených bodů k $[\mathbf{x}]$ je nadrovina v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$. Tato nadrovina se nazývá *polární nadrovina* (v $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ stručně *polára*).

Definice. Bod $[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *singulárním bodem* nadkvadriky Q, jestliže množina polárně sdružených bodů k $[\mathbf{x}]$ je celý prostor $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$. (Speciálně platí $[\mathbf{x}] \in Q$.)

Definice. Nadkvadrika Q v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *regulární*, jsou-li všechny její body regulární. Nadkvadrika se nazývá *singulární*, obsahuje-li nějaký singulární bod.

Lemma. *Nadkvadrika $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je regulární právě tehdy, když hodnost symetrické matice A, která ji definuje v souřadnicích, je rovna $n + 1$.*

Důkaz. Hodnost A je rovna $n + 1$ právě tehdy, když $\mathbf{x}^\top A \neq 0$ pro každé $\mathbf{x} \neq 0$. Je-li $\mathbf{x}^\top A \neq 0$, pak soustava s neznámou $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{y} = 0$$

nemá za množinu řešení celé $\mathbb{C}^{n+1}$. □

Lemma. *Nechť $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je nadkvadrika se singulárním bodem X. Jestliže $Y \neq X$ je dalším bodem nadkvadriky Q, pak v Q leží celá přímka $\overleftrightarrow{XY}$.*

Důkaz. Pro aritmetické zástupce $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ bodů X a Y a bilineární formu f, která definuje nadkvadriku Q, platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ a $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, neboť $[\mathbf{x}] = X$ je singulární bod, a $f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, neboť $[\mathbf{y}] = Y \in Q$.

Potom

$$f(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2ab f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b^2 f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0.$$

Tedy $[a\mathbf{x} + b\mathbf{y}] \in Q$. □

2.8. Tečná nadrovina. Na základě motivace z předchozího paragrafu můžeme vyslovit následující definici.

Definice. *Tečná nadrovina* nadkvadriky $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ v regulárním bodě $X \in Q$ je polární nadrovina k X.

Věta. *Nadrovina τ v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je tečnou nadrovinou k nadkvadrice Q v regulárním bodě $X \in Q$ právě tehdy, když $\tau \subseteq Q$ nebo $\tau \cap Q$ je singulární kvadrika v τ se singulárním bodem X.*

Důkaz. (1) Nechť τ je tečná nadrovina v bodě $X = [\mathbf{x}]$, $\tau = \{[\mathbf{y}]; f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$. Pokud $\tau \not\subseteq Q$, pak $Q \cap \tau = \{[\mathbf{y}] \in \tau; f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0\}$ má singulární bod X.

(2) Nechť X je regulární bod nadkvadriky Q, $X \in \tau$. Pokud $[\mathbf{x}] = X \in \tau \subseteq Q$, pak $f|\tau \equiv 0$ a tedy $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pro všechny $[\mathbf{y}] \in \tau$.

Nechť $f|\tau \not\equiv 0$ a X je singulární bod nadkvadriky $Q \cap \tau = \{[\mathbf{y}] \in \tau; f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0\}$. To znamená, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pro všechna $[\mathbf{y}] \in \tau$, tedy τ je polární nadrovina bodu X. $\square$

Důsledek. *Přímka p je tečnou ke kuželosečce Q právě tehdy, když $p \subseteq Q$ nebo $p \cap Q$ je jednobodová množina.*

Příklad. Najděte tečnu kuželosečky Q v bodě $X \in Q$.

$$Q : 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 16x_1 + 4x_2 - 28 = 0, \qquad X = [0; 2]$$

Řešení: Daná kuželosečka je zadána v afinní rovině. Rozšíříme ji prvně na projektivní rovinu. V této rovině je bilineární forma kuželosečky $\overline{Q}$

$$f(x, y) = 8x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 8x_1y_3 + 8x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 28x_3y_3.$$

Bod X má homogenní souřadnice $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. Jeho dosazením do $f(x, y)$ získáme rovnici tečny v homogenních souřadnicích:

$$12y_1 + 12y_2 - 24y_3 = 0.$$

V afinní rovině je tečnou vedenou bodem X ke kuželosečce Q přímka

$$y_1 + y_2 - 2 = 0.$$

Příklad. Bodem $X \notin Q$ veďte tečnu ke kuželosečce Q.

$$Q : 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x^2 - 2x_1 + 6x_2 - 3 = 0, \qquad X = [3; 4]$$

Řešení: Kuželosečku Q zadanou v afinní rovině rozšíříme na kuželosečku $\overline{Q}$ v projektivní rovině. Příslušná bilineární forma pro $\overline{Q}$ je

$$f(x, y) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - 3x_3y_3.$$

Nechť $T = (t_1, t_2, t_3)$ je bodem dotyku hledané tečny. Tedy $T \in Q$ a T a X jsou polárně sdružené. To vede na rovnice

$$\begin{aligned} 2t_1^2 - 4t_1t_2 + t_2^2 - 2t_1t_3 + 6t_2t_3 - 3t_3^2 &= 0 \\ -3t_1 + t_2 + 6t_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dosazením $t_2 = (3t_1 + 6t_3)$ do první rovnice dostaneme

$$-t_1^2 - 3t_3^2 + 4t_1t_3 = 0.$$

Položíme $t_3 = 1$ a řešíme rovnici

$$-t_1^2 + 4t_1 - 3 = 0.$$

Řešení $t_1 = 3$ a 1 vede k bodům $T_1 = (3, 3, 1)$ a $T_2 = (1, -3, 1)$. Hledané tečny jsou potom

$$x_1 - 3x_3 = 0 \qquad \text{a} \qquad 7x_1 - 2x_2 - 13x_3 = 0.$$

2.9. Střed nadkvadriky v afinním prostoru. V tomto paragrafu budeme pracovat s nadkvadrikou Q v afinním prostoru $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ a s jejím projektivním rozšířením $\overline{Q}$ v $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$. Body z $\overline{Q} - Q$ nazýváme *nevlastní body* nadkvadriky Q.

Definice. Bod $S \in \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ se nazývá *střed* nadkvadriky Q, jestliže je polárně sdružen se všemi nevlastními body.

Poznámka. Střed může být vlastní i nevlastní bod v $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$.

Následující věta říká, že vlastní střed má právě ty vlastnosti, které po středu v geometrii požadujeme.

Věta. *Bod $S \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ je středem nadkvadriky Q právě tehdy, když Q je středově souměrná podle S.*

Důkaz. Nechť W_{n+1} je aritmetický základ $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$. Nechť $\mathbf{s} \in W_{n+1}$ je aritmetický zástupce středu nadkvadriky $S \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$. Potom pro všechny vektory $\mathbf{v}$ ze zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ platí $f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = 0$. Odtud dostáváme

$$f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{s}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{s}, \mathbf{s}) + 2f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{s}, \mathbf{s}) - 2f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{s}-\mathbf{v}, \mathbf{s}-\mathbf{v}).$$

Tedy $[\mathbf{s}+\mathbf{v}] = S + \mathbf{v} \in Q$ právě tehdy, když $[\mathbf{s}-\mathbf{v}] = S - \mathbf{v} \in Q$, což je symetrie podle bodu S.

Obráceně, nechť $S + \mathbf{v} \in Q$ právě tehdy, když $S - \mathbf{v} \in Q$. Chceme dokázat, že $f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = 0$ pro všechna $\mathbf{v} \in \nu(\mathcal{A}_n)$. Potom bude $S = [\mathbf{s}]$ polárně sdružený se všemi nevlastními body.

Prvně ukážeme, že existuje $t \in \mathbb{C}$ tak, že $f(\mathbf{s} + t\mathbf{v}, \mathbf{s} + t\mathbf{v}) = 0$. Řešíme rovnici $t^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2t f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = 0$. Tato rovnice má buď jen nulový kořen a pak $f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = 0$, nebo má řešení $t \neq 0$. Pak ale $0 = f(\mathbf{s} + t\mathbf{v}, \mathbf{s} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{s} - t\mathbf{v}, \mathbf{s} - t\mathbf{v}) = 4t f(\mathbf{s}, \mathbf{v})$, tedy rovněž $f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = 0$. □

Výpočet středu. Chceme-li najít středy S nadkvadriky Q zadané v homogenních souřadnicích $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ bilineární symetrickou formou $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$, řešíme soustavu

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \dots & + & a_{1n}s_n & + & a_{1,n+1}s_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}s_1 & + & a_{n2}s_2 & + & \dots & + & a_{nn}s_n & + & a_{n,n+1}s_{n+1} & = & 0 \end{array}$$

Ta vznikne ze vztahu $0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{s}$ postupným dosazením $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ za $\mathbf{x}$. Chceme-li najít vlastní střed, pokládáme $s_{n+1} = 1$, pro nevlastní střed $s_{n+1} = 0$.

Příklad. Najděte středy kuželosečky Q (vlastní i nevlastní).

$$Q : 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 + 12x_2 - 36 = 0$$

Řešení: Bilineární forma pro kuželosečku Q je

$$f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2 - 36x_3y_3.$$

Rovnice pro střed $S = (y_1, y_2, y_3)$ jsou

$$\begin{aligned} 2y_2 + 3y_3 &= 0 \\ 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Pro $y_3 = 1$ dostaneme jediné řešení $S = (-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 1)$. Pro $y_3 = 0$ dostame $y_1 = y_2 = 0$, což nedává v projektivní rovině žádný bod. Daná kuželosečka má tedy vlastní střed $S = [-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}]$ a nemá žádný nevlastní střed.

Příklad. Najděte středy kvadriky Q (vlastní i nevlastní).

$$Q : x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3 - 2 = 0$$

Řešení: Bilineární forma pro kvadriku Q je

$$2f(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 - x_3y_4 - x_4y_3 - 4x_4y_4.$$

Soustava rovnic pro střed $S = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ je

$$\begin{array}{rcrcr} 2y_1 & + & y_2 & & = 0 \\ y_1 & + & 4y_2 & & = 0 \\ & & & -y_4 & = 0 \end{array}$$

Tato soustava nemá řešení pro $y_4 \neq 0$. Pro $y_4 = 0$ má řešení $(0, 0, t, 0)$. Tedy daná kvadrika nemá vlastní střed a má jeden nevlastní střed o homogenních souřadnicích $(0, 0, 1, 0)$.

2.10. Asymptotické nadroviny nadkvadriky v afinním prostoru. Nechť Q je nadkvadrika v afinním prostoru $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ uvažovaná společně se svým rozšířením $\overline{Q}$ v $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$.

Definice. *Asymptotická nadrovina* k nadkvadrice Q je tečná nadrovina v regulárním nevlastním bodě.

Příklad. Najděte asymptoty kuželosečky

$$x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 12x_1 + 24x_2 + 15 = 0.$$

Řešení: Nevlastní body kuželosečky mají homogenní souřadnice a splňují rovnici

$$\begin{aligned} x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 &= 0 \\ (x_1 + 3x_2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tedy daná kuželosečka má jeden nevlastní bod o homogenních souřadnicích $(3, -1, 0)$. Tento bod je regulární. Asymptota je polára k tomuto bodu. Ta má rovnici

$$3y_1 + 9y_2 - 3y_1 - 9y_2 - 18y_3 - 12y_3 = 0,$$

tj. $y_3 = 0$. To je však rovnice nevlastní přímky a tu za asymptotu nepovažujeme.

2.11. Afinní klasifikace kuželoseček. Kuželosečky v $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ rozdělujeme podle toho, jaký mají průnik svého rozšíření v $\overline{\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}}$ s nevlastní přímkou $\nu(\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}})$. K tomu používáme klasifikaci nadkvadrik v projektivním prostoru $\mathcal{P}_1^{\mathbb{C}}$. Jsou-li průnikem dva imaginární body, pak jde o kuželosečku *eliptického typu*, jsou-li průnikem dva reálné body, jde o kuželosečku *hyperbolického typu.* V případě jednobodového průniku mluvíme o kuželosečce *parabolického typu.*

Je-li kuželosečka dána v souřadnicích rovnicí

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{2} a_{i3}x_i + a_{33} = 0,$$

položme $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{3}$ a $\widetilde{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{2}$. O tom, jakého je kuželosečka typu, rozhoduje matice $\widetilde{A}$. Je-li $\widetilde{A}$ regulární a pozitivně nebo negativně definitní, je kuželosečka eliptického typu. Je-li $\widetilde{A}$ regulární a indefinitní, je kuželosečka hyperbolického typu. Singulární matice $\widetilde{A}$ zadává kuželosečku parabolického typu.

Věta. *Pro každou kuželosečku Q v $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ lze najít takovou bázi $(O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)$ v $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$, že v souřadnicích této báze je kuželosečka zadána jednou z rovnic*

$$\begin{array}{lcll}
x_1^2 + x_2^2 + 1 & = & 0 & \textit{imaginární elipsa}\\
x_1^2 + x_2^2 - 1 & = & 0 & \textit{reálná elipsa}\\
x_1^2 - x_2^2 - 1 & = & 0 & \textit{hyperbola}\\
x_1^2 + 2x_2 & = & 0 & \textit{parabola}\\
x_1^2 + x_2^2 & = & 0 & \textit{dvě imaginární různoběžky}\\
x_1^2 - x_2^2 & = & 0 & \textit{dvě reálné různoběžky}\\
x_1^2 + 1 & = & 0 & \textit{dvě imaginární rovnoběžky}\\
x_1^2 - 1 & = & 0 & \textit{dvě reálné rovnoběžky}\\
x_1^2 & = & 0 & \textit{dvojnásobná přímka}
\end{array}$$

Důkaz lze provádět tak, že v souřadnicích nějaké báze vezmeme rovnici kuželosečky a tu pomocí „úpravy na čtverce“ a dalších úprav převedeme na jednu z popsaných rovnic v nových souřadnicích. My však provedeme důkaz „geometricky“ na základě následujících tří lemmat.

Lemma A. *Nechť S je reálným vlastním středem kuželosečky Q. Potom v souřadnicích báze $(S,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)$ je její rovnice tvaru*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0.$$

Důkaz. V homogenních souřadnicích (x_1, x_2, x_3) je $S = (0, 0, 1)$. S je polárně sdružený s nevlastními body o homogenních souřadnicích $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$. Odtud plyne, že koeficienty symetrické bilineární formy f zadávající Q v daných souřadnicích jsou $a_{13} = a_{31} = 0$ a $a_{23} = a_{32} = 0$. □

Lemma B. *Nechť $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou dva lineárně nezávislé vektory v zaměření $\mathcal{A}_2$, které určují dva nevlastní body v $\overline{\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}}$ polárně sdružené vzhledem ke kuželosečce Q. Potom v souřadnicích báze $(O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ má Q rovnici*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0.$$

Důkaz. Homogenní souřadnice bodu $[\mathbf{e}_1]$ a $[\mathbf{e}_2]$ jsou $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$. Protože $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$, dostaneme $a_{12} = a_{21} = 0$. □

Lemma C. *Nechť kuželosečka Q nemá vlastní střed. Potom v souřadnicích báze $(O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$, kde $O \in Q$ je regulární, $\mathbf{e}_1$ je tečný vektor ke Q v bodě O a $\mathbf{e}_2$ je polárně sdružený k $\mathbf{e}_1$ má Q rovnici*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 = 0,$$

kde $a_{11} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$.

Důkaz. O a $\mathbf{e}_1$ jsou polárně sdružené, jejich homogenní souřadnice jsou $(0,0,1)$ a $(1,0,0)$. Proto $a_{13} = a_{31} = 0$. Dále $[\mathbf{e}_1]$ a $[\mathbf{e}_2]$ jsou polárně sdružené, proto $a_{12} = a_{21} = 0$. Dále $O \in Q$, proto $a_{33} = 0$. Tedy Q má rovnici

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2 = 0.$$

Protože Q nemá vlastní střed, soustava

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 & & = 0 \\ a_{22}x_2 & + \; a_{23} & = 0 \end{array}$$

nemá řešení, což je možné jedině pro $a_{22} = 0$ a $a_{23} \neq 0$. □

Důkaz klasifikační věty. Nechť Q je středová kuželosečka. Potom v bázi dané vlastním středem S a dvěma polárně sdruženými směry $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ má rovnici

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0.$$

Můžeme předpokládat $a_{11} > 0$. Potom rozlišením případů, kdy a_{22} a a_{33} jsou kladná, nulová nebo záporná a jednoduchou transformací dostaneme některou z rovnic v tvrzení s výjimkou paraboly.

Jestliže Q není středová kuželosečka, zvolme $O \in Q$ regulární, $\mathbf{e}_1$ tečný vektor k O a $\mathbf{e}_2$ polárně sdružený k $\mathbf{e}_1$. Podle lemmatu C je rovnice kuželosečky

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 = 0,$$

$a_{11} > 0$, $a_{23} \neq 0$. Potom po transformaci $y_1 = \sqrt{a_{11}}x_1$, $y_2 = a_{23}x_2$ dostaneme kanonickou rovnici paraboly. □

Příklad. Zjistěte, jakou kuželosečku popisuje

$$4x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 + 12x_2 - 36 = 0.$$

Řešení: Podle prvního příkladu z 2.9 se jedná o středovou kužeosečku se středem $S = [-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}]$. V bázi $(S, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ máme nové souřadnice y_1, y_2. Platí

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 - \dfrac{3}{4} \\ x_2 & = & y_2 - \dfrac{3}{2}, \end{array}$$

neboť souřadnice středu S jsou $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ a $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$4y_1y_2 + 3y_2^2 - \frac{99}{4} = 0.$$

Úpravou na čtverce dostaneme

$$3(y_2 + \frac{2}{3}y_1)^2 - \frac{4}{3}y_1^2 - \frac{99}{4} = 0$$

a odtud je vidět, že daná kuželosečka je hyperbolou.

2.12. Afinní klasifikace kvadrik. Kvadriky v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ opět rozdělujeme podle jejich průniku s nevlastní rovinou v $\nu(\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}})$. Kvadriku, která má s nevlastní rovinou společnou imaginární regulární kuželosečku, nazýváme *kvadrikou eliptického typu.* Kvadrika, která má s nevlastní rovinou společnou reálnou regulární kuželosečku, je *hyperbolického typu.* Kvadriku, jejíž průnik s nevlastní nadrovinou je singulární kuželosečka, nazýváme *kvadrikou parabolického typu.*

Věta. *Ke každé kvadrice Q v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ existuje taková afinní báze $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, že v souřadnicích této báze má Q jednu z následujících rovnic:*

(1)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$	$= 0$	*imaginární elipsoid*
(2)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$	$= 0$	*reálný elipsoid*
(3)	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$	$= 0$	*jednodílný (přímkový) hyperboloid*
(4)	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1$	$= 0$	*dvoudílný (nepřímkový) hyperboloid*
(5)	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$	$= 0$	*eliptický paraboloid*
(6)	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3$	$= 0$	*hyperbolický paraboloid*
(7)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$= 0$	*imaginární kuželová plocha*
(8)	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$= 0$	*reálná kuželová plocha*
(9)	$x_1^2 + x_2^2 + 1$	$= 0$	*imaginární eliptická válcová plocha*
(10)	$x_1^2 + x_2^2 - 1$	$= 0$	*reálná eliptická válcová plocha*
(11)	$x_1^2 - x_2^2 - 1$	$= 0$	*hyperbolická válcová plocha*
(12)	$x_1^2 + 2x_3$	$= 0$	*parabolická válcová plocha*
(13)	$x_1^2 + x_2^2$	$= 0$	*dvě imaginární různoběžné roviny*
(14)	$x_1^2 - x_2^2$	$= 0$	*dvě reálné různoběžné roviny*
(15)	$x_1^2 + 1$	$= 0$	*dvě imaginární rovnoběžné roviny*
(16)	$x_1^2 - 1$	$= 0$	*dvě reálné rovnoběžné roviny*
(17)	x_1^2	$= 0$	*dvojnásobná rovina*

Důkaz. Důkaz je obdobný důkazu pro kuželosečky. Nechť f je symetrická bilineární forma zadávající kvadriku Q a nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^4$ je její matice v dané bázi.

Je-li Q středová se středem $S \in \mathcal{A}_3$, zvolíme S za počátek souřadnic. Směry $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ zvolíme tak, aby byly po dvou polárně sdružené. Potom v této bázi je $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ a Q má rovnici

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44} = 0.$$

Nyní musíme rozlišit případy $a_{ii} = 0$, $a_{ii} > 0$, $a_{ii} < 0$ pro jednotlivé koeficienty $i = 1, 2, 3, 4$.

Pokud je Q nestředová kvadrika, zvolíme $O \in Q$ regulární bod, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ vektory tečné roviny v bodě O, které jsou navzájem polárně sdružené a $\mathbf{e}_3$ vektor polárně sdružený s $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. (Takový vždy existuje! Dokažte proč.) V této bázi je $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0$. Rovnice Q je tedy

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3 = 0$$

Protože Q nemá vlastní střed, soustava

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & & & & & = & 0 \\ & & a_{22}x_2 & & & = & 0 \\ & & & a_{33}x_3 & + \quad a_{34} & = & 0 \end{array}$$

nemá řešení. To je možné pouze tehdy, když $a_{33} = 0$ a $a_{34} \neq 0$. Tím dostáváme rovnici

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{34}x_3 = 0,$$

což po jednoduché úpravě vede k jedné z rovnic (5), (6) nebo (12). $\square$

Příklad. Ukažte, že jednodílný hyperboloid je sjednocením jednoparametrického systému přímek.

Uvažujme kanonickou rovnici jednodílného hyperboloidu

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0.$$

Jednotlivé přímky budou procházet body v rovině $x_3 = 0$ o souřadnicích $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$. Systém přímek zvolme tak, aby prvé dvě souřadnice směrového vektoru byly tečným vektorem ke kružnici v bodě $(\cos\alpha, \sin\alpha)$:

$$(x_1, x_2, x_3) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) + t(\sin\alpha, -\cos\alpha, 1)$$

Platí

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 &= (\cos\alpha + t\sin\alpha)^2 + (\sin\alpha - t\cos\alpha)^2 - t^2 - 1 = \\ &= \cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + t^2\cos^2\alpha - t^2 - 1 = \\ &= 1 + t^2 - t^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Příklad. Zjistěte, jaká kvadrika je popsána rovnicí

$$x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3 - 2 = 0.$$

Řešení: Podle druhého příkladu z 2.9 nemá tato kvadrika vlastní střed. Zvolme bod $Q = [0, 0, -2]$, který leží na kvadrice, za počátek nových souřadnic y_1, y_2, y_3. Platí

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 - 2 \end{aligned}$$

V nových souřadnicích bude mít kvadrika rovnici

$$y_1^2 + y_1y_2 + 2y_2^2 - y_3 = 0.$$

Úpravou na čtverce dostaneme

$$(y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2 + \frac{7}{4}y_2^2 - y_3 = 0.$$

Daná kvadrika je tedy eliptickým paraboloidem.

Kontrolní otázky.

(1) Vysvětlete vzájemný vztah mezi kuželosečkami v komplexním rozšíření projektivního prostoru a reálnými bilineárními formami.
(2) Co znamená, že dva body projektivního prostoru jsou polárně sdružené vzhledem k dané kuželosečce? Které geometrické pojmy se definují pomocí pojmu polárně sdružených bodů?
(3) Které kvadriky v projektivní klasifikaci jsou regulární a které singulární?
(4) Které kuželosečky a které kvadriky jsou v afinní klasifikaci středové?
(5) Které kuželosečky v afinní rovině mají asymptoty?
(6) Načrtněte podobu všech kvadrik z afinní klasifikace.

Příklady k procvičení.

(1) Určete polární nadrovinu k bodu X vzhledem k nadkvadrice Q
  (a) $Q: 2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 + 2 = 0, \qquad X = [3; 1; -1]$
  (b) $Q: 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \qquad X = [2; -1; 3]$
  (c) $Q: 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 14x_2 - 13 = 0, \qquad X = [-3; 2]$

  [Řešení: (a) $7x_1 + 4x_2 = -1$; (b) $3x_2 + 4x_3 = 1$; (c) nevlastní přímka.]

(2) Určete tečnou nadrovinu nadkvadriky Q v bodě X
  (a) $Q: \quad 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 - 3 = 0, \qquad X = [0; 1]$
  (b) $Q: \quad x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 12x_1 + 24x_2 + 15 = 0, \qquad X = [0; -1]$
  (c) $Q: \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + 5x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$
  $X = [1; -1; -1]$

  [Řešení: (a) $4x_1 + x_2 = 1$; (b) $3x_1 - x_2 = 1$; (c) $4x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 5$.]

(3) Rozhodněte, zda projektivní rozšíření následujících nadkvadrik jsou regulární nebo singulární a vypočtěte hodnost příslušné symetrické bilineární formy. Určete dále singulární body nadkvadrik.
  (a) $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 + 20x_2 + 20 = 0$ v $\mathcal{A}_2$
  (b) $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16x_1 + 12x_2 - 36 = 0$ v $\mathcal{A}_2$
  (c) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1 = 0$ v $\mathcal{A}_3$
  (d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2 = 0$ v $\mathcal{A}_3$

  [Řešení:
  (a) hodnost 2, singulární bod [0; -2];
  (b) regulární kuželosečka – hodnost 3;
  (c) hodnost 1, singulární body $[1 + t - 2s; t; s]$;
  (d) hodnost 3, nevlastní singulární bod $(1; 0; -1; 0)$.

(4) Určete středy nadkvadrik z příkladu (3).

  [Řešení: (a) $S = [0; -2]$; (b) $S = [3; -4]$; (c) každý bod kvadriky je střed;
  (d) přímka středů $S = [t; 0; -t]$.]

(5) Určete typ nadkvadrik z příkladu (3).

[Řešení: (a) bod; (b) hyperbola; (c) dvojnásobná rovina; (d) imaginární eliptická válcová plocha.]

(6) Určete asymptoty kuželoseček
(a) $2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_1 + 3x_2 + 4 = 0$
(b) $2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 - x_1 - 6x_2 - 15 = 0$
(c) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 14x_2 + 29 = 0$
(d) $8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 16x_1 + 4x_2 - 28 = 0$

[Řešení: (a) $a_1 : 2x_1 - 3x_2 = -1$, $a_2 : x = 1$; (b) $a_1 : x_1 + x_2 = -1$, $a_2 : 2x_1 - 3x_2 = 3$; (c) nevlastní asymptota; (d) $a_1 : 24ix_1 + 6(3+i)x_2 = -24i$, $a_2 : 24ix_1 - 6(3-i)x_2 = -24i$.]

3. Metrické vlastnosti kvadrik

Zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ budeme označovat $Z(\mathcal{A}_n)$. Projektivní prostor s aritmetickým základem $Z(\mathcal{A}_n)$ budeme označovat $\nu(\mathcal{A}_n)$. n-rozměrný euklidovský prostor $\mathcal{E}_n$ je n-rozměrný afinní prostor, v jehož zaměření $Z(\mathcal{E}_n)$ je definován skalární součin $\cdot : Z(\mathcal{E}_n) \times Z(\mathcal{E}_n) \to \mathbb{R}$.

V této části budeme nadkvadriky uvažovat v komplexním rozšíření $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ a v jeho projektivním rozšíření $\overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$. Tyto kvadriky budeme popisovat nyní pouze v souřadnicích reálných ortonormálních bazí $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathcal{E}_n$. To znamená, že $O \in \mathcal{E}_n$ a $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ tvoří ortonormální bázi v $Z(\mathcal{E}_n)$. Aritmetický základ projektivního rozšíření $\overline{\mathcal{E}_n}$ budeme označovat W_{n+1}. Skalární součin je zadán pouze na jeho n-rozměrném podprostoru $Z(\mathcal{E}_n)$, který určuje nevlastní body v $\overline{\mathcal{E}_n}$.

Tento skalární součin můžeme rozšířit na skalární součin na komplexním vektorovém prostoru $Z(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}) = Z(\mathcal{E}_n)^{\mathbb{C}}$. Toto rozšíření budeme označovat opět $\cdot$.

Nevlastní body projektivního rozšíření $\overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$ budeme nazývat *směry*. Jsou určeny nenulovými vektory ze zaměření $Z(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$. Říkáme, že směry $[\mathbf{u}]$ a $[\mathbf{v}]$ jsou *kolmé* právě tehdy, když $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

3.1. Hlavní směry. Směr $[\mathbf{u}]$ zadaný reálným vektorem $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$ se nazývá *hlavní směr* nadkvadriky Q, jestliže všechny k němu kolmé směry v $Z(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$ jsou s ním polárně sdružené.

Jinými slovy: Je-li nadkvadrika Q popsána bilineární formou f, pak pro všechny $\mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ platí

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

Nechť $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je nějaká ortonormální báze v $\mathcal{E}_n$. V aritmetickém základu W_{n+1} projektivního rozšíření uvažujme bázi $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1})$. Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$ je matice bilineární formy f na W_{n+1}. Nechť $\widetilde{A}$ je matice bilineární formy f zúžené na $Z(\mathcal{E}_n)$ v bázi $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, tj. $\widetilde{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Věta. *Nenulový vektor $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$ určuje hlavní směr nadkvadriky Q právě tehdy, když je vlastním vektorem lineárního zobrazení zadaného maticí $\widetilde{A}$.*

Důkaz. Lineární zobrazení $Z(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}) \to Z(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$ zadané maticí $\widetilde{A}$ označme opět $\widetilde{A}$. Nechť $\mathbf{u} \neq 0$ určuje hlavní směr. Potom

$$0 = f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \widetilde{A}\mathbf{u}$$

pro všechna $\mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$. Jestliže $\widetilde{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$, pak

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \overline{\lambda}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \widetilde{A}\mathbf{u} = 0,$$

tedy $\mathbf{v} = 0$, a proto $\widetilde{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$.

Nechť obráceně $\mathbf{u} \neq 0$ je vlastním vektorem zobrazení $\widetilde{A}$, tj. $\widetilde{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Pro všechna $\mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ pak platí

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \widetilde{A}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\lambda\mathbf{u}) = \overline{\lambda}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Tedy $\mathbf{u}$ určuje hlavní směr. □

Důsledek. *Ke každé nadkvadrice Q v $E_n^{\mathbb{C}}$ existuje ortonormální báze v $Z(E_n)$, jejíž vektory určují hlavní směry nadkvadriky Q.*

Důkaz. K symetrické reálné matici $\widetilde{A}$ existuje ortonormální báze tvořená reálnými vlastními vektory. □

Definice. Vlastní čísla matice $\widetilde{A}$ se nazývají *hlavní čísla* nadkvadriky Q. (Tato čísla jsou vždy reálná, neboť $\widetilde{A}$ je symetrická.)

3.2. Nadkvadriky a symetrie. Již dříve jsme podali definici středu nadkvadriky v afinním prostoru. K této definici jsme nepotřebovali skalární součin. O symetrii nadkvadriky vzhledem k nadrovině však můžeme mluvit pouze tehdy, když máme na zaměření afinního prostoru zadán skalární součin.

Definice. Nadrovina τ v $\mathcal{E}_n$ se nazývá *osovou nadrovinou* nebo také *hlavní nadrovinou* nadkvadriky Q, jestliže je buď

(a) polární nadrovinou k hlavnímu směru, který je regulárním bodem nadkvadriky $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$ nebo

(b) kolmou nadrovinou k hlavnímu směru, který je singulárním bodem nadkvadriky $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$.

Osová nadrovina pro $n = 2$ se nazývá *osová přímka.*

Příklad. Uvažujme parabolu $x_1^2 + 2x_2 = 0$ ve standardní ortonormální bázi v $\mathbb{R}^2 = \mathcal{E}_2$. Matice A je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla 1 a 0 s vlastními vektory $(1,0)$ a $(0,1)$. Ty určují hlavní směry a jsou regulárními nevlastními body o homogenních souřadnicích $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$. Polára k $(1,0,0)$ v $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$ je dána rovnicí

$$x_1 = 0.$$

Polára k $(0,1,0)$ v $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$ je dána rovnicí

$$x_3 = 0.$$

Tedy v $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$ má parabola pouze jedinou osovou přímku

$$x_1 = 0.$$

Příklad. Uvažujme dvojici reálných rovnoběžek

$$x_1^2 - 1 = 0$$

ve standardní ortonormální bázi $\mathbb{R} = \mathcal{E}_2$. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice $\widetilde{A}$ jsou 1 a 0 s vlastními vektory $(1,0)$ a $(0,1)$. Ty určují 2 hlavní směry o homogenních souřadnicích $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$. $(1,0,0)$ je regulární nevlastní bod. Polára k němu je

$$x_1 = 0.$$

$(0,1,0)$ je singulární nevlastní bod. Všechny přímky kolmé na $(0,1)$ v $\mathcal{E}_2$ jsou $x_2 = c$, kde c je nějaká konstanta. Daná kuželosečka má tedy osové přímky $x_1 = 0$ a $x_2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Věta. *Nechť τ je nadrovina v $\mathcal{E}_n$ a $\tau^{\mathbb{C}}$ nechť je její komplexifikace. Nadkvadrika Q v $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ je symetrická podle nadroviny $\tau^{\mathbb{C}}$ právě tehdy, když je τ její osovou nadrovinou.*

Důkaz. Nechť τ je osová nadrovina v $\mathcal{E}_n$ k hlavnímu směru $[\mathbf{u}]$. Její komplexifikaci pišme ve tvaru $\tau^{\mathbb{C}} = S + V^{\mathbb{C}}$, kde $S \in \mathcal{E}_n$ a V je $(n-1)$-rozměrný podprostor v $\nu(\mathcal{E}_n)$ kolmý k $\mathbf{u}$. Navíc podle definice (a) i (b) jsou všechny body $\tau^{\mathbb{C}}$ polárně sdružené s $[\mathbf{u}]$, tedy

$$f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0,$$

kde $\mathbf{v} \in V^{\mathbb{C}}$ a $\mathbf{s} \in W_{n+1} - \{0\}$ je aritmetickým zástupcem bodu S.

Každé dva body symetrické podle $\tau^{\mathbb{C}}$ mají vyjádření $S + \mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}$ a $S + \mathbf{v} - \alpha\mathbf{u}$ pro nějaké $\mathbf{v} \in V^{\mathbb{C}}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Jestliže $S + \mathbf{v} + \alpha\mathbf{u} \in Q$, pak

$$f(\mathbf{s}+\mathbf{v}-\alpha\mathbf{u}, \mathbf{s}+\mathbf{v}-\alpha\mathbf{u}) = f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{s}+\mathbf{v}) - 2\alpha f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) =$$

$$= f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{s}+\mathbf{v}) + 2\alpha f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{s}+\mathbf{v}+\alpha\mathbf{u}, \mathbf{s}+\mathbf{v}+\alpha\mathbf{u}) = 0,$$

neboť $f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$. Tedy $S + \mathbf{v} - \alpha\mathbf{u} \in Q$ a $\tau^{\mathbb{C}}$ je nadrovinou symetrie nadkvadriky Q v $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$.

Obráceně, předpokládejme, že Q je symetrická podle nadroviny $\tau^{\mathbb{C}} = S + V^{\mathbb{C}}$, kde $S \in \mathcal{E}_n$ a V je $(n-1)$-rozměrný podprostor $\nu(\mathcal{E}_n)$. Nechť $\mathbf{u} \in \nu(\mathcal{E}_n)$ je vektor kolmý k V. Ukážeme, že $f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ pro všechna $\mathbf{v} \in V$ a $\mathbf{s} \in W_{n+1} - \{0\}$ aritmetického zástupce bodu S.

Pokud má rovnice v neznámé α

$$0 = f(\mathbf{s}+\mathbf{v}+\alpha\mathbf{u}, \mathbf{s}+\mathbf{v}+\alpha\mathbf{u}) = f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{s}+\mathbf{v}) + 2\alpha f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

nenulové řešení $\alpha \in \mathbb{C}$, pak ze symetrie $Q^{\mathbb{C}}$ podle $\tau^{\mathbb{C}}$ plyne, že rovněž $-\alpha$ je řešením a tedy nutně

$$f(\mathbf{s}+\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0.$$

Předpokládejme, že pro nějaké $\mathbf{v}_0$ je $f(\mathbf{s}+\mathbf{v}_0, \mathbf{u}) \neq 0$. Pak výše uvedená rovnice může mít pouze nulové řešení. Tedy musí mít koeficienty

$$f(\mathbf{s}+\mathbf{v}_0, \mathbf{s}+\mathbf{v}_0) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Pokud $f(\mathbf{s}+\mathbf{v}_0, \mathbf{u}) \neq 0$, pak totéž musí platit pro všechna $\mathbf{s}+\mathbf{w}$ z nějakého okolí bodu $\mathbf{s}+\mathbf{v}_0$ v rovině τ. Tedy na tomto okolí je také $f(\mathbf{s}+\mathbf{w}, \mathbf{s}+\mathbf{w}) = 0$. To znamená, že pro každé $\mathbf{v} \in V$ má rovnice

$$\begin{aligned} 0 = f(\mathbf{s}+\mathbf{v}_0+t\mathbf{v}, \mathbf{s}+\mathbf{v}_0+t\mathbf{u}) &= f(\mathbf{s}+\mathbf{v}_0, \mathbf{s}+\mathbf{v}_0) + 2tf(\mathbf{s}+\mathbf{v}_0, \mathbf{v}) + t^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= 2tf(\mathbf{s}+\mathbf{v}_0, \mathbf{v}) + t^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

nekonečně mnoho řešení. Tedy $f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. Proto $V \subseteq \overline{Q}$. Společně s $\mathbf{u} \in \overline{Q}$ to implikuje, že $\nu(\mathcal{E}_n) \subseteq \overline{Q}$, což není možné (neboť $\widetilde{A} \neq 0$).

Rovnice $f(\mathbf{s}+\mathbf{v},\mathbf{u})=0$ pro všechna $\mathbf{v}\perp\mathbf{u}$ nám říká, že τ je množina bodů polárně sdružených s $[\mathbf{u}]$. Tedy τ je osová nadrovina. $\square$

Definice. Průsečnice dvou osových rovin kvadriky Q se nazývá *osová přímka* kvadriky Q. Body průniku osové přímky s kvadrikou se nazývají *vrcholy.*

3.3. Metrická klasifikace kuželoseček a kvadrik. Důkazy dvou následujících klasifikačních vět jsou analogické, proto provedeme druhý z nich, který je obtížnější.

Věta. *Pro každou kuželosečku Q v $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$ lze najít takovou ortonormální bázi $(O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$, že v jejích souřadnicích má Q právě jednu z rovnic*

(1)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+1$	$=0$	*imaginární elipsa*
(2)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-1$	$=0$	*reálná elipsa*
(3)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-1$	$=0$	*hyperbola*
(4)	$x_1^2+2px_2$	$=0$	*parabola*
(5)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2$	$=0$	*imaginární různoběžky*
(6)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2$	$=0$	*reálné různoběžky*
(7)	$x_1^2+p^2$	$=0$	*dvě imaginární rovnoběžky*
(8)	$x_1^2-p^2$	$=0$	*dvě reálné rovnoběžky*
(9)	x_1^2	$=0$	*dvojnásobná přímka*

Pro koeficienty platí $a_1>0$, $a_2>0$, $p\neq 0$.

Věta. *Pro každou kvadriku Q v $\mathcal{E}_3^{\mathbb{C}}$ lze najít takovou ortonormální bázi $(O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$, že v jejích souřadnicích má Q právě jednu z rovnic*

(1)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+1$	$=0$	*imaginární elipsoid*
(2)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1$	$=0$	*reálný elipsoid*
(3)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1$	$=0$	*jednodílný (přímkový) hyperboloid*
(4)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+1$	$=0$	*dvoudílný (nepřímkový) hyperboloid*
(5)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+2px_3$	$=0$	*eliptický paraboloid*
(6)	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+2px_3$	$=0$	*hyperbolický paraboloid*

$$
\begin{array}{lllll}
(7) & \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 & = & 0 & \textit{imaginární kuželová plocha} \\
(8) & \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 & = & 0 & \textit{reálná kuželová plocha} \\
(9) & \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 1 & = & 0 & \textit{imaginární eliptická válcová plocha} \\
(10) & \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 & = & 0 & \textit{reálná eliptická válcová plocha} \\
(11) & \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 & = & 0 & \textit{hyperbolická válcová plocha} \\
(12) & x_1^2 + 2px_3 & = & 0 & \textit{parabolická válcová plocha} \\
(13) & \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 & = & 0 & \textit{dvě imaginární různoběžné roviny} \\
(14) & \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 & = & 0 & \textit{dvě reálné různoběžné roviny} \\
(15) & x_1^2 + p^2 & = & 0 & \textit{dvě imaginární rovnoběžné roviny} \\
(16) & x_1^2 - p^2 & = & 0 & \textit{dvě reálné rovnoběžné roviny} \\
(17) & x_1^2 & = & 0 & \textit{dvojnásobná rovina}
\end{array}
$$

Pro koeficienty platí $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $p \neq 0$.

Důkaz. Nechť Q je středová kvadrika s vlastním středem S. Zvolme ortonormální bázi $(S, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, kde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, jsou jednotkové vektory zadávající hlavní směry (ty lze vždy vybrat na sebe kolmé a polárně sdružené).

V této bázi má Q rovnici

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44} = 0$$

(viz důkaz afinní klasifikace).

Nyní rozlišíme případy $a_{44} = 0$ a $a_{44} \neq 0$ a jednoduchou úpravou získáme některou z rovnic s výjimkou (5), (6) a (12). Čísla a_{11}, a_{22} a a_{33} jsou hlavní čísla kvadriky Q.

Nechť Q není středová kvadrika. Nechť $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je ortonormální báze $\nu(\mathcal{E}_3)$ určující hlavní směry kvadriky Q. Potom v bázi $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ s nějakým počátkem $O \in Q$ má kvadrika rovnici

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 = 0$$

Protože není středová, musí být $a_{ii} = 0$ a $a_{i4} \neq 0$ pro nějaké $i = 1, 2, 3$. Nechť tedy $a_{33} = 0$ a $a_{34} \neq 0$.

Pokud $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, odpovídající hlavní směry $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ určují osové roviny $a_{11}x_1 + a_{14} = 0$ a $a_{22}x_2 + a_{24} = 0$, které se protínají v osové přímce. Ta protíná kvadriku Q v jediném vrcholu V (jeho souřadnice jsou určeny jednoznačně soustavou tří rovnic). Potom v bázi $(V, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je kvadrika Q zadána rovnicí

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + 2py_3 = 0,$$

$p \neq 0$, $a_{14} = a_{24} = 0$, neboť $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou tečné vektory ke kvadrice v bodě V. Odtud úpravou dostaneme jednu z rovnic (5) nebo (6).

Pokud $a_{11} \neq 0$ a $a_{22} = a_{33} = 0$, hlavní směr $\mathbf{e}_1$ určuje osovou rovinu $a_{11}x_1 + a_{14} = 0$. Průnikem této osové nadroviny s kvadrikou je přímka, jejíž jednotkový směrový vektor $\mathbf{f}_2$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$.

Zvolme bod V na této přímce a ortonormální bázi $(V, \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ jsou vektory hlavních směrů, $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{f}_2$ jsou tečné vektory kvadriky v bodě V. Lze ukázat, že V je opět vrchol kvadriky. Tedy rovnice kvadriky v souřadnicích této báze je (viz důkaz afinní klasifikace)

$$a_{11}x_1^2 + 2px_3 = 0,$$

$p \neq 0$, $a_{11} \neq 0$. Vydělením číslem a_{11}^2 dostaneme rovnici (12). □

Příklad. Najděte hlavní směry, osové rovin, osové přímky, vrcholy a kanonickou rovnici ve vhodné bázi kvadriky

$$x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 + 4x_1 + 16x_2 - 4x_3 - 16 = 0.$$

Matice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla λ_1, λ_2, λ_3 matice $\widetilde{A}$ jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\widetilde{A} - \lambda E) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 16\lambda + 32.$$

Tyto kořeny, pokud jsou celočíselné, musí dělit absolutní člen 32. Tak zjistíme, že

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = 4, \qquad \lambda_3 = -4.$$

Odpovídající vlastní vektory $\mathbf{u}_i$ jsou řešeními soustavy $(\widetilde{A} - \lambda_i E)\mathbf{u}_i = 0$. Dostáváme $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)$ a $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 0)$. Osové roviny má kvadrika 3 a jsou to roviny kolmé a současně polární k $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Osové přímky jsou opět tři a jejich popis je dán výběrem 2 z předchozích 3 rovnic. Průnik všech tří osových rovin je jediný bod $S = (1, 2, -1)$. Ten je středem kvadriky. Parametrické vyjádření os je potom následující:

$$\begin{aligned} o_1 : &\quad (1, 2, -1) + t(0, 1, 0) \\ o_2 : &\quad (1, 2, -1) + t(1, 0, 1) \\ o_3 : &\quad (1, 2, -1) + t(1, 0, -1) \end{aligned}$$

Z parametrického vyjádření osy o_1 dosadíme do rovnice kvadriky a pro parametr t dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 - 1 = 0$. Vrcholy na ose t_1 jsou tedy $A = (1, 3, -1)$ a $B = (1, 1, -1)$.

Z parametrického vyjádření osy o_2 dostaneme kvadratickou rovnici $2t^2+1=0$. Na o_2 tedy leží dva komplexně sdružené vrcholy $E=(1+\frac{\sqrt{2}}{2}i, 2, -1+\frac{\sqrt{2}}{i})$, $\overline{E}=(1-\frac{\sqrt{2}}{2}i, 2, -1-\frac{\sqrt{2}}{i})$.

Konečně pro osu o_3 dostaneme opět rovnici $t^2-1=0$, která dává vrcholy $C=(2,2,-2)$ a $D=(0,2,0)$.

Z popisu os a reálných vrcholů vyplývá, že daná kvadrika je jednodílný hyperboloid.

V bázi S, $\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\mathbf{v}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{u}_3$ budeme mít souřadnice y_1, y_2, y_3, pro které platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tedy v homogenních souřadnicích

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Tedy rovnice kvadriky v souřadnicích y je

$$yP^\top APy = 0,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rovnice v nových souřadnicích je

$$\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{\frac{1}{2}} + y_3^2 - 1 = 0.$$

Kontrolní otázky.

(1) Podejte definici hlavních směrů a vysvětlete, kterou větu použijete k jejich výpočtu.
(2) Jak se liší hlavní čísla regulárních kvadrik?
(3) Kolik osových (hlavních) rovin mají jednotlivé kvadriky? (Použijte jejich metrickou klasifikaci.)
(4) Napište kanonické rovnice kvadrik s 1, 2, 4, 6 a nekonečně mnoha reálnými vrcholy.
(5) Zvolte si nějakou kvadriku a popište všechny její symetrie.

Příklady k procvičení.

(1) Určete hlavní čísla a hlavní směry nadkvadriky, její střed a její kanonickou rovnici v příslušné ortonormální bázi.

(a) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0$ v $\mathcal{E}_2$

[Řešení: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $S = [2; -1]$, hyperbola $x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = 1$]

(b) $7x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 + 28x_1 + 12x_2 + 28 = 0$ v $\mathcal{E}_2$

[Řešení: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{u}_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$, $S = [-2; 0]$, různoběžky $x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = 0$]

(c) $9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 24x_1 - 16x_2 + 3 = 0$ v $\mathcal{E}_2$

[Řešení: $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{u}_1 = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$, $S = [2t; 3 - 2t]$, rovnoběžky $x_1^2 = 1$]

(d) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 9 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $S = [1; -1; 1]$, reálná kuželová plocha $\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - \frac{x_3^2}{3} = 0$]

(e) $5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 - 27 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_{1,2} = 9$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$, $\mathbf{u}_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $S = [0; 0; 0]$, reálná eliptická válcová plocha $\frac{x_1^2}{3} + \frac{x_2^2}{3} = 1$]

(f) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_{1,2} = -3$, $\lambda_3 = 6$, $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $S = [1; 1; -1]$, reálná kuželová plocha $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - x_3^2 = 0$.]

(g) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $S = [t; 2; t]$, reálná eliptická válcová plocha $x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} = 1$.]

(h) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 2\sqrt{2}x_3 - 8 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 0$, $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$, nestředová, parabolická válcová plocha $x_1^2 + 2x_3 = 0$.]

(2) Určete osové nadroviny a vrcholy nadkvadrik z příkladu (1).

[Řešení:

(a) Osy $o_1 : x_1 + x_2 = 1$, $o_2 : x_1 - x_2 = 3$, vrcholy $V_{1,2} = [2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}; -1 \mp \frac{3}{\sqrt{2}}]$ příslušné k o_1, $V_{3,4} = [2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}; -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}]$ příslušné k o_2;

(b) Osy $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 - 3x_2 = -2$, vrcholy $V_1 = [-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}]$ k o_1, $V_2 = [-2; 0]$ k o_2;

(c) Osa $3x_1 + 2x_2 = 4$, nevlastní vrchol určený zaměřením osy (-2,3,0);

(d) Osové roviny $\sigma_1 : x_1 - x_2 + x_3 = 3$, $\sigma_2 : x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, $\sigma_3 : x_1 + x_2 = 0$, 6 os zadaných průniky vždy dvou rovin, vrchol $V = [1; -1; 1]$;

(e) Osové roviny $2x_1 - x_2 - 2x_3 = p$ pro $\forall p \in \mathbb{R}$, dále všechny roviny obsahující osu $o : x_1 + 2x_2 = 0, 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$, další osy jsou přímky na tuto osu kolmé, vrcholy jsou všechny body kvadriky;

(f) Osové roviny $\sigma : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$, dále všechny roviny procházející osou $o : x_1 - x_2 = -3, 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1$, vrchol $V = [1; -1; 1]$;

(g) Osové roviny $\sigma_1 : x_1 - 2x_2 - x_3 = -2$, $\sigma_2 : x_1 + x_2 - x_3 = 1$, osa daná průnikem rovin a nevlastní vrchol určený jejím zaměřením (1,0,1,0);

(h) Osová rovina $x_1 = x_2$.]

4. Multilineární algebra

V celé této kapitole budeme pracovat s vektorovými prostory nad pevným polem $\mathbb{K}$.

4.1. Faktorový prostor. Nechť U je vektorový prostor, V jeho podprostor. Tento prostor definuje na U ekvivalenci $\mathbf{u}_1 \sim \mathbf{u}_2$ právě tehdy, když $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in V$. Třídu ekvivalence obsahující vektor $\mathbf{u}$ budeme značit $[\mathbf{u}]$. Je to množina

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u} + V = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}; \mathbf{v} \in V\}.$$

Množinu všech tříd ekvivalence označujeme U/V. Na této množině můžeme definovat sčítání a násobení skalárem z $\mathbb{K}$ takto:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] + [\mathbf{v}] &= [\mathbf{u} + \mathbf{v}] \\ a[\mathbf{u}] &= [a\mathbf{u}] \end{aligned}$$

Tyto operace jsou nezávislé na výběru reprezentantů a není obtížné se přesvědčit, že z U/V vytvářejí vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

Je-li U konečněrozměrný prostor, pak

$$\dim U/V = \dim U - \dim V.$$

Důkaz je jednoduchý: Zvolme bázi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ prostoru V a doplňme ji na bázi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ prostoru U. Stačí ukázat, že $[\mathbf{v}_{k+1}], \ldots, [\mathbf{v}_n]$ je báze prostoru U/V.

Cvičení. Dokažte předchozí tvrzení.

Označme $p : U \to U/V$ surjektivní lineární zobrazení definované předpisem

$$p(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}].$$

Toto zobrazení se nazývá projekce.

Nechť $\varphi : U \to W$ je lineární zobrazení a nechť $V \subseteq \ker \varphi$. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\overline{\varphi} : U/V \to W$ takové, že

$$\varphi = \overline{\varphi} \circ p,$$

tedy že následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & W \\ U/V \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

φ musí být definováno předpisem

$$\overline{\varphi}([\mathbf{u}]) = \varphi(\mathbf{u}).$$

Díky tomu, že pro $\mathbf{v} \in V$ je $\varphi(\mathbf{v}) = 0$, je

$$\varphi(\mathbf{u}_1) = \varphi(\mathbf{u}_1) + \varphi(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \varphi(\mathbf{u}_2)$$

pro $\mathbf{u}_1 \sim \mathbf{u}_2$ a definice $\overline{\varphi}$ nezávisí na výběru reprezentanta.

4.2. Prostory lineárních a multilineárních zobrazení. Lineární zobrazení z vektorového prostoru U do vektorového prostoru V vytvářejí vektorový prostor, který budeme označovat

$$\mathrm{Hom}(U, V).$$

Důvodem pro toto označení je skutečnost, že lineární zobrazení se často nazývají homomorfismy vektorových prostorů.

Nechť U_1, U_2, ..., U_n, V jsou vektorové prostory. Zobrazení

$$\varphi : U_1 \times U_2 \times \dots U_n \to V$$

se nazývá multilineární (nebo n-lineární), jestliže je lineární v každé své složce, tj.

$$\varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, a\mathbf{u}_i + b\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{u}_n) = a\varphi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) + b\varphi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{u}_n)$$

Množina všech n-lineárních zobrazení z $U_1 \times \dots \times U_n$ do V tvoří opět vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, který budeme označovat

$$\mathrm{Lin}_n(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n, V).$$

Speciálně platí

$$\mathrm{Lin}_1(U, V) = \mathrm{Hom}(U, V).$$

Příklad. Na $\mathbb{R}^3$ uvažujme lineární zobrazení $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadaná předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3, \qquad g(y_1, y_2, y_3) = y_1.$$

Ukážeme, že zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}) = x_3 y_1$$

je bilineární. Platí

$$\varphi(a\mathbf{x}+b\mathbf{z}, \mathbf{y}) = f(a\mathbf{x}+b\mathbf{z}) \cdot g(\mathbf{y}) = (ax_3+bz_3)y_1 = ax_3y_1+bz_3y_1 = a\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})+b\varphi(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Důkaz pro linearitu ve druhé složce se provede obdobně.

4.3. Duální prostor. Lineární zobrazení z U do $\mathbb{K}$ se nazývají *lineární formy* na U, vektorový prostor všech lineárních forem se nazývá *duální vektorový prostor k prostoru* U a označuje se

$$U^* = \mathrm{Hom}(U, \mathbb{K}).$$

Věta (o duální bázi). *Nechť U je vektorový prostor s bazí $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$. Potom v duálním prostoru U^* existuje báze $(f^1, f^2, \dots, f^n)$ taková, že*

$$f^i(\mathbf{u}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Tato báze se nazývá duální bazí *k bázi* $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.

Důkaz. Každý vektor $\mathbf{u}$ lze psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů báze

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{u}_i.$$

Definujme $f^i(\mathbf{u}) = a^j$ jako j-tou souřadnici vektoru $\mathbf{u}$. To je lineární forma požadovaných vlastností.

Ukážeme, že $f^1, \dots, f^n$ jsou lineárně nezávislé. Nechť

$$\sum_{j=1}^{n} b_j f^j = 0.$$

Dosadíme-li do této rovnosti vektor $\mathbf{u}_i$, dostaneme $b_i = 0$.

Nechť $f \in U^*$ je libovolná lineární forma. Platí

$$f = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{u}_j) f^j.$$

O rovnosti se stačí přesvědčit na vektorech báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Tím jsme dokázali, že $(f^1, \dots, f^n)$ je báze U^*. ☐

Poznámka. Z důkazu je dobré si zapamatovat, že souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ lze spočítat pomocí duální báze $\alpha^* = (f^1, \dots, f^n)$:

$$(\mathbf{u})_\alpha = \big(f^1(\mathbf{u}), \dots, f^n(\mathbf{u})\big)^\top.$$

Příklad. Vektory v $\mathbb{R}^n$ považujeme za n-tice reálných čísel ve formě sloupců. Duální prostor $(\mathbb{R}^n)^*$ si můžeme představit jako n-tice reálných čísel ve formě řádků. Tedy

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \qquad f \in (\mathbb{R}^3)^*, \qquad f = (a_1, a_2, a_3).$$

Vyčíslení formy f na vektoru $\mathbf{u}$ je potom maticové násobení

$$f(\mathbf{u}) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze $\mathbb{R}^n$. Matice přechodu od α ke standardní bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ je $(\mathrm{id})_{\varepsilon,\alpha} = A$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)(\mathrm{id})_{\varepsilon,\alpha}.$$

Duální báze k $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ je $f^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $f^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, …, $f^n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ a duální báze $(g^1, g^2, \dots, g^n)$ k $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je určena řádky matice A^{-1}, neboť musí platit

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \big(g^i(\mathbf{u}_j)\big) = E.$$

Důsledek (o druhém duálu). *Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze. Zobrazení $E : U \to (U^*)^*$ definované pro $\mathbf{u} \in U$ a $f \in U^*$ předpisem*

$$E(\mathbf{u})(f) = f(\mathbf{u})$$

je lineární izomorfismus.

Důkaz. Podle předchozí věty k bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru U lze najít duální bázi $(f^1, \ldots, f^n)$ prostoru U^*. Ukážeme, že $\big(E(\mathbf{u}_1), \ldots, E(\mathbf{u}_n)\big)$ tvoří duální bázi k $(f^1, \ldots, f^n)$. Platí totiž

$$E(\mathbf{u}_i)(f^j) = f^j(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Tedy E je lineární izomorfismus. □

Od tohoto okamžiku budeme považovat prostory U a $(U^*)^*$ za totožné.
Zobrazení $(\ ,\ ) : U \times U^* \to \mathbb{K}$ definované

$$(\mathbf{u}, f) = f(\mathbf{u})$$

je bilineární a někdy se nazývá *dualita.*

4.4. Duální lineární zobrazení. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení. Zobrazení $\varphi^* : V^* \to U^*$ definované pro $g \in V^*$ a $\mathbf{u} \in U$ předpisem

$$\varphi^*(g)(\mathbf{u}) = g\big(\varphi(\mathbf{u})\big)$$

se nazývá *duální lineární zobrazení* k zobrazení φ.

Poznámka. Pomocí dualit $(\ ,\ )_U : U \times U^* \to \mathbb{K}$ a $(\ ,\ )_V : V \times V^* \to \mathbb{K}$ lze definici psát

$$\big(\mathbf{u}, \varphi^*(g)\big)_U = \big(\varphi(\mathbf{u}), g\big)_V,$$

což formálně připomíná definici adjungovaného zobrazení, kde skalární součiny jsou nahrazeny dualitami. Výhodou tohoto zápisu je jeho symetrie a lepší přehlednost.

Příklad. Nechť $\varphi : U \to U$ je zobrazení $\varphi(\mathbf{u}) = 3\mathbf{u}$. Vypočtěte $\varphi^* : U^* \to U^*$ z definice.

Platí

$$\Big(\varphi^*(g)\Big)(\mathbf{u}) = g\big(\varphi(\mathbf{u})\big) = g(3\mathbf{u}) = 3g(\mathbf{u}).$$

Tedy $\varphi^*(g) = 3g$.

Věta (o matici duálního zobrazení)**.** *Nechť vektorové prostory U a V mají báze α, β. V duálních prostorech U^* a V^* uvažujme duální báze α^* a β^*. Potom pro matice lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$ a jeho duálního zobrazení $\varphi^* : V^* \to U^*$ platí*

$$(\varphi^*)_{\alpha^*\beta^*} = (\varphi)^\top_{\beta\alpha}.$$

Důkaz. Označme $(\varphi)_{\beta\alpha} = A = (a_{ij})$, $(\varphi^*)_{\alpha^*\beta^*} = B = (b_{ij})$. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, $\alpha^* = (f^1, \ldots, f^n)$, $\beta^* = (g^1, \ldots, g^k)$. Pro $1 \le i \le n$ a $1 \le j \le k$ platí

$$\big(\mathbf{u}_i, \varphi^*(g^j)\big) = \big(\varphi(\mathbf{u}), g^j\big)\,.$$

Výraz vpravo je j-tá souřadnice vektoru $\varphi(\mathbf{u}_i)$ v bázi β, tedy a_{ji}. Výraz vlevo je roven i-té souřadnici formy $\varphi^*(g^j)$ v bázi α^*, což je podle definice b_{ij}. Tím jsme dokázali

$$b_{ij} = a_{ji},$$

tedy $B = A^\top$. □

4.5. Tenzorový součin vektorových prostorů. Nechť U_1, U_2, …, U_n jsou vektorové prostory konečné dimenze. Jejich *tenzorový součin* definujeme jako vektorový prostor všech n-lineárních zobrazení z $U_1^* \times U_2^* \times \cdots \times U_n^*$ do $\mathbb{K}$, tj.

$$U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n = \mathrm{Lin}_n(U_1^* \times U_2^* \times \cdots \times U_n^*, \mathbb{K}).$$

Současně definujeme zobrazení

$$t : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n,$$

$$t(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n$$

předpisem

$$\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n(f^1, f^2, \dots, f^n) = (\mathbf{u}_1, f^1) \cdot (\mathbf{u}_2, f^2) \cdots (\mathbf{u}_n, f^n),$$

kde $(f^1, f^2, \dots, f^n) \in U_1^* \times U_2^* \times \cdots \times U_n^*$. Z této definice není těžké dokázat, že zobrazení t je n-lineární, tj.

$$\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes (a\mathbf{u}_i + b\mathbf{v}_i) \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n = a\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_i \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n + b\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_i \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n.$$

Příklad. Nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ jsou dva vektory v $\mathbb{R}^3$. $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ je bilineární zobrazení $(\mathbb{R}^3)^* \times (\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R}$. Vyčíslete jej na formách $f = (3, 0, 1)$ a $g = (4, 5, -2)$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}(f, g) &= f(\mathbf{u}) \cdot g(\mathbf{v}) = (3, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4, 5, 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (3 + 0 + 3) \cdot (-4 + 15 + 2) = 6 \cdot 13 = 78. \end{aligned}$$

Příklad. Nechť vektorový prostor U má bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ a nechť (f^1, f^2, f^3) je duální báze v U^*. Vyčíslete tenzor $(f^1 + f^2) \otimes \mathbf{u}_1 \otimes (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) \in U^* \otimes U \otimes U$ na trojici $(2\mathbf{u}_2, f^1 + f^3, 2f^2 - f^3) \in U \times U^* \times U^*$.

Řešení: Platí

$$(f^1 + f^2) \otimes \mathbf{u}_1 \otimes (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)(2\mathbf{u}_2, f^1 + f^3, 2f^2 - f^3) =$$

$$\begin{aligned} &= (f^1 + f^2)(2\mathbf{u}_2) \cdot (f^1 + f^3)(\mathbf{u}_1) \cdot (2f^2 - f^3)(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) \\ &= (0 + 2)(1 + 0)(2 + 0 + 0 - 1) = 2. \end{aligned}$$

Věta (o bázi tenzorového součinu). *Nechť* $(\mathbf{u}_{i1}, \dots, \mathbf{u}_{ik_i})$ *je báze vektorového prostoru* U_i. *Potom všechny možné tenzorové součiny vektorů*

$$\mathbf{u}_{1i_1} \otimes \mathbf{u}_{2i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{ni_n}$$

tvoří bázi tenzorového součinu $U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n$.

Tedy $\dim(U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n) = \dim U_1 \cdot \dim U_2 \cdots \dim U_n$.

Důkaz. Pro zjednodušení zápisu provedeme důkaz pouze pro $n = 2$. Položme $U_1 = U$, $U_2 = V$ a uvažujme bázi $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ v U a bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ ve V a jejich duální báze $(f^1, \dots, f^k)$ v U^* a $(g^1, \dots, g^m)$ ve V^*.

Každé $\Phi \in \mathrm{Lin}_2(U \times V, \mathbb{K})$ lze psát ve tvaru

$$\Phi = \sum_{i,j} \Phi(f^i, g^j)\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j,$$

neboť bilineární formy na obou stranách mají shodné hodnoty na dvojicích (f^r, g^s). Dále nechť

$$\sum_{i,j} a^{ij}\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j = 0.$$

Dosazením dvojice (f^r, g^s) dostaneme $a^{rs} = 0$. Tedy bilineární formy $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ jsou lineárně nezávislé. $\square$

4.6. Univerzální vlastnost tenzorového součinu. Následující věta nám umožňuje studovat místo multilineárních zobrazení na součinu $U_1 \times \cdots \times U_n$ lineární zobrazení na tenzorovém součinu $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$.

Věta (Univerzální vlastnost tenzorového součinu)**.** *Nechť Φ je n-lineární zobrazení z $U_1 \times \cdots \times U_n$ do vektorového prostoru V. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi : U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to V$ tak, že*

$$\varphi(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n) = \Phi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n),$$

tj. následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd}
U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \arrow[r, "\exists!\varphi"] & V \\
U_1 \times \cdots \times U_n \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Důkaz. Pro zjednodušení pracujme opět s $n = 2$. Nechť $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je báze U_1, $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ báze U_2. Z požadavků na φ plyne, že ho není možno definovat jinak než

$$\varphi\Bigg(\sum_{i,j} a^{ij}\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j\Bigg) = \sum_{i,j} a^{ij}\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j).$$

Takové φ je lineární a pro $\mathbf{u} = \sum_i a^i\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v} = \sum_j b^j\mathbf{v}_j$ platí

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \varphi\Bigg(\Bigg(\sum_i a^i\mathbf{u}_i\Bigg) \otimes \Bigg(\sum_j b^j\mathbf{v}_j\Bigg)\Bigg) = \varphi\Bigg(\sum_{i,j} a^i b^j\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j\Bigg) = \\
&= \sum_{i,j} a^i b^j \Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \Phi\Bigg(\sum_i a^i\mathbf{u}_i, \sum_j b^j\mathbf{v}_j\Bigg) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

$\square$

Následující tvrzení říká, že tenzorový součin je svou univerzální vlastností určen až na izomorfismus jednoznačně.

Věta (o jednoznačnosti tenzorového součinu). *Nechť S je vektorový prostor a nechť $s : U_1 \times \cdots \times U_n \to S$ je n-lineární zobrazení, které má stejnou vlastnost jako zobrazení $t : U_1 \times \cdots \times U_n \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ z předchozí věty. Potom existuje právě jeden izomorfismus $\sigma : U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to S$ a k němu inverzní $\tau : S \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ tak, že komutuje diagram*

$$\begin{tikzcd}
U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \arrow[r, shift left, "\sigma"] & S \arrow[l, shift left, "\tau"] \\
U_1 \times \cdots \times U_n \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Důkaz. Provedeme pouze náznak. Existence lineárního zobrazení σ plyne z univerzální vlastnosti t, existence lineárního zobrazení τ plyne z univerzální vlastnosti zobrazení s. Identity $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}$, $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}$ se dokáží dalším použitím předchozí věty (především jejím tvrzením o jednoznačnosti). □

Poznámka. Existují i jiné definice tenzorového součinu vektorových prostorů, než je ta, kterou jsme použili. Podle předchozího tvrzení lze však vždy ukázat, že jsou na prostorech konečné dimenze ekvivalentní.

Jedna z možností je tato:

$$U \otimes V = T/T_0,$$

kde T je vektorový prostor všech formálních lineárních kombinací dvojic $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V$ (pro $\mathbb{K}$ nekonečné a U, V netriviální nemá T konečnou dimenzi!) a T_0 je jeho podprostor generovaný prvky

$$\begin{gathered}
(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \\
(\mathbf{u}, a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)
\end{gathered}$$

Zobrazení $t : U \times V \to T/T_0$ je $t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [(\mathbf{u}, \mathbf{v})]$.

4.7. Asociativita a komutativita tenzorového součinu. Z věty o jednoznačnosti tenzorového součinu plyne, že existuje právě jeden lineární izomorfismus

$$\sigma : U_1 \otimes U_2 \otimes U_3 \to (U_1 \otimes U_2) \otimes U_3$$

takový, že

$$\sigma(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{u}_3.$$

Obdobně pro každou permutaci ω množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ existuje právě jeden lineární izomorfismus

$$\sigma : U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n \to U_{\omega(1)} \otimes U_{\omega(2)} \otimes \cdots \otimes U_{\omega(n)}$$

takový, že

$$\sigma(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_{\omega(1)} \otimes \mathbf{u}_{\omega(2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{\omega(n)}.$$

4.8. Tenzorový součin lineárních zobrazení. Nechť $\phi_i : U_i \to V_i$ jsou lineární zobrazení. Potom zobrazení

$$U_1 \times \cdots \times U_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,$$

definované předpisem $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \mapsto \phi_1(\mathbf{u}_1) \otimes \cdots \otimes \phi_n(\mathbf{u}_n)$, je n-lineární a podle věty o univerzální vlastnosti tenzorového součinu existuje právě jedno lineární zobrazení

$$\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n : U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

takové, že

$$\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n(\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n) = \phi_1(\mathbf{u}_1) \otimes \cdots \otimes \phi_n(\mathbf{u}_n).$$

Nyní se podíváme na to, jak vypadá matice tenzorového součinu lineárních zobrazení v zadaných bazích. Nechť $\alpha_1 = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je báze U_1 a $\alpha_2 = (\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_m)$ je báze U_2. Označme $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ bázi $U_1 \otimes U_2$ tvořenou vektory $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}'_j$. Uspořádejme ji tak, že $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}'_j$ předchází $\mathbf{u}_r \otimes \mathbf{u}'_s$ právě tehdy, když $i < r$ nebo $i = r$ a $j < s$.

Příklad. Nechť $\alpha_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, $\alpha_2 = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2)$. Potom $\alpha_1 \otimes \alpha_2 = (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}'_2)$.

Definice. Nechť A je matice tvaru $k \times r$ a B matice tvaru $m \times s$. Potom $A \otimes B$ je matice tvaru $k \cdot m \times r \cdot s$,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{22}B & \ldots & a_{1r}B \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}B & a_{k2}B & \ldots & a_{kr}B \end{pmatrix}$$

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 12 & 15 \\ 6 & 7 & 12 & 14 & 18 & 21 \\ -4 & -5 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ -6 & -7 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Věta (o matici tenzorového součinu lineárních zobrazení). *Nechť U_1, U_2, V_1, V_2 s bázemi postupně α_1, α_2, β_1, β_2. Nechť $\varphi : U_1 \to V_1$ je lineární zobrazení s maticí A v bazích α_1, β_1 a nechť $\psi : U_2 \to V_2$ je lineární zobrazení s maticí B v bazích α_2, β_2. Potom matice lineárního zobrazení $\varphi \otimes \psi : U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2$ v bazích $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ a $\beta_1 \otimes \beta_2$ je $A \otimes B$.*

Důkaz. Nechť $\alpha_1 = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$, $\alpha_2 = (\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_m)$, $\beta_1 = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$, $\beta_2 = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_s)$. Napišme vektor $(\varphi \otimes \psi)(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}'_j)$ jako lineární kombinaci vektorů báze $\beta_1 \otimes \beta_2$

$$\begin{aligned} (\varphi \otimes \psi)(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}'_j) &= \varphi(\mathbf{u}_i) \times \psi(\mathbf{u}'_j) = \left(\sum_{p=1}^{r} a_{pi}\mathbf{v}_p \right) \otimes \left(\sum_{q=1}^{n} b_{qj}\mathbf{v}'_q \right) = \\ &= \sum_{p,q} a_{pi}b_{qj}\mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}'_q \end{aligned}$$

To znamená, že v řádku (p, q) a sloupci (i, j) matice zobrazení $(\varphi \otimes \psi)$ bude stát

$$a_{pi}b_{qj} = (A \otimes B)_{(pq)(ij)}.$$

□

4.9. Tenzorový součin a dualita. Multilineární zobrazení

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto a_1 a_2 \cdots a_n$$

určuje podle univerzální vlastnosti tenzorového součinu nenulové lineární zobrazení

$$\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K},$$

které je izomorfismem, neboť dimenze obou prostorů jsou rovny 1.

Podle předchozího paragrafu existuje n-lineární zobrazení

$$U_1^* \times U_2^* \times \cdots \times U_n^* = \mathrm{Hom}(U_1, \mathbb{K}) \times \cdots \times \mathrm{Hom}(U_n, \mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n, \mathbb{K}) = (U_1 \otimes \cdots \otimes U_n)^*,$$

přiřazující n-tici lineárních forem $(f_1, \dots, f_n)$ z $U_1^* \times \cdots \times U_n^*$ lineární formu na $U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n$ s hodnotou na $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_n$ rovnou

$$f_1(\mathbf{u}_1) f_2(\mathbf{u}_2) \dots f_n(\mathbf{u}_n).$$

Podle univerzální vlastnosti tenzorového součinu indukuje toto multilineární zobrazení lineární zobrazení

$$d : U_1^* \otimes U_2^* \otimes \cdots \otimes U_n^* \to (U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n)^*.$$

Toto zobrazení je izomorfismus, neboť dimenze obou prostorů jsou stejné a duální báze k bázi s prvky $\mathbf{u}_{1i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{ni_n}$ v $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ je dána prvky $d(f^{1i_1} \otimes \cdots \otimes f^{ni_n})$, kde $(f^{j1}, \dots, f^{jk_j})$ je duální báze k $(\mathbf{u}_{j1}, \dots, \mathbf{u}_{jk_j})$.

4.10. Izomorfismus mezi $\mathrm{Hom}(U, V)$ **a** $U^* \otimes V$**.** Uvažujme bilineární zobrazení

$$U^* \times V \to \mathrm{Hom}(U, V)$$

definované předpisem

$$(f, \mathbf{v}) \longmapsto \Big(\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u})\mathbf{v}\Big).$$

Podle univerzální vlastnosti tenzorového součinu toto zobrazení indukuje lineární zobrazení

$$U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V).$$

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze U s duální bazí $(f^1, \dots, f^n)$ a nechť $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze prostoru V. Prostor $\mathrm{Hom}(U, V)$ je izomorfní s prostorem matic tvaru $\dim U \times \dim V$ a má tudíž stejnou dimenzi jako prostor $U^* \otimes V$.

Ukážeme, že výše uvedené zobrazení je surjektivní. K $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$ s maticí $(\varphi)_{\beta\alpha} = (a_{ij})$ přiřaďme prvek $U^* \otimes V$

$$\sum_{i,j} a_{ij} f^j \otimes \mathbf{v}_i.$$

Potom tento prvek definuje lineární zobrazení, které na bázi α má hodnoty

$$\mathbf{u}_s \mapsto \sum_{i,j} a_{ij} f^j(\mathbf{u}_s)\mathbf{v}_i = \sum_{i,j} a_{is}\mathbf{v}_i = \varphi(\mathbf{u}_s).$$

Tedy výše definované zobrazení $U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V)$ je izomorfismus.

4.11. Tenzorová algebra vektorového prostoru. Tenzorový součin p kopií duálního prostoru U^* a q kopií prostoru U se označuje

$$T_p^q(U) = \underbrace{U^* \otimes \cdots \otimes U^*}_{p} \otimes \underbrace{U \otimes \cdots \otimes U}_{q}.$$

Jeho prvky se nazývají tenzory typu (p, q).

Položme $T_0^0(U) = \mathbb{K}$. Potom tenzorová algebra vektorového prostoru U je direktní součet vektorových prostorů

$$T(U) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} T_p^q(U) = \bigcup_{r=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{p+q=r} T_p^q(U) \Big)$$

(kde výraz vpravo je definicí direktního součtu nekonečně mnoha sčítanců). To je opět vektorový prostor, i když nekonečné dimenze. Na něm můžeme definovat tenzorové násobení tenzorů

$$t \in T_{p_1}^{q_1}(U) = \mathrm{Lin}_{p_1+q_1}(U \times \cdots \times U \times U^* \times \cdots \times U^*, \mathbb{K})$$

a

$$s \in T_{p_2}^{q_2}(U) = \mathrm{Lin}_{p_2+q_2}(U \times \cdots \times U \times U^* \times \cdots \times U^*, \mathbb{K})$$

jako tenzor

$$t \otimes s \in T_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}(U) = \mathrm{Lin}_{p_1+p_2+q_1+q_2}(U \times \cdots \times U \times U^* \times \cdots \times U^*, \mathbb{K})$$

předpisem

$$t \otimes s(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{p_1+p_2}, f^1, \dots, f^{q_1+q_2}) =$$
$$= t(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{p_1}, f^1, \dots, f^{q_1}) \cdot s(\mathbf{u}_{p_1+1}, \dots, \mathbf{u}_{p_1+p_2}, f^{q_1+1}, \dots, f^{q_1+q_2}).$$

Příklad. Součinem tenzorů

$$2f^1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 - 3f^2 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3, \qquad 4f^3 \otimes \mathbf{u}_3 - f^2 \otimes \mathbf{u}_1$$

je tenzor

$$(2f^1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 - 3f^2 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3) \otimes (4f^3 \otimes \mathbf{u}_3 - f^2 \otimes \mathbf{u}_1) =$$
$$= 8f^1 \otimes f^3 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3 - 2f^1 \otimes f^2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1$$
$$-12f^2 \otimes f^3 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3 + 3f^2 \otimes f^2 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_1.$$

4.12. Kontrakce i-té a j-té složky je lineární zobrazení

$$T_p^q(U) \to T_{p-1}^{q-1}$$

definované předpisem

$$f^1 \otimes f^2 \otimes \cdots \otimes f^p \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_q \mapsto f^i(\mathbf{u}_j f^1 \otimes f^2 \otimes \cdots \otimes \widehat{f^i} \otimes \cdots \otimes f^p \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\mathbf{u}}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_q,$$

kde $\widehat{\ }$ značí vynechání příslušného symbolu. Speciálně kontrakce

$$U^* \otimes U \to \mathbb{K}$$

je

$$f \otimes \mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}).$$

Příklad. Vypočtěte kontrakci tenzoru t z $T_1^2(U)$ podle prvních složek,

$$t = f^1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + 4f^2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_3 - 8f^3 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_1.$$

Řešení: Výsledný tenzor leží v $T_0^1(U)$ a je to vektor

$$f^1(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2 + 4f^2(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_3 - 8f^3(\mathbf{u}_3)\mathbf{u}_1 = 1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_3 - 8\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - 8\mathbf{u}_1.$$

4.13. Souřadnice tenzorů. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze prostoru U a $\alpha^* = (f^1, \dots, f^n)$ duální báze v prostoru U^*. Potom všechny prvky tvaru

$$f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_p} \otimes \mathbf{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{i_q}$$

tvoří bázi prostoru $T_p^q(U)$ a každý tenzor $t \in T_p^q(U)$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_q \\ j_1,\dots,j_p}} t^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_p} \otimes \mathbf{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{i_q}.$$

Čísla $t^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} \in \mathbb{K}$ nazýváme souřadnicemi tenzoru $t \in T_p^q(U)$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Všimněte si, že dolní index p značí počet dolních indexů, zatímco horní index q značí počet horních indexů u souřadnic.

Každý vektor $\mathbf{u} \in U$ je tenzorem typu $(0,1)$, neboť

$$T_0^1(U) = U.$$

Jeho souřadnice v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ budeme zapisovat pomocí horních indexů

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n a^i u_i.$$

Každá lineární forma $f \in U^*$ je tenzorem typu $(1,0)$, neboť

$$T_1^0(U) = U^*.$$

Její souřadnice v duální bázi $\alpha^* = (f^1, \dots, f^n)$ budeme zapisovat pomocí dolních indexů

$$f = \sum_{j=1}^n a_j f^j.$$

Každá bilineární forma g na U je tenzorem typu $(2,0)$, neboť

$$T_2^0(U) = U^* \otimes U^* \simeq \mathrm{Lin}_2(U \times U, \mathbb{K}).$$

Její souřadnice v bázi $\alpha^* \otimes \alpha^* = (f^i \otimes f^j)_{i,j}$ budeme zapisovat pomocí dolních indexů

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} f^i \otimes f^j.$$

Každé lineární zobrazení $\varphi : U \to U$ je tenzorem typu $(1,1)$, neboť

$$T_1^1(U) = U^* \otimes U \simeq \mathrm{Hom}(U, U).$$

Jeho souřadnice v bázi $\alpha^* \otimes \alpha$ budeme zapisovat takto:

$$\varphi = \sum_{i,j} a^i_j f^j \otimes u_i.$$

Ukážeme, že matice lineárního zobrazení $\varphi : U \to U$ v bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (a^i_j)_{i,j=1}^n,$$

kde i označuje řádek a j sloupec. Platí totiž, že v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je i-tá souřadnice vektoru $\varphi(\mathbf{u}_j)$, tj.

$$\begin{aligned} f^i(\varphi(\mathbf{u}_j)) &= f^i\left(\sum_{r,s} a^r_s f^s \otimes \mathbf{u}_r\right)(\mathbf{u}_j) = \\ &= f^i\left(\sum_{r,s} a^r_s f^s(\mathbf{u}_j)\mathbf{u}_r\right) = \\ &= \sum_{r,s} a^r_s f^s(\mathbf{u}_j) f^s(\mathbf{u}_r) = a^i_j \end{aligned}$$

Od této chvíle budeme tedy v kapitole o multilineární algebře značit matice zobrazení jako (a^i_j), kde i značí řádek a j sloupec.

Násobení tenzorů lze v souřadnicích popsat takto:

$$(t \otimes s)^{i_1 \dots i_{q_1+q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1+p_2}} = t^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} s^{i_{q_1+1} \dots i_{q_1+q_2}}_{j_{p_1+1} \dots j_{p_1+p_2}}.$$

Kontrakce l-té a k-té složky tenzoru t je tenzor o souřadnicích

$$s^{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_q}_{j_1 \dots \widehat{j_l} \dots j_p} = \sum_{m=1}^{n} t^{i_1 \dots m \dots i_q}_{j_1 \dots m \dots j_p}.$$

Ve fyzice, ale i v diferenciální geometrii, se často při zápisu kontrakce využívá konvence, že v případě součtu přes stejný horní a dolní index tenzoru se sumační znak $\sum$ vynechává. Tedy $a^i_j x^j$ značí $\sum_j a^i_j x^j$, $g_{ij}x^i x^j$ značí $\sum_{i,j} g_{ij} x^i x^j$ a podobně.

Vyčíslení bilineárního zobrazení $g : U \times U \to \mathbb{K}$ na dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ je postupně součin tenzorů $g \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ a následná kontrakce prvních a druhých složek. V souřadnicích

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \left(\sum g_{ij} f^i \otimes f^j\right)\left(\sum a^s \mathbf{u}_s, \sum b^t \mathbf{u}_t\right) \\ &= \sum_{i,j,t,s} g_{ij} a^s b^t f^i(\mathbf{u}_s) f^j(\mathbf{u}_t) = \sum_{i,j} g_{ij} a^i b^j. \end{aligned}$$

Vyčíslení lineárního zobrazení $\varphi : U \to U$ na vektoru $\mathbf{u} \in U$ je postupně součin tenzorů $\varphi \otimes \mathbf{u} \in U^* \otimes U \otimes U$ a kontrakce mezi první a druhou složkou. V souřadnicích

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}) &= \left(\sum_{i,j} a^i_j f^j \otimes \mathbf{u}_i\right)\left(\sum_s x^s \mathbf{u}_s\right) \\ &= \sum_{i,j,s} a^i_j x^s f^j(\mathbf{u}_s)\mathbf{u}_i = \sum_i \left(\sum_j a^i_j x^j\right)\mathbf{u}_i \end{aligned}$$

Souřadnice výsledného vektoru jsou tedy $\sum_j a^i_j x^j$.

Kroneckerův tenzor δ je prvkem $U^* \otimes U$, který odpovídá identickému zobrazení z $\mathrm{Hom}(U, U)$. Jeho souřadnice v libovolné bázi jsou

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

4.14. Souřadnice tenzorů při změně báze. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze prostoru U s duální bazí $\alpha^* = (f^1, \ldots, f^n)$ prostoru U^* a nechť $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je jiná báze prostoru U s duální bazí $\beta^* = (g^1, \ldots, g^n)$. Nechť $A = (a^i_j)$, i značí řádky, j značí sloupce, je matice přechodu od báze α k bázi β, tj. $A = (\mathrm{id})_{\beta\alpha}$,

$$\mathbf{u}_k = \sum_i \mathbf{v}_i a^i_k.$$

Nechť $B = (b^i_j)$ je matice taková, že

$$f^l = \sum_j b^l_j g^j = \sum_j g^j b^l_j.$$

(Uvědomte si, že to znamená, že $B^\top = (\mathrm{id})_{\beta^*\alpha^*}$!)

Vyčíslíme-li f^l na $\mathbf{u}_k$ dosazením z prvého vztahu do druhého, dostaneme

$$\begin{aligned} \delta^l_k &= f^l(\mathbf{u}_k) = \sum_j b^l_j g^j \left(\sum_i \mathbf{v}_i a^i_k \right) \\ &= \sum_{j,i} b^l_j a^i_k g^j(\mathbf{v}_i) = \sum_j b^l_j a^j_k. \end{aligned}$$

Tedy $B = A^{-1}$, $B = (\mathrm{id})_{\alpha\beta}$.

Věta. *Nechť $t \in T^q_p(U)$ je tenzor o souřadnicích $t^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}$ v bázi α. Jeho souřadnice v bázi β jsou při použití sumační konvence*

$$\overline{t}^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p} = a^{i_1}_{k_1} a^{i_2}_{k_2} \ldots a^{i_q}_{k_q} t^{k_1 k_2 \ldots k_q}_{l_1 l_2 \ldots l_p} b^{l_1}_{j_1} b^{l_2}_{j_2} \ldots b^{l_p}_{j_p}$$

(Sčítáme tedy přes všechny indexy $k_1, \ldots, k_q, l_1, \ldots, l_p$.)

Důkaz. Provedeme jej pro $q = p = 2$. Tenzor t vyjádřen v souřadnicích β je

$$t = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2} \overline{t}^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} g^{j_1} \otimes g^{j_2} \otimes \mathbf{v}_{i_1} \otimes \mathbf{v}_{i_2}$$

Vyjádření v souřadnicích β můžeme dostat z vyjádření v souřadnicích α takto:

$$\begin{aligned} t &= \sum_{k_1,k_2,l_1,l_2} t^{k_1 k_2}_{l_1 l_2} f^{l_1} \otimes f^{l_2} \otimes \mathbf{u}_{k_1} \otimes \mathbf{u}_{k_2} \\ &= \sum_{k_1,k_2,l_1,l_2} t^{k_1 k_2}_{l_1 l_2} \left(\sum_{j_1} b^{l_1}_{j_1} g^{j_1} \right) \otimes \left(\sum_{j_2} b^{l_2}_{j_2} g^{j_2} \right) \otimes \left(\sum_{i_1} a^{k_1}_{i_1} \mathbf{v}_{i_1} \right) \otimes \left(\sum_{i_2} a^{k_2}_{i_2} \mathbf{v}_{i_2} \right) \\ &= \sum_{j_1,j_2,i_1,i_2} \left(\sum_{k_1,k_2,l_1,l_2} t^{k_1 k_2}_{l_1 l_2} a^{i_1}_{k_1} a^{i_2}_{k_2} b^{l_2}_{j_1} b^{l_2}_{j_1} \right) g^{j_1} \otimes g^{j_2} \otimes \mathbf{v}_{i_1} \otimes \mathbf{v}_{i_2}. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů v obou vyjádřeních dostaneme tvrzení věty. □

Příklad. Nechť $\mathbf{u}$ je vektor se souřadnicemi x^i v bázi α a $\overline{x}^i$ v bázi β. Podle předchozí věty

$$\overline{x}^i = \sum_k a^i_k x^k$$

Tedy

$$(\mathbf{u})_\beta = A(\mathbf{u})_\alpha = (\mathrm{id})_{\beta\alpha}(\mathbf{u})_\alpha,$$

což je nám známo již z dřívějška.

Příklad. Nechť f je lineární forma se souřadnicemi y_j v bázi α^* a souřadnicemi $\overline{y}_j$ v bázi β^*. Podle předchozí věty

$$\overline{y}_j = \sum_l y_l b^l_j$$

Tedy

$$(f)_{\beta^*} = B^\top (f)_{\alpha^*} = (\mathrm{id})_{\beta^*\alpha^*}(f)_{\alpha^*}$$

Příklad. Lineární zobrazení $\varphi : U \to U$ je tenzor typu (1,1). Jeho matice $(\varphi)_{\alpha\alpha} = (t^i_j)$ je zadána souřadnicemi tohoto tenzoru. Podle předchozí věty jsou jeho souřadnice v bázi β

$$\overline{t}^i_j = \sum_{i,j} a^i_k t^k_l b^l_j = \sum_k a^i_k \Bigg(\sum_l t^k_l b^l_j \Bigg),$$

maticově

$$(\varphi)_{\beta\beta} = A(\varphi)_{\alpha\alpha}B = A(\varphi)_{\alpha\alpha}A^{-1} = (\mathrm{id})_{\beta\alpha}(\varphi)_{\alpha\alpha}(\mathrm{id})_{\alpha\beta},$$

což je nám již známý vztah pro transformaci matice zobrazení.

Příklad. Bilineární forma na U je tenzor typu (2,0). Matice této formy je dána souřadnicemi tenzoru (t_{ij}) (i značí řádek, j sloupec). Podle předchozí věty

$$\overline{t}_{ij} = \sum_{k,l} t_{kl} b^k_i b^l_j = \sum_k b^k_i \Bigg(\sum_l t_{kl} b^l_j \Bigg),$$

maticově

$$\overline{T} = B^\top T B = (\mathrm{id})^\top_{\alpha\beta} T (\mathrm{id})_{\alpha\beta},$$

což je nám již z dřívějška známý vztah pro transformaci matice bilineární formy.

Příklad. Nechť V je vektorový prostor s bazí $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a duální bazí (f^1, f^2). Vyjádřete tenzor

$$f^1 \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \in T^1_1(V)$$

v bázi $(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2})$ a duální bázi $(\overline{f^1}, \overline{f^2})$, jestliže

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: Platí

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A.$$

Chceme vyjádřit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ pomocí $\overline{\mathbf{e}_1}$, $\overline{\mathbf{e}_2}$ a f^1, f^2 pomocí $\overline{f^1}$, $\overline{f^2}$. Z předchozí rovnice okamžitě dostáváme

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2})A^{-1} = (\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dále hledáme vyjádření ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \overline{f^1} \\ \overline{f^2} \end{pmatrix}.$$

Platí

$$E = \big(f^i(\mathbf{e}_j)\big) = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = B \begin{pmatrix} \overline{f^1} \\ \overline{f^2} \end{pmatrix} (\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}) A^{-1} = B \cdot E A^{-1} = B \cdot A^{-1}.$$

Tedy musí být $B = A^{-1}$, proto

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{f^1} \\ \overline{f^2} \end{pmatrix}.$$

Odtud dosadíme do našeho tenzoru

$$\begin{aligned} f^1 \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) &= (\overline{f^1} + \overline{f^2}) \otimes (-2\overline{\mathbf{e}_1} + 3\overline{\mathbf{e}_2} + \overline{\mathbf{e}_1} - \overline{\mathbf{e}_2}) \\ &= (\overline{f^1} + \overline{f^2}) \otimes (-\overline{\mathbf{e}_1} + 2\overline{\mathbf{e}_2}) \\ &= -\overline{f^1} \otimes \overline{\mathbf{e}_1} - \overline{f^2} \otimes \overline{\mathbf{e}_1} + 2\overline{f^1} \otimes \overline{\mathbf{e}_2} + 2\overline{f^2} \otimes \overline{\mathbf{e}_2}. \end{aligned}$$

4.15. Tenzory ve fyzice, jiná definice tenzoru. Předchozí věta o transformaci souřadnic tenzoru při změně báze nám umožňuje porozumět tomu, jak jsou tenzory chápány ve fyzice.

Tenzor typu (p, q) nad vektorovým prostorem U každé bázi α v U přiřazuje n^{p+q}-tici čísel $t^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \in \mathbb{K}$, přičemž při změně báze probíhá transformace těchto čísel podle věty z předchozího paragrafu.

4.16. Povýšení a snížení tenzoru. Každý izomorfismus $g : U \to U^*$ indukuje zobrazení

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{U^*} \otimes \dots \otimes g \otimes \dots \otimes \mathrm{id}_U : T^q_p(U) \quad &\to \quad T^{q-1}_{p+1}(U), \\ f^1 \otimes f^2 \otimes \dots \otimes f^p \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_q \quad &\longmapsto \quad f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g(\mathbf{u}_1) \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_q \end{aligned}$$

$q \geq 1$, které nazýváme snížení indexu. g můžeme považovat za tenzor z $U^* \otimes U^*$ (tedy bilineární formu na U). V souřadnicích má výše uvedené zobrazení formu

$$t^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \longmapsto t^{i_2 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p i_1} = g_{k i_1} t^{k i_2 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}.$$

Speciálně převádí vektor o souřadnicích a^j na lineární formu o souřadnicích

$$a_i = g_{ji} a^j.$$

Nechť $g^{-1} : U^* \to U$ je inverzní zobrazení ke $g : U \to U^*$. To indukuje zobrazení

$$\mathrm{id}_{U^*} \otimes \dots \otimes g^{-1} \otimes \dots \otimes \mathrm{id}_U : T^q_p(U) \to T^{q+1}_{p-1}(U),$$

$p \geq 1$, které nazýváme povýšení indexu. g^{-1} můžeme považovat za tenzor z $(U^*)^* \otimes U \simeq U \otimes U$ o souřadnicích g^{ij}.

Jestliže snížíme index tenzoru $g^{-1} \in U \otimes U$, musíme dostat Kroneckerův tenzor δ, neboť $g \circ g^{-1} = \mathrm{id}$,

$$\delta^k_j = g_{jl} g^{kl}.$$

g^{kl} je tedy inverzní matice k matici g_{jl}, pokud k značí sloupce a l řádky. V praktických úlohách jsou matice (g_{jl}) a (g^{kl}) symetrické.

Povýšení indexu v souřadnicích nyní definujeme

$$t^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \longmapsto t^{j_p i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_{p-1}} = g^{l j_p} t^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_{p-1} l}.$$

Příklad. Nechť na prostoru V s bazí $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ a duální bazí (f^1, f^2, f^3, f^4) je dán skalární součin maticí

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Snižte index tenzoru $f^1 \otimes \mathbf{e}_3 + f^2 \otimes \mathbf{e}_4$.

Skalární součin je tenzor $g \in U^* \otimes U^*$, $g = g_{ij} f^i \otimes f^j$, kde g_{ij} jsou prvky matice G. Tento tenzor určuje rovněž lineární zobrazení $\varphi : (U^*)^* = U \to U^*$, jehož matice je opět G v bazích $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ a (f^1, f^2, f^3, f^4).

Hledaný tenzor je tedy

$$\begin{aligned} f^1 \otimes \varphi(\mathbf{e}_3) + f^2 \otimes \varphi(\mathbf{e}_4) &= f^1 \otimes (f^3 + f^4) + f^2 \otimes (f^3 + 2f^4) \\ &= f^1 \otimes f^3 + f^1 \otimes f^4 + f^2 \otimes f^3 + 2f^2 \otimes f^4. \end{aligned}$$

Tento tenzor můžeme rovněž najít pomocí výše uvedeného vzorce pro souřadnice

$$t_{ji} = g_{ki} t_j^k$$

$$\begin{aligned} t_{13} &= g_{k3} t_1^k = g_{33} t_1^3 = 1 \\ t_{12} &= g_{k2} t_1^k = g_{32} t_1^3 = 0 \\ t_{24} &= g_{k4} t_2^k = g_{44} t_2^4 = 2 \text{ atd.} \end{aligned}$$

4.17. Symetrické tenzory. Nechť od této chvíle je $\mathbb{K}$ pole charakteristiky 0. Grupu permutací množiny $\{1, 2, \ldots, q\}$ označme $\mathcal{S}_q$. Podle univerzální vlastnosti tenzorového součinu existuje pro každou permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_q$ izomorfismus

$$\rho_\sigma : T_0^q(U) \to T_0^q(U)$$

takový, že

$$\rho_\sigma(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_q) = \mathbf{u}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{u}_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{\sigma(q)}.$$

Tenzor $t \in T_0^q(U)$ se nazývá *symetrický*, jestliže $\rho_\sigma(t) = t$ pro všechny permutace $\sigma \in \mathcal{S}_q$. Symetrické tenzory tvoří vektorový podprostor v prostoru $T_0^q(U)$, který budeme označovat $S^q(U)$. Tenzor zadaný souřadnicemi $t^{i_1 i_2 \dots i_q}$ je symetrický, jestliže platí

$$t^{i_1 i_2 \dots i_q} = t^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(q)}}.$$

Lineární transformace $S : T_0^q(U) \to T_0^q(U)$ definovaná předpisem

$$S(t) = \frac{1}{q!} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \rho_\sigma t \right)$$

se nazývá *symetrizace*. Souřadnice tenzoru po symetrizaci jsou dány formulí

$$t^{(i_1 i_2 \dots i_q)} = \frac{1}{q!} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} t^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(q)}} \right).$$

Příklad. Symetrizací tenzoru $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2$ dostaneme tenzor (sčítance odpovídají postupně permutacím id, (12), (23), (13), (231) a (321))

$$\frac{1}{6}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 +$$

$$+ \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) = \frac{1}{3}\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1$$

Lemma. *Pro symetrizaci platí $S \circ S = S$ a $\operatorname{Im} S = S^q(U)$.*

Důkaz. Je jednoduché se přesvědčit, že $S(t)$ je symetrický tenzor. Tedy $\operatorname{Im} S \subseteq S^q(U)$. Obráceně, je-li t symetrický, je

$$S(t) = \frac{1}{q!}\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \rho_\sigma t\right) = \frac{1}{q!}(q! t) = t.$$

Tím jsme dokázali, že $S \circ S = S$ a $\operatorname{Im} S = S^q(U)$. □

Poznámka. Tenzory z $T_0^q(U)$ jsme definovali jako q-lineární formy na součinu duálních prostorů $U^* \times U^* \times \cdots \times U^*$. Symetrické tenzory jsou symetrické q-lineární formy, neboť pro každou permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_q$ platí

$$t(f^{\sigma(1)}, f^{\sigma(2)}, \ldots, f^{\sigma(q)}) = \rho_{\sigma^{-1}}(t)(f^1, f^2, \ldots, f^q) = t(f^1, f^2, \ldots, f^q).$$

4.18. Báze prostoru symetrických tenzorů. Nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q \in U$. Definujme formální součin vektorů

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_q = S(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_q).$$

Protože jde o symetrický tenzor, nezávisí na pořadí vektorů v zápisu. Budeme tedy psát

$$\mathbf{v}_1^{a_1} \mathbf{v}_2^{a_2} \ldots \mathbf{v}_q^{a_q},$$

pokud se vektor $\mathbf{v}_j$ vyskytuje v součinu a_j-krát.

Věta. *Nechť $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze prostoru U. Potom symetrické tenzory $\mathbf{u}_1^{a_1} \mathbf{u}_2^{a_2} \ldots \mathbf{u}_n^{a_n}$ takové, že $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = q$ tvoří bázi prostoru symetrických tenzorů $S^q(U)$.*

Důkaz. Tyto tenzory získáme symetrizací báze prostoru $T_0^q(U)$. Protože $\operatorname{Im} S = S^q(U)$, musí prostor $S^q(U)$ generovat. Dokážeme, že jsou lineárně nezávislé. Nechť

$$0 = \sum c_{a_1,\ldots,a_n} \mathbf{u}_1^{a_1} \ldots \mathbf{u}_n^{a_n} = \sum c_{a_1,\ldots,a_n} S(\mathbf{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{i_q}).$$

Poslední výraz se rovná

$$\sum \frac{a_1! a_2! \ldots a_n!}{q!} c_{a_1,\ldots,a_n} \mathbf{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{i_q} = 0,$$

kde se v tenzorovém součinu vyskytuje $\mathbf{u}_j$ celkem a_j-krát. Z lineární nezávislosti $\mathbf{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{i_q}$ plyne $c_{a_1,\ldots,a_n} = 0$.

Tím je lineární nezávislost tenzorů $\mathbf{u}_1^{a_1} \ldots \mathbf{u}_n^{a_n}$ dokázána. □

Důsledek. *Dimenze prostoru $S^q(U)$ je $\binom{n+q-1}{q}$.*

Důkaz. Spočítejte, kolik existuje n-tic $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nezáporných celých čísel takových, že $a_1 + a_2 + \dots + a_n = q$.

(Je jich stejně, jako je různých posloupností n jedniček a $q-1$ nul!) $\square$

4.19. Symetrická algebra. Položme $S^0(U) = \mathbb{K}$ a definujme

$$S(U) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} S^q(U) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{q=0}^{n} S^q(U).$$

Na $S(U)$ můžeme definovat násobení

$$S^p(U) \times S^q(U) \to S^{p+q}(U)$$

předpisem

$$s \cdot t = S(t \otimes s).$$

Z této definice plyne pro počítání praktičtější předpis pro násobení prvků bazí

$$\mathbf{u}_1^{a_1}\mathbf{u}_2^{a_2}\dots\mathbf{u}_n^{a_n} \cdot \mathbf{u}_1^{b_1}\mathbf{u}_2^{b_2}\dots\mathbf{u}_n{}^{b_n} = \mathbf{u}_1^{a_1+b_1}\mathbf{u}_2^{a_2+b_2}\dots\mathbf{u}_n^{a_n+b_n}$$

Je vidět, že takto definované násobení je komutativní, asociativní, má jednotkový prvek $1 \in S^0(U) = \mathbb{K}$ a je distributivní vzhledem ke sčítání. Takto definovanou algebru $S(U)$ nazýváme *symetrickou algebrou* prostoru U. Všimněte si, že každý výběr báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ dává izomorfismus této algebry na algebru polynomů v proměnných $x_1, \dots, n_n$ s koeficienty v poli $\mathbb{K}$

$$S(U) \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], \qquad \mathbf{u}_1^{a_1}\dots\mathbf{u}_n^{a_n} \mapsto x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$$

4.20. Antisymetrické tenzory. Označme $\operatorname{sign}\sigma$ znaménko permutace σ. Tenzor $t \in T_0^q(U)$ se nazývá *antisymetrický*, jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_q$ platí

$$\rho_\sigma(t) = \operatorname{sign}\sigma \cdot t.$$

Antisymetrické tenzory tvoří vektorový podprostor v prostoru $T_0^q(U)$, který budeme označovat $\Lambda^q(U)$. Tenzor zadaný souřadnicemi $t^{i_1 i_2 \dots i_q}$ je antisymetrický, jestliže platí

$$t^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(q)}} = \operatorname{sign}\sigma \; t^{i_1 i_2 \dots i_q}.$$

Lineární transformaci

$$A : T_0^q(U) \to T_0^q(U)$$

definovanou předpisem

$$A(t) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \operatorname{sign}\sigma \rho_\sigma t$$

nazveme *antisymetrizací*. Souřadnice tenzoru po antisymetrizaci jsou

$$t^{[i_1 i_2 \dots i_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \operatorname{sign}\sigma \; t^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(n)}}.$$

Příklad. Antisymetrizací tenzoru $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2$ dostaneme tenzor (sčítance odpovídají postupně permutacím id, (12), (23), (13), (231) a (321))

$$\frac{1}{6}(\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_2\otimes\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\otimes\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_2\otimes\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\otimes\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_1) = 0$$

Lemma. *Pro antisymetrizaci platí $A \circ A = A$ a $\operatorname{Im} A = \Lambda^q(U)$.*

Důkaz. $A(t)$ je antisymetrický tenzor, neboť

$$\begin{aligned}\rho_\tau A(t) &= \rho_\tau\Big(\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q}\operatorname{sign}\sigma\rho_\sigma t\Big) = \frac{1}{q!}\Big(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q}\operatorname{sign}\sigma\rho_\tau\rho_\sigma t\Big) = \\ &= \operatorname{sign}\tau\sum_{(\tau\circ\sigma)\in\mathcal{S}_q}\operatorname{sign}(\tau\circ\sigma)\rho_{\tau\circ\sigma}t = \operatorname{sign}\tau A(t)\end{aligned}$$

Tedy $\operatorname{Im} A \subseteq \Lambda^q(U)$. Dále

$$A^2 = \frac{1}{(q!)^2}\sum_{\sigma,\tau\in\mathcal{S}_q}\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau)\rho_{\sigma\circ\tau} = \frac{1}{q!}\sum_{\pi\in\mathcal{S}_q}\operatorname{sign}\pi\rho_\pi = A,$$

neboť každou permutaci π lze napsat $q!$ způsoby jako kompozici $\sigma\circ\tau$. Pokud $t\in\Lambda^q(U)$, pak

$$A(t) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q}\operatorname{sign}\sigma\rho_\sigma t = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q}\operatorname{sign}\sigma\cdot\operatorname{sign}\sigma\cdot t = t.$$

Tedy $\Lambda^q(U) = \operatorname{Im} A$. $\square$

Poznámka. Tenzory z $T_0^q(U)$ jsou q-lineární formy na součinu $U^*\times U^*\times\cdots\times U^*$. Antisymetrické tenzory jsou právě všechny antisymetrické q-lineární formy na $U^*\times U^*\times\cdots\times U^*$, to jsou formy η, pro které platí

$$\eta(f^{\sigma(1)}, f^{\sigma(2)},\dots,f^{\sigma(q)}) = \operatorname{sign}\sigma\cdot\eta(f^1,f^2,\dots,f^q).$$

Pro antisymetrické tenzory totiž dostáváme

$$\begin{aligned}&t(f^{\sigma(1)}, f^{\sigma(2)},\dots,f^{\sigma(q)}) = \\ &\quad= \rho_{\sigma^{-1}}(t)(f^1,f^2,\dots,f^q) = \operatorname{sign}\sigma^{-1}\,t(f^1,f^2,\dots,f^q) = \operatorname{sign}\sigma\,t(f^1,f^2,\dots,f^q).\end{aligned}$$

4.21. Báze prostoru antisymetrických tenzorů. Nechť $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_q\in U$. Vnější součin vektorů zavedeme takto:

$$\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{v}_q = A(\mathbf{v}_1\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}_q).$$

Z definice antisymetrizace plyne, že záměnou dvou vektorů v tomto výrazu změníme znaménko. Jestliže se tedy ve vnějším součinu opakují dva vektory, je tento součin roven 0. (Předpokládáme, že charakteristika tělesa $\mathbb{K}$ je 0.)

Příklad. Nechť $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ jsou lineární formy dané předpisem

$$f(x^1,x^2,x^3) = x^3,\qquad g(y^1,y^2,y^3) = y^1.$$

Pak $f,g\in\Lambda\big((\mathbb{R}^3)^*\big) = (\mathbb{R}^3)^*$ a $f\wedge g\in\Lambda^2\big((\mathbb{R}^3)^*\big)$.

Vypočtěte $(f\wedge g)\big((x^1,x^2,x^3),(y^1,y^2,y^3)\big)$.

Řešení:

$$f\wedge g = \frac{1}{2}(f\otimes g - g\otimes f).$$

Vyčíslením tenzorů na (x^1,x^2,x^3) a (y^1,y^2,y^3) dostaneme výsledek

$$\frac{1}{2}(x^3y^1 - x^1y^3).$$

Věta. *Nechť* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je báze prostoru* U*. Potom antisymetrické tenzory* $\mathbf{u}_{i_1} \wedge \mathbf{u}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{i_q}$*,* $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_q \le n$*, tvoří bázi prostoru antisymetrických tenzorů* $\Lambda^q(U)$*.*

Důkaz. Tyto tenzory získáme antisymetrizací báze prostoru $T_0^q(U)$. Protože $\operatorname{Im} A = \Lambda^q(U)$, musí prostor $\Lambda^q(U)$ generovat. Dokážeme, že jsou lineárně nezávislé. Nechť

$$0 = \sum c_{i_1 i_2 \dots i_q} \mathbf{u}_{i_1} \wedge \mathbf{u}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{i_q} = \sum c_{i_1 i_2 \dots i_q} A(\mathbf{u}_{i_1} \otimes \mathbf{u}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{i_q})$$

Poslední výraz je roven lineární kombinaci

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_q} c_{i_1 i_2 \dots i_q} \frac{1}{q!} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \operatorname{sign} \sigma \mathbf{u}_{i_{\sigma(1)}} \otimes \mathbf{u}_{i_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{i_{\sigma(q)}} \right) = 0$$

Z lineární nezávislosti tenzorů $\mathbf{u}_{j_1} \otimes \mathbf{u}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{j_q}$ plyne

$$c_{i_1 i_2 \dots i_q} = 0.$$

□

Důsledek. *Platí*

$$\dim \Lambda^q(U) = \binom{n}{q},$$

kde $n = \dim U$*.*

Věta (Lineární nezávislost a vnější součin)**.** *Vektory* $\mathbf{v}_1$*,* $\mathbf{v}_2$*, …,* $\mathbf{v}_q \in U$ *jsou lineárně závislé právě tehdy, když*

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_q = 0.$$

Důkaz. Jsou-li $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_q$ lineárně nezávislé, lze je doplnit na bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q, \mathbf{v}_{q+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru U. Potom $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_q$ je jeden z prvků báze $\lambda^q(U)$, tudíž je různý od nuly.

Jsou-li $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_q$ lineárně závislé, pak jeden z nich je lineární kombinací ostatních, nechť je to

$$\mathbf{v}_q = \sum_{i=1}^{q-1} a^i \mathbf{v}_i.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_q &= \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{q-1} \wedge \left(\sum_{i=1}^{q-1} a^i \mathbf{v}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{q-1} a^i \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{q-1} \wedge \mathbf{v}_i = 0.
\end{aligned}$$

□

4.22. Vnější algebra vektorového prostoru. Položme $\Lambda^0(U) = \mathbb{K}$ a definujme

$$\Lambda = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(U)$$

To je vektorový prostor dimenze $\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q} = 2^n$. Na něm definujeme bilineární operaci vnějšího součinu z $\Lambda^p(U) \times \Lambda^q(U)$ do $\Lambda^{p+q}(U)$ předpisem

$$t_1 \wedge t_2 = A(t_1 \otimes t_2).$$

Z této definice plyne pro výpočty praktičtější předpis

$$(\mathbf{u}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{i_p}) \wedge (\mathbf{u}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{j_q}) = \mathbf{u}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{i_p} \wedge \mathbf{u}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{j_q}.$$

Přitom toto násobení je asociativní, distributivní vzhledem ke sčítání a antikomutativní, tj.

$$t_2 \wedge t_1 = (-1)^{p \cdot q} t_1 \wedge t_2$$

pro $t_1 \in \Lambda^p(U)$ a $t_2 \in \Lambda^q(U)$. Důvod, proč se ve formuli objevuje $(-1)^{p\cdot q}$, spočívá v tom, že z pořadí $(1, 2, \ldots, q, q+1, \ldots, q+p)$ dostaneme pořadí $(q+1, q+2, \ldots, q+p, 1, 2, \ldots, q)$ pomocí $p \cdot q$ permutací.

Příklad. Spočítáme $t_1 \wedge t_2$ a $t_2 \wedge t_1$, kde

$$\begin{aligned} t_1 &= 2\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3, \\ t_2 &= \mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

jsou tenzory na prostoru U s bazí $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$.

$$\begin{aligned} t_1 \wedge t_2 &= (2\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) \wedge \mathbf{u}_3 \\ &= 2\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_4 \wedge \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_3 \\ &= -2\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 \wedge t_1 &= \mathbf{u}_3 \wedge (2\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) \\ &= 2\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \\ &= 2\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4 \end{aligned}$$

4.23. Vnější mocnina lineárního zobrazení. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení. Již dříve jsme ukázali, že existuje lineární zobrazení

$$\varphi^{\otimes q} = \varphi \otimes \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi : T_0^q(U) \to T_0^q(U)$$

takové, že

$$\varphi^{\otimes q}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_q) = \varphi(\mathbf{u}_1) \otimes \varphi(\mathbf{u}_2) \otimes \cdots \otimes \varphi(\mathbf{u}_q).$$

Toto lineární zobrazení zobrazuje antisymetrické tenzory opět na antisymetrické tenzory, neboť pro antisymetrický tenzor $t \in \Lambda^q(U)$ platí

$$\begin{aligned} \varphi^{\otimes q}(t) &= \varphi^{\otimes q}(At) = \varphi^{\otimes q}\left(\frac{1}{q!}\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \operatorname{sign} \sigma \rho_\sigma t\right)\right) \\ &= \frac{1}{q!}\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \operatorname{sign} \sigma \varphi^{\otimes q}(\rho_\sigma t)\right) = \frac{1}{q!}\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \operatorname{sign} \sigma \rho_\sigma(\varphi^{\otimes q}(t)\right) \\ &= A\varphi^{\otimes q}(t) \in \Lambda^q(V). \end{aligned}$$

Označme zúžení $\varphi^{\otimes q}$ na $\Lambda^q(U)$ jako $\varphi^{\wedge q} : \Lambda^q(U) \to \Lambda^q(V)$. Platí

$$\varphi^{\wedge q}(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_q) = \varphi(\mathbf{u}_1) \wedge \varphi(\mathbf{u}_2) \wedge \cdots \wedge \varphi(\mathbf{u}_q).$$

4.24. Vnější mocniny a determinanty. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární zobrazení, které má v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru U matici $A = (a^i_j)$. Potom platí

$$\varphi^{\wedge q}(\mathbf{u}_{j_1} \wedge \mathbf{u}_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{j_q}) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_q} a^{i_1 i_2 \ldots i_q}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \mathbf{u}_{i_1} \wedge \mathbf{u}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{i_q},$$

kde $a^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_q}$ je determinant matice tvaru $q \times q$, která je vytvořena z matice A prvky v řádcích $i_1, \ldots, i_q$ a sloupcích $j_1, \ldots, j_q$. Speciálně platí

$$\varphi^{\wedge n}(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_n) = \det A \cdot \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_n.$$

Důkaz provedeme pro zjednodušení pouze pro případ $q = n$. Platí

$$\begin{aligned}
&\varphi^{\wedge n}(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_n) = \\
&\quad = \varphi(\mathbf{u}_1) \wedge \varphi(\mathbf{u}_2) \wedge \cdots \wedge \varphi(\mathbf{u}_n) \\
&\quad = \left(\sum_{j_1} a^{j_1}_1 \mathbf{u}_{j_1}\right) \wedge \left(\sum_{j_2} a^{j_2}_2 \mathbf{u}_{j_2}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_n} a^{j_n}_n \mathbf{u}_{j_n}\right) \\
&\quad = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a^{j_1}_1 a^{j_2}_2 \ldots a^{j_n}_n \ \mathbf{u}_{j_1} \wedge \mathbf{u}_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{j_n} \\
&\quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} a^{\sigma(1)}_1 a^{\sigma(2)}_2 \ldots a^{\sigma(n)}_n \ \mathbf{u}_{\sigma(1)} \wedge \mathbf{u}_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{\sigma(n)} \\
&\quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \operatorname{sign} \sigma \ a^{\sigma(1)}_1 a^{\sigma(2)}_2 \ldots a^{\sigma(n)}_n \ \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_n \\
&\quad = \det A \cdot \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

Příklad. Nechť matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ reprezentuje lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Čemu se rovná $A \wedge A$?

Řešení: $A \wedge A : \Lambda^2\mathbb{R} = \mathbb{R} \to \Lambda^2\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Podle předchozí věty je matice tohoto zobrazení rovna

$$\det A = -1.$$

Příklad. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte kanonický tvar matice $A \wedge A \wedge A$.

Matice A má vlastní čísla 1, 0, 2, 3 a příslušné vlastní vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ tvoří bázi $\mathbb{R}^4$. Potom $\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}_j \wedge \mathbf{u}_k$ tvoří bázi $\Lambda^3\mathbb{R}^4$.

Protože

$$A \wedge A \wedge A(\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}_j \wedge \mathbf{u}_k) = A\mathbf{u}_i \wedge A\mathbf{u}_j \wedge A\mathbf{u}_k = \lambda_i \lambda_j \lambda_k \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}_j \wedge \mathbf{u}_k,$$

má matice $\Lambda^3 A$ vlastní vektory, které tvoří bázi $\Lambda^3\mathbb{R}^4$ s vlastními čísly 0, 0, 0, 6. Tedy Jordanův kanonický tvar matice $\Lambda^3 A$ bude

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.25. Vnější formy. Tenzory v prostoru $\Lambda(U^*)$ jsou antisymetrické multilineární formy na U a nazývají se *vnější formy.* Pro každý vektor $\mathbf{v} \in U$ definujeme lineární zobrazení

$$i(\mathbf{v}) : \Lambda^q(U^*) \to \Lambda^{q-1}(U^*), \qquad q \geq 1,$$

které se nazývá *dosazení vektoru* $\mathbf{v}$, takto: Každá vnější forma $\omega \in \Lambda^q(U^*)$ je antisymetrické zobrazení $U \times U \times \cdots \times U \to \mathbb{K}$, potom

$$(i(\mathbf{v})\omega)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{q-1}) = \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{q-1})$$

je antisymetrická $(q-1)$-lineární forma v proměnných $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{q-1}$.

Příklad. Nechť $\omega = f^1 \wedge f^2 \ldots f^q$, $\mathbf{v} \in U$. Spočtěme $i(\mathbf{v})\omega$.

$$\begin{aligned} i(\mathbf{v})\omega &= i(\mathbf{v})\left(\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} \operatorname{sign}\sigma\ f^{\sigma(1)} \otimes f^{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes f^{\sigma(q)}\right) \\ &= \frac{1}{q!}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} \operatorname{sign}\sigma\ f^{\sigma(1)}(\mathbf{v}) f^{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes f^{\sigma(q)}\right) \end{aligned}$$

Speciálně

$$i(\mathbf{v})(f^1 \wedge f^2) = \frac{1}{2} f^1(\mathbf{v}) f^2 - \frac{1}{2} f^2(\mathbf{v}) f^1.$$

4.26. Tenzory v analýze a geometrii. Uvažujme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřenou. Nechť na Ω jsou zadány dvoje křivočaré souřadnice $x^1, x^2, \ldots, x^n$ a $y^1, y^2, \ldots, y^n$. V každém bodě $z \in \Omega$ máme báze tečného prostoru

$$\alpha_z = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right), \qquad \beta_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right).$$

Matice přechodu od α_z k β_z je $A = (a^i_j) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$,

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y^i}\ \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

Duální báze jsou $\alpha^*_z = (dx^1, \ldots, dx^n)$ a $\beta^*_z = (dy^1, \ldots, dy^n)$ s maticí přechodu

$$dx^k = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^l} dy^l.$$

Tenzorové pole je diferencovatelné zobrazení, které každému bodu $z \in \Omega$ přiřazuje tenzor z $T^q_p(\mathbb{R}^n)$. V souřadnicích

$$z \mapsto t^{i_1 i_2 \ldots i_q}_{j_1 j_2 \ldots j_p} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_q}}.$$

Příklad 1. Metrika je tenzor typu (2,0)

$$\sum_{i,j} g_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Nechť x^1, x^2 jsou standardní souřadnice v $\mathbb{R}^2$, nechť $y^1 = r$, $y^2 = \alpha$ jsou polární souřadnice.

$$x^1 = r\cos\alpha, \qquad x^2 = r\sin\alpha.$$

Potom metrika v souřadnicích x^1, x^2 je tenzor

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Metrika v souřadnicích y^1, y^2 je tenzor o souřadnicích

$$\overline{g}_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}$$

$$\begin{aligned} \overline{g}_{11} &= g_{11} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} + g_{22} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{g}_{22} &= g_{11} \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + g_{22} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \\ &= r^2\sin^2\alpha + r^2\cos^2\alpha = r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{g}_{12} &= g_{11} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + g_{22} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \\ &= r\cos\alpha\sin\alpha - r\sin\alpha\cos\alpha = 0 = \overline{g}_{21} \end{aligned}$$

Příklad 2. Diferenciál funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ v bodě z je lineární zobrazení

$$h \mapsto df(z) \cdot h,$$

v souřadnicích

$$df(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Je to tenzor typu (1,0). Gradient funkce f je tenzor typu (0,1), který vznikne z diferenciálu povýšením indexu pomocí metriky g_{ij}. Jeho souřadnice jsou

$$a^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

kde g^{ij} je inverzní matice k g_{ij}.

Ve standardních souřadnicích x^1, x^2 v $\mathbb{R}^2$ je

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2.$$

Gradient f je vektor o souřadnicích

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}\right),$$

neboť g^{ij} je jednotková matice.

V souřadnicích $y^1 = r, y^2 = \alpha$ je diferenciál funkce f

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Nyní $\overline{g}_{11} = 1$, $\overline{g}_{22} = r^2$, tedy $g^{11} = 1$, $g^{22} = \frac{1}{r^2}$ a proto souřadnice gradientu f jsou

$$\begin{aligned} \overline{a}^1 &= \frac{\partial f}{\partial r} \\ \overline{a}^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Kontrolní otázky.

(1) Nechť lineární transformace $\varphi : U \to U$ má vlastní čísla λ_1, λ_2, λ_3, $\dots$, λ_k. Jaká vlastní čísla má duální zobrazení $\varphi^* : U^* \to U^*$?

(2) Nechť $\mathbb{R}_3[x]$ je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše 3. Udejte příklad nenulové lineární formy $\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$, nenulové bilineární formy $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, nenulové 3-lineární formy $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$.

(3) Vyslovte definici tenzorového součinu $U \otimes V$ a vysvětlete, co je tenzor $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{v} \in V$.

(4) Ukažte, jak se použije univerzální vlastnost tenzorového součinu pro definici zobrazení $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, kde $\varphi_1 : U_1 \to V_1$, $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ jsou lineární zobrazení. Nechť φ_1 je dáno maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, φ_2 je dáno maticí $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Vypočtěte $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ na $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(5) Udejte příklad nenulového symetrického tenzoru $S^3(\mathbb{R}^2)$.

(6) Vysvětlete, co znamená symbol $i_{\mathbf{v}}\omega$, kde $\mathbf{v} \in U$, $\omega \in \Lambda^k(U^*)$. Vyjádřete pro $U = \mathbb{R}^3$, $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$ a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$.

Příklady k procvičení.

(1) Vyčíslete tenzory:

(a) $t = f^1 \otimes \mathbf{e}_2 + f^2 \otimes (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3) \in T^1_1(\mathbb{R}^3)$ na vektoru $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ a formě $f = f^1 + f^2 + f^3$.

(b) $t \in T^2_3(\mathbb{R}^4)$ se všemi souřadnicemi rovnými 3 na pětici $(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, f, f)$, kde $f = f^1 - f^4$ a $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4$.

(c) $r = 2 \cdot t \otimes s \ + s \otimes t$, kde $t = 2 \cdot f^1 \otimes \mathbf{e}_1$, $s = f^2 \otimes (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$, na čtveřici $(\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, 2f^1 + f^2, f^1)$.

[Řešení: (a) $t(\mathbf{v}, f) = 21$; (b) $t(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, f, f) = 0$; (c) $r(\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, 2f^1 + f^2, f^1) = -16$.]

(2) Spočtěte souřadnice

(a) $\bar{t}_1^{12}$ tenzoru $t \in T_1^2(\mathbb{R}^2)$, jehož souřadnice jsou v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ všechny rovny 1, v nové bázi

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) $\bar{t}_{12}^{1}$ tenzoru $t = f^1 \otimes f^2 \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \in T_2^1(\mathbb{R}^2)$ v nové bázi

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) $\bar{t}_{31}^{12}$ tenzoru $f^2 \otimes f^1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \in T_2^2(\mathbb{R}^3)$ v nové bázi

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \overline{\mathbf{e}_3}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $\bar{t}_{123}^{12}$ tenzoru $t \in T_3^2(\mathbb{R}^3)$ se všemi souřadnicemi rovnými dvěma v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ v nové bázi

$$(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \overline{\mathbf{e}_3}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Řešení: (a) $\bar{t}_1^{12} = -9$; (b) $\bar{t}_{12}^{1} = 4$; (c) $\bar{t}_{31}^{12} = 3$; (d) $\bar{t}_{123}^{12} = 0$.]

(3) Spočtěte kontrakci tenzoru

(a) $3 \cdot f^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - 2 \cdot f^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ podle 1. a 2. složky.
(b) $(f^1 - 2f^3 + 3f^4) \otimes (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$
(c) $(f^1 + f^2 + f^3 + f^4) \otimes \mathbf{e}_1 + (f^1 + 2f^2 + 2f^3 + 4f^4) \otimes \mathbf{e}_2 + 2(f^1 - f^2 - f^4) \otimes \mathbf{e}_3$
(d) $f^2 \otimes f^1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ podle druhých složek.

[Řešení: (a) $-2\mathbf{e}_2$; (b) 3; (c) 3; (d) $f^2 \otimes \mathbf{e}_3$.]

(4) Pomocí matice

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

proveďte snížení a povýšení tenzoru $(f^1 + f^2) \otimes (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) - (f^1 + f^3) \otimes \mathbf{e}_3$

[Řešení: Snížení $(3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) - (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \otimes \mathbf{e}_2$, povýšení $(f^1 + f^2) \otimes f^3 + (f^1 + f^3) \otimes (f^4 - 2f^3)$.]

(5) Nechť $t \in T_0^2(U)$ je symetrický a $s \in T_2^0(U)$ antisymetrický tenzor. Dokažte, že tenzor vzniklý násobením a následnou kontrakcí v obou složkách $t_{ij}s^{ij}$ je roven nule.

(6) Dokažte, že pro operátory symetrizace $S : T_0^q(U) \to S^q(U)$ a antisymetrizace $A : T_0^q(U) \to \Lambda^q(U)$ platí

$$S \circ A = A \circ S = 0.$$

(7) Dokažte, že pro $\dim U > 2$ nejsou prostory $\Lambda^2\big(\Lambda^2(U)\big)$ a $\Lambda^4(U)$ izomorfní.

(8) Dokažte, že tenzor $t_{ijk} \in T_0^3(U)$ symetrický vzhledem k i, j a antisymetrický vzhledem k j, k je roven nule.

5. Polynomiální matice a kanonické tvary

V této části se budeme hlouběji zabývat vztahem mezi polynomy a maticemi. Výsledkem našich úvah bude algoritmus pro nalezení Jordanova kanonického tvaru matice.

5.1. Polynomy s koeficienty v poli. Nechť $\mathbb{K}$ je pole. Symbolem $\mathbb{K}[\lambda]$ označíme okruh polynomů nad $\mathbb{K}$ v proměnné λ. Polynom

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$, má stupeň n (označení $\operatorname{st} p$). U nulového polynomu stupeň neurčujeme (nebo ho pokládáme $-\infty$). Stupeň součinu dvou nenulových polynomů je součet jejich stupňů.

Věta o dělení polynomů říká, že ke každým dvěma polynomům $f(\lambda), g(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$, $g(\lambda) \neq 0$, existují jednoznačně určené polynomy $q(\lambda), r(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ takové, že

$$f(\lambda) = q(\lambda)g(\lambda) + r(\lambda)$$

a $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g$ nebo $r(\lambda) = 0$.

5.2. Polynomy s koeficienty v maticích. Matice tvaru $n \times n$ s koeficienty v poli $\mathbb{K}$ tvoří okruh $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Okruh polynomů v proměnné λ s koeficienty v $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ označíme $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})[\lambda]$. Každý prvek lze psát ve tvaru

$$p(\lambda) = A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + A_0, \qquad A_i \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}).$$

Pokud $A_n \neq 0$, pokládáme $\operatorname{st} p = n$. Pro $p(\lambda) = 0$ je $\operatorname{st} p = -\infty$. Součin polynomů je asociativní, nekomutativní a distributivní vzhledem ke sčítání. Obecně neplatí, že stupeň součinu dvou nenulových polynomů je součtem jejich stupňů. Toto tvrzení však platí, pokud jeden z polynomů má za vedoucí koeficient (to je koeficient u nejvyšší mocniny) regulární (tj. invertibilní) matici.

Věta (o dělení polynomů). *Pro každé dva polynomy $f(\lambda), g(\lambda) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})[\lambda]$, $g(\lambda) = B_k\lambda^k + B_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + B_0$, kde B_k je regulární, existují jednoznačně určené polynomy $q_1(\lambda), r_1(\lambda)$ a $q_2(\lambda), r_2(\lambda)$ tak, že platí*

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= g(\lambda)q_1(\lambda) + r_1(\lambda), \\ f(\lambda) &= q_2(\lambda)g(\lambda) + r_2(\lambda), \end{aligned}$$

kde $\operatorname{st} r_1 < \operatorname{st} g$, $\operatorname{st} r_2 < \operatorname{st} g$ nebo $r_1 = 0$, $r_2 = 0$.

Důkaz lze provést analogicky jako v případě polynomů nad polem. Je potřeba pouze dbát na to, že násobení není komutativní.

Větu o dělení budeme v dalším obvykle aplikovat pro $g(\lambda) = A - \lambda E$. To je možné, neboť $-E$ je regulární.

5.3. Polynomiální matice. Matice $n \times n$ s prvky, které jsou polynomy z $\mathbb{K}[\lambda]$, budeme označovat $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[\lambda])$ a nazývat *polynomiální matice* nebo *λ-matice.* Tyto matice opět tvoří okruh.

Následující tvrzení nám dává kriterium pro rozpoznání invertibilních polynomiálních matic:

Lemma. *Matice* $A(\lambda) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[\lambda])$ *je invertibilní právě tehdy, když* $\det A(\lambda) \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Důkaz. Má-li $A(\lambda)$ inverzní matici $B(\lambda)$, pak

$$1 = \det E = \det\big(A(\lambda) \cdot B(\lambda)\big) = \det A(\lambda) \cdot \det B(\lambda).$$

Tedy $\det A(\lambda) \neq 0$ je polynom stupně 0, tj. $\det A(\lambda) \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Obráceně, je-li $\det A(\lambda) \in \mathbb{K} - \{0\}$, lze ukázat, že matice

$$\frac{\big(A_{ij}(\lambda)\big)^\top}{\det A(\lambda)},$$

kde $A_{ij}(\lambda)$ je algebraický doplněk ke členu $a_{ij}(\lambda)$ matice $A(\lambda)$, je inverzní k $A(\lambda)$. Důkaz je stejný jako v případě matic z $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. □

S polynomiálními maticemi můžeme provádět následující elementární řádkové (sloupcové) operace

(1) Vynásobit vybraný řádek (sloupec) nenulovým prvkem $a \in \mathbb{K}$.
(2) Přičíst libovolný $f(\lambda)$-násobek některého řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci), $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$.
(3) Provést výměnu dvou řádků (sloupců).

Řádkové úpravy matice $A(\lambda)$ lze realizovat násobením maticí $P(\lambda)$ zleva. Přitom $\det P(\lambda) \in \mathbb{K} - \{0\}$, neboť toto platí pro matice realizující elementární řádkové úpravy. Tedy $P(\lambda)$ je invertibilní.

Obdobně sloupcové úpravy lze realizovat násobením maticí $Q(\lambda)$ zprava. Tato matice je rovněž invertibilní.

Definice. Řekneme, že dvě matice $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[\lambda])$ jsou ekvivalentní, jestliže matici $A(\lambda)$ lze elementárními řádkovými a sloupcovými operacemi převést na matici $B(\lambda)$.

Cvičení. Dokažte, že relace definovaná výše je skutečně ekvivalence, tj. je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Každou matici, jejíž prvky jsou polynomy, tj. prvek $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[\lambda])$, lze chápat jako polynom s koeficienty v maticích, tj. prvek $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})[\lambda]$.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda + 1 & 4 - \lambda \\ 8 & \lambda^3 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4. Kriterium podobnosti matic. Zopakujme, že matice $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice P tak, že $B = PAP^{-1}$. Mezi podobností matic A, B a ekvivalencí jejich charakteristických matic $A - \lambda E$, $B - \lambda E$ je následující jednoduchý, ale přitom velice důležitý vztah:

Věta (Kriterium podobnosti)**.** *Matice* $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *jsou podobné právě tehdy, když jejich charakteristické matice* $A - \lambda E$, $B - \lambda E$ *jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Nechť A a B jsou podobné. Potom $B = PAP^{-1}$ a $\lambda E = P(\lambda E)P^{-1}$. Tedy

$$B - \lambda E = P(A - \lambda E)P^{-1}.$$

Protože každá regulární matice představuje posloupnost řádkových nebo sloupcových operací, je $B - \lambda E$ ekvivalentní s $A - \lambda E$.

Obráceně, nechť $B - \lambda E$ a $A - \lambda E$ jsou ekvivalentní. Potom existují invertibilní matice $P(\lambda)$ a $Q(\lambda)$ tak, že

$$B - \lambda E = P(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda).$$

Podle věty o dělení

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (B - \lambda E)P_1(\lambda) + P_0, \\ Q(\lambda) &= Q_1(\lambda)(B - \lambda E) + Q_0, \end{aligned}$$

kde P_0 a Q_0 nezávisejí na λ.

Dokážeme, že $P_0(A - \lambda E)Q_0 = B - \lambda E$. S použitím předchozích tří rovnic dostaneme

$P_0(A - \lambda E)Q_0 =$

$$\begin{aligned} &= \Big(P(\lambda) - (B - \lambda E)P_1(\lambda)\Big)(A - \lambda E)\Big(Q(\lambda) - Q_1(\lambda)(B - \lambda E)\Big) \\ &= P(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda) - P(\lambda)(A - \lambda E)Q_1(\lambda)(B - \lambda E) \\ &\quad -(B - \lambda E)P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda) + (B - \lambda E)P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q_1(\lambda)(B - \lambda E) \\ &= (B - \lambda E) - (B - \lambda E)Q^{-1}(\lambda)Q_1(\lambda)(B - \lambda E) \\ &\quad -(B - \lambda E)P_1(\lambda)P^{-1}(\lambda)(B - \lambda E) + (B - \lambda E)P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q_1(\lambda)(B - \lambda E) \\ &= (B - \lambda E)\Bigg(E - \Big[Q^{-1}(\lambda)Q_1(\lambda) + P_1(\lambda)P^{-1}(\lambda) - P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q_1(\lambda)\Big](B - \lambda E)\Bigg). \end{aligned}$$

Kdyby výraz v hranaté závorce byl různý od nulové matice, byl by celý poslední výraz polynomem stupně aspoň 2, což ovšem není možné, neboť $P_0(A - \lambda E)Q_0$ je stupně 1. Tedy výraz v hranaté závorce je roven 0 a my dostáváme

$$P_0(A - \lambda E)Q_0 = B - \lambda E.$$

Porovnáním koeficientů u mocnin λ^0 a λ^1 dostaneme

$$P_0AQ_0 = B, \qquad P_0Q_0 = E.$$

Tedy $P_0^{-1} = Q_0$ a $P_0AP_0^{-1} = B$. □

5.5. Kanonický tvar λ-matic. Řekneme, že matice $A(\lambda)$ je v *kanonickém tvaru*, jestliže

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

kde polynom $e_i(\lambda)$ dělí polynom $e_{i+1}(\lambda)$ pro $i = 1, 2, \dots, n - 1$ a nenulové polynomy e_i mají vedoucí koeficient 1.

Příklad. Příklady matic v kanonickém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemma. *Každou čtvercovou λ-matici lze pomocí řádkových a sloupcových úprav převést na matici v kanonickém tvaru.*

Důkaz. Postup nalezení kanonického tvaru je modifikací Gaussovy eliminační metody. Důkaz proveďme indukcí.

Pro matici 1×1 je vše zřejmé. Nechť tvrzení platí pro matice $(n-1) \times (n-1)$. Uvažujme λ-matici A tvaru $n \times n$, která je nenulová. Záměnou řádků a sloupců lze dosáhnout toho, že polynom $a_{11}(\lambda)$ je nenulový nejnižšího možného stupně mezi všemi nenulovými polynomy $a_{ij}(\lambda)$. Kdyby polynom $a_{11}(\lambda)$ nedělil některý z polynomů $a_{1j}(\lambda)$, pak ho můžeme nahradit zbytkem $\overline{a}_{11}(\lambda)$ při dělení polynomu $a_{1j}(\lambda)$ polynomem $a_{11}(\lambda)$

$$a_{1j}(\lambda) = q(\lambda)a_{11}(\lambda) + \overline{a}_{11}(\lambda), \qquad \operatorname{st} \overline{a}_{11} < \operatorname{st} a_{11},$$

a to tak, že od j-tého sloupce odečteme $q(\lambda)$-násobek 1.sloupce a pak sloupce 1 a j vyměníme. Takto snižujeme stupeň polynomu tak dlouho, až dělí polynom $a_{1j}(\lambda)$. Potom odečtením příslušného násobku 1.sloupce od j-tého sloupce dostaneme $a_{1j}(\lambda) = 0$. Opakováním tohoto postupu dostaneme v 1.řádku $a_{1j}(\lambda) = 0$ pro $j = 2, 3, \dots, n$ a stejně tak v prvním sloupci $a_{i1}(\lambda) = 0$ pro $i = 2, 3, \dots, n$. Dostaneme tedy matici

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{A}(\lambda) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Dokážeme, že stupeň $a_{11}(\lambda)$ můžeme snižovat tak dlouho, až dělí všechny prvky $a_{ij}(\lambda)$ matice $\overline{A}(\lambda)$.

Z předchozího postupu a počátečního výběru plyne, že $a_{ij}(\lambda) = 0$ nebo $\operatorname{st} a_{ij} \geq \operatorname{st} a_{11}$. V druhém případě $a_{ij}(\lambda) = q(\lambda)a_{11}(\lambda) + \overline{a}_{11}(\lambda)$. Pokud je $\overline{a}_{11}(\lambda) \neq 0$, lze jej vhodnými úpravami dostat do levého horního rohu. V tomto případě musíme provést vynulování 1.řádku a 1.sloupce. Opakováním tohoto postupu musíme dosáhnout toho, že $a_{11}(\lambda)$ dělí všechny $a_{ij}(\lambda)$ v matici $\overline{A}(\lambda)$. Důvodem je skutečnost, že při každém opakování tohoto postupu se stupeň polynomu $a_{11}(\lambda)$ sníží aspoň o 1.

Nyní použijeme indukční předpoklad na matici $\overline{A}(\lambda)$, tedy původní matice bude ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

kde $e_i(\lambda)$ dělí $e_{i+1}(\lambda)$ pro $i = 2, 3, \dots, n-1$. Protože $e_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$ dělilo všechny prvky $\overline{A}(\lambda)$, musí je dělit i po provedených elementárních řádkových a sloupcových operacích. Tedy $e_1(\lambda)$ dělí $e_2(\lambda)$ a hledání kanonického tvaru je ukončeno. $\square$

Příklad.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3-\lambda}{2} \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 6-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & \lambda-7 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+5\lambda+14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-7 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-7) \end{pmatrix}$$

5.6. Jednoznačnost kanonického tvaru. V tomto paragrafu ukážeme, že kanonický tvar dané matice je jednoznačný a nezávisí na postupu, kterým jsme jej dostali. To nám umožní dokázat důležité kriterium ekvivalence: dvě λ-matice jsou ekvivalentní, mají-li stejný kanonický tvar.

Pro matici $A(\lambda) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[\lambda])$ definujme $d_k^A(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, jako největší společný dělitel všech minorů stupně k v matici $A(\lambda)$ s vedoucím koeficientem 1, pokud tyto minory nejsou všechny nulové. V tomto případě $d_k^A(\lambda) = 0$.

Věta. *Nechť* $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[\lambda])$. *Platí*

(1) $d_k^A(\lambda)$ *dělí* $d_{k+1}^A(\lambda)$ *pro* $k = 1, 2, \ldots, n-1$.
(2) *Jsou-li matice* $A(\lambda)$ *a* $B(\lambda)$ *ekvivalentní, pak* $d_k^A(\lambda) = d_k^B(\lambda)$ *pro všechna* k
(3) *Je-li* $K(\lambda) = \mathrm{diag}(e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda))$ *kanonický tvar matice* $A(\lambda)$, *pak*

$$\begin{aligned} e_1(\lambda) &= d_1^A(\lambda), \\ e_k(\lambda) &= \frac{d_k^A(\lambda)}{d_{k-1}^A(\lambda)} \quad \textit{pro } d_{k-1}^A(\lambda) \neq 0 \\ e_k(\lambda) &= 0 \quad \textit{právě tehdy, když } d_k^A(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Odtud okamžitě dostáváme

Důsledek (Kriterium ekvivalence)**.** *Matice* $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[\lambda])$ *jsou ekvivalentní právě tehdy, když mají stejný kanonický tvar.*

Důkaz věty. (1) Provedeme-li rozvoj minoru stupně $k+1$ podle některého řádku, dostaneme, že je dělitelný polynomem $d_k^A(\lambda)$. Tedy $d_k^A(\lambda)$ dělí $d_{k+1}^A(\lambda)$.

(2) Stačí dokázat, že $d_k^A(\lambda)$ se nemění při ekvivalentních úpravách. Z tohoto hlediska jediná operace, kde to není zřejmé na první pohled, je přičtení $q(\lambda)$-násobku některého jiného řádku. Tím dostaneme z matice $A(\lambda)$ matici $A'(\lambda)$. Každý minor stupně k v matici $A'(\lambda)$ lze vyjádřit jako

$$\det M + q(\lambda) \det M'.$$

Zde $\det M$ a $\det M'$ jsou minory stupně k v původní matici $A(\lambda)$. Tedy $d_k^A(\lambda)$ dělí $d_k^{A'}(\lambda)$. Protože matici $A(\lambda)$ dostaneme z matice $A'(\lambda)$ operací obdobného typu, $d_k^{A'}(\lambda)$ dělí rovněž $d_k^A(\lambda)$. Tedy $d_k^A(\lambda) = d_k^{A'}(\lambda)$.

(3) Poslední tvrzení je důsledkem předchozího. Nechť $K(\lambda)$ je kanonický tvar matice $A(\lambda)$. Potom podle předchozího $d_k^A(\lambda) = d_k^K(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_k(\lambda)$. □

5.7. Jordanův kanonický tvar. V tomto paragrafu ukážeme, jak lze Jordanův kanonický tvar matice A zrekonstruovat z kanonického tvaru charakteristické matice $A - \lambda E$. Připomeňme, že matice J je v Jordanově kanonickém tvaru, jestliže je blokově diagonální, tj.

$$J = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}^{k_1}, J_{\lambda_2}^{k_2}, \dots, J_{\lambda_r}^{k_r})$$

a $J_{\lambda_i}^{k_i}$ jsou Jordanovy buňky

$$J_{\lambda_i}^{k_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots\dots & & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

tvaru $k_i \times k_i$. Podle Jordanovy věty je každá matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ podobná matici v Jordanově kanonickém tvaru.

Příklad. Najdeme kanonický tvar charakteristické matice $J - \lambda E$ pro Jordanovu buňku $k \times k$ s vlastním číslem λ_0. Není těžké zjistit, že

$$d_1^{J-\lambda E}(\lambda) = d_2^{J-\lambda E}(\lambda) = \dots = d_{k-1}^{J-\lambda E}(\lambda) = 1, \qquad d_k^{J-\lambda E}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k$$

Tedy kanonický tvar $J - \lambda E$ je $\operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1, (\lambda - \lambda_0)^k)$.

Příklad. Najdeme kanonický tvar charakteristické matice $J - \lambda E$ pro Jordanovu matici J s dvěma buňkami $J_{\lambda_0}^{k_1}$ a $J_{\lambda_0}^{k_2}$ s $k_1 \geq k_2$. Stejně jako v předchozím lze ukázat, že

$$d_1^{J-\lambda E}(\lambda) = d_2^{J-\lambda E}(\lambda) = \dots = d_{k_1+k_2-2}^{J-\lambda E}(\lambda) = 1,$$

$$d_{k_1+k_2-1}^{J-\lambda E}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{k_2}, \qquad d_{k_1+k_2}^{J-\lambda E}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{k_1+k_2}.$$

Tedy kanonický tvar $J - \lambda E$ je $\operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1, (\lambda - \lambda_0)^{k_2}, (\lambda - \lambda_0)^{k_1+k_2})$.

Příklad. Najdeme kanonický tvar charakteristické matice $J - \lambda E$ pro Jordanovu matici J s třemi buňkami $J_{\lambda_1}^3$, $J_{\lambda_1}^2$, $J_{\lambda_2}^2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots\dots & & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & & & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Platí $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = d_4(\lambda) = 1$. Dále $d_5(\lambda) = 1$, neboť některé minory řádu 5 jsou rovny $(\lambda_1 - \lambda)^5$ a $(\lambda_2 - \lambda)^2$. Jejich největší společný dělitel je 1.

$d_6(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$, neboť nenulové minory řádu 6 jsou $(\lambda_1 - \lambda)^5$, $(\lambda_1 - \lambda)^5(\lambda_2 - \lambda)$, $(\lambda_1 - \lambda)^4(\lambda_2 - \lambda)^2$, $(\lambda_1 - \lambda)^3(\lambda_2 - \lambda)^2$, $(\lambda_1 - \lambda)^2(\lambda_2 - \lambda)^2$.

$d_7(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5(\lambda - \lambda_2)^2$.

Tedy kanonický tvar matice $J - \lambda E$ je $\operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, 1, (\lambda - \lambda_1)^2, (\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_2)^2)$.

Každý kořen polynomu $e_k(\lambda) \neq 0$ určuje jednu Jordanovu buňku, jejíž rozměry jsou dány algebraickou násobností tohoto kořenu.

Předchozí příklady ukazují, že platí následující věta:

Věta. *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ a nechť charakteristický polynom matice A má v $\mathbb{K}$ celkem n kořenů včetně násobností. Potom je A podobná matici J v Jordanově kanonickém tvaru, který určíme z kanonického tvaru charakteristické matice $\lambda E - A$ takto:*
Je-li

$$\begin{aligned} e_n(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_1}\dots \\ e_{n-1}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_2}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\dots \\ e_{n-2}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_3}(\lambda - \lambda_2)^{l_3}\dots \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

pak Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu λ_1 mají rozměry $k_1 \geq k_2 \geq \dots$, Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu λ_2 mají rozměry $l_1 \geq l_2 \geq \dots$ atd., pokud některá z mocnin není nulová.

Důkaz. Matice A a J jsou podobné právě tehdy, když $A-\lambda E$ a $J-\lambda E$ jsou ekvivalentní. Ty jsou ekvivalentní právě tehdy, když mají stejný kanonický tvar, tj. stejné polynomy $e_i(\lambda)$. Z příkladů uvedených výše vyplývá, že J má stejné polynomy $e_1, e_2, \dots, e_n$ jako A. $\square$

5.8. Algoritmus pro nalezení Jordanova kanonického tvaru. Předchozí věta nám umožňuje najít Jordanův kanonický tvar matice A, jestliže najdeme kanonický tvar $K(\lambda)$ charakteristické matice $A - \lambda E$. My však chceme rovněž najít matici podobnosti P, pro niž platí

$$A = PJP^{-1}.$$

Postupujeme takto: (1) Nejdříve upravíme $A - \lambda E$ elementárními operacemi na kanonický tvar $K(\lambda)$.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A-\lambda E & E \\ \hline E & \\ \cline{1-1}\end{array} \sim \dots \sim \begin{array}{|c|c|}\hline K(\lambda) & \widetilde{P}(\lambda) \\ \hline \widetilde{Q}(\lambda) & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Přitom $K(\lambda) = \widetilde{P}(\lambda)(A - \lambda E)\widetilde{Q}(\lambda)$.
(2) Kanonický tvar $K(\lambda)$ určuje Jordanovu matici J. Její charakteristickou matici převedeme elementárními operacemi na kanonický tvar $K(\lambda)$.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline J-\lambda E & E \\ \hline E & \\ \cline{1-1}\end{array} \sim \dots \sim \begin{array}{|c|c|}\hline K(\lambda) & \overline{P}(\lambda) \\ \hline \overline{Q}(\lambda) & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Platí $K(\lambda) = \overline{P}(\lambda)(J - \lambda E)\overline{Q}(\lambda)$.

Z předchozích dvou rovnic dostaneme

$$J - \lambda E = \overline{P}^{\,-1}\widetilde{P}(\lambda)(A - \lambda E)\widetilde{Q}(\lambda)\overline{Q}^{\,-1}(\lambda).$$

Položme $P(\lambda) = \overline{P}^{\,-1}(\lambda)\widetilde{P}(\lambda)$, $Q(\lambda) = \widetilde{Q}(\lambda)\overline{Q}^{\,-1}(\lambda)$. Nyní použijeme důkazu věty 4 a vydělíme $P(\lambda)$ a $Q(\lambda)$ maticí $J - \lambda E$:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (J - \lambda E)P_1(\lambda) + P_0 \\ Q(\lambda) &= Q_1(\lambda)(J - \lambda E) + Q_0 \end{aligned}$$

Podle zmíněného důkazu je

$$J - \lambda E = P_0(A - \lambda E)Q_0$$

a v důsledku toho $P_0^{-1} = Q_0$, $J = P_0AP_0^{-1}$.

K získání matice P_0 stačí do $P(\lambda)$ dosadit matici J za λ zleva. Q_0 získáme dosazením matice J za λ v polynomu $Q(\lambda)$ zprava.

Nyní si celý algoritmus ukážeme na jednoduchém příkladě.

Příklad. Nalezněte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a matici P_0 takovou, že $J = P_0AP_0^{-1}$.

Provádíme elementární řádkové a sloupcové operace na matici

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda E & E \\ \hline E & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \quad \text{vyměníme 1. a 2. sloupec}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4-\lambda & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+4\lambda-4 & 0 & \lambda-4 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2)^2 & 0 & \lambda-4 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & 4-\lambda & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & (\lambda-2)^2 & 4-\lambda & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & \lambda & \lambda & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 & 4-\lambda & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \lambda & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & \end{array}\right)$$

Tedy kanonický tvar matice $A-\lambda E$ je

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4-\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix} (A-\lambda E) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \widetilde{P}(\lambda)(A-\lambda E)\widetilde{Q}(\lambda) \end{aligned}$$

Jordanův kanonický tvar matice A je

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní provádíme elentární řádkové a sloupcové operace na matici

$$\left(\begin{array}{c|c} J-\lambda E & E \\ \hline E & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(2-\lambda)^2 & 0 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(2-\lambda)^2 & 0 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & \lambda-2 & 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & 2-\lambda & & & \end{array}\right)$$

Tedy

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix} (J-\lambda E) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \overline{P}(\lambda)(J-\lambda E)\overline{Q}(\lambda) \end{aligned}$$

Z dvojího vyjádření $K(\lambda)$ spočítáme, že

$$J-\lambda E = \overline{P}^{\,-1}(\lambda)\widetilde{P}(\lambda)(A-\lambda E)\widetilde{Q}(\lambda)\overline{Q}^{\,-1}(\lambda) = P(\lambda)(A-\lambda E)Q(\lambda).$$

Přitom

$$\begin{aligned} \overline{P}^{\,-1}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4-\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6-2\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Napišme $P(\lambda)$ jako polynom, jehož koeficienty jsou matice:

$$P(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

K získání matice P_0 takové, že

$$P(\lambda) = (J-\lambda E)P_1(\lambda) + P_0$$

stačí do $P(\lambda)$ dosadit za λ zleva matici J

$$\begin{aligned} P_0 &= J \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ P_0^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Výpočtem se lze přesvědčit, že platí

$$J = P_0 A P_0^{-1}.$$

5.9. Minimální polynom matice. Nechť $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ je polynom

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Dosazením matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ do tohoto polynomu dostaneme matici

$$f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E.$$

Dosazení matice A do polynomu $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ je homomorfismus okruhů $\mathbb{K}[\lambda] \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$: $f(\lambda) \mapsto f(A)$. Navíc pro $A = PBP^{-1}$ je $f(A) = Pf(B)P^{-1}$.

Důkaz je jednoduchý. Důsledkem je skutečnost, že pro každé dva polynomy f, g matice $f(A)$ a $g(A)$ komutují.

Lemma. *Pro každou matici $A \neq 0$ existuje nenulový polynom $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ takový, že $f(A) = 0$.*

Důkaz. Dimenze vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ je n^2. Tedy matice A^{n^2}, A^{n^2-1},..., A, E jsou lineárně závislé. Existují a_{n^2}, a_{n^2-1},..., a_1, $a_0 \in \mathbb{K}$, ne všechny rovny nule, tak, že

$$a_{n^2}A^{n^2} + a_{n^2-1}A^{n^2-1} + \cdots + a_1A + a_0E = 0.$$

Tedy $f(\lambda) = a_{n^2}\lambda^{n^2} + a_{n^2-1}\lambda^{n^2-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ má požadované vlastnosti. □

Definice. Polynom $m(\lambda) \in \mathbb{K} - \{0\}$ se nazývá *minimálním polynomem matice $A \neq 0$*, jestliže

(a) vedoucí koeficient tohoto polynomu je 1,
(b) $m(A) = 0$,
(c) Jestliže $f \in \mathbb{K}[\lambda] - \{0\}$ je takový, že $f(A) = 0$, pak $\operatorname{st} f \geq \operatorname{st} m$.

Z předchozího lemmatu plyne, že každá nenulová matice má aspoň jeden minimální polynom.

Věta (vlastnosti minimálního polynomu)**.** *Nechť $m(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ je minimální polynom nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Platí*

(1) *Každý polynom $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda] - \{0\}$ takový, že $f(A) = 0$, je dělitelný polynomem $m(\lambda)$.*
(2) *$m(\lambda)$ je určen jednoznačně.*
(3) *$m(\lambda)$ je roven invariantnímu faktoru $e_n(\lambda)$ v kanonické matici charakteristické matice $A - \lambda E$.*

Důkaz. (1) Vydělme polynom $f(\lambda)$ polynomem $m(\lambda)$,

$$f(\lambda) = m(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda).$$

Předpokládejme, že $r(\lambda) \neq 0$. Pak $\operatorname{st} r < \operatorname{st} m$, a protože $f(A) = 0 = m(\lambda)$, je rovněž $r(A) = 0$. To je ovšem spor s tím, že $m(\lambda)$ je minimální polynom.

(2) Jsou-li $m(\lambda)$ a $\overline{m}(\lambda)$ dva minimální polynomy, pak podle předchozího tvrzení $\overline{m}(\lambda)$ dělí $m(\lambda)$ a obráceně, $m(\lambda)$ dělí $\overline{m}(\lambda)$. Protože oba mají vedoucí koeficient 1, je $m(\lambda) = \overline{m}(\lambda)$.

(3) Prvně dokážeme, že $e_n(A) = 0$. Platí

$$(-1)^n \det(A - \lambda E) = d_n^{A-\lambda E}(\lambda) = (-1)^n d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda)e_n(\lambda)$$

Nechť $B(\lambda) = \big((A-\lambda E)_{ij}\big)^\top$, kde $(A-\lambda E)_{ij}$ je algebraický doplněk ke členu matice $A-\lambda E$ v i-tém řádku a j-tém sloupci. Platí

$$(A-\lambda E)B(\lambda) = \det(A-\lambda E)\cdot E$$

$d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda)$ je největší společný dělitel všech minorů matice $A-\lambda E$ řádu $n-1$, platí proto

$$B(\lambda) = d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda)\cdot C(\lambda),$$

kde největší společný dělitel prvků $C(\lambda)$ je 1.

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}(-1)^n d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda)e_n(\lambda)E &= (-1)^n\det(A-\lambda E)E = (-1)^n(A-\lambda E)B(\lambda)\\ &= (-1)^n(A-\lambda E)d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda)C(\lambda)\end{aligned}$$

Proto $e_n(\lambda)E = (A-\lambda E)C(\lambda)$.

Dosazením matice A za λ dostaneme $e_n(A)=0$. Odtud plyne, že $e_n(\lambda) = q(\lambda)m(\lambda)$. Dokážeme, že $q(\lambda)=1$. Vydělme polynom $m(\lambda)E$ polynomem $(A-\lambda E)$:

$$m(\lambda)E = (A-\lambda E)Q(\lambda) + R,$$

kde $R\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Dosazením matice A za λ (ať zleva či zprava) dostaneme

$$R = m(A) = 0.$$

Tedy

$$(A-\lambda E)C(\lambda) = e_n(\lambda)E = q(\lambda)m(\lambda)E = q(\lambda)(A-\lambda E)Q(\lambda)$$

Proto

$$(A-\lambda E)\big(C(\lambda)-q(\lambda)Q(\lambda)\big) = 0$$

a nutně

$$C(\lambda) = q(\lambda)Q(\lambda).$$

Tedy každý prvek matice $C(\lambda)$ je dělitelný $q(\lambda)$. Největší společný dělitel všech prvků $C(\lambda)$ je však 1, tedy $q(\lambda)=1$. □

Věta (Hamilton–Caleyova)**.** *Nechť $c(\lambda) = \det(A-\lambda E)$ je charakteristický polynom matice A. Potom $c(A)=0$.*

Důkaz. Nechť $K(\lambda)$ je kanonický tvar matice $A-\lambda E$. Potom

$$c(\lambda) = \det(A-\lambda E) = (-1)^n\det K(\lambda) = (-1)^n e_1(\lambda)e_2(\lambda)\dots e_n(\lambda)$$

Protože $e_n(A)=0$, je rovněž $c(A)=0$. □

Kontrolní otázky.

(1) Jak se mění determinant polynomiální matice při provádění jednotlivých elementárních řádkových operací?
(2) Napište dva maticové polynomy stupně 1, jejichž součin je polynom stupně 1.
(3) Vysvětlete, jaký je vztah mezi podobností matic a ekvivalencí jejich charakteristických matic.
(4) Vyslovte definici kanonického tvaru polynomiální matice. Proč je tento kanonický tvar určen jednoznačně?

(5) Jaký je vztah mezi maticí J v Jordanově kanonickém tvaru a kanonickým tvarem její charakteristické matice $J-\lambda E$? Napište několik matic v Jordanově kanonickém tvaru s více buňkami různých velikostí a s několika vlastními čísly a k nim najděte příslušný kanonický tvar charakteristické matice.

(6) Vyslovte definici minimálního polynomu matice $A \neq 0$. Jak najdeme minimální polynom matice pomocí kanonického tvaru její charakteristické matice? Najděte matice 4×4 s minimálním polynomem stupně 1, 2, 3 a 4.

Příklady k procvičení.

(1) Najděte Jordanův kanonický tvar následujících matic A_i a matice podobnosti P_i takové, že $J = P_i^{-1}\cdot A_i \cdot P_i$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 4 \\ 7 & -7 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -9 \\ 9 & -3 & -1 & -9 \\ 9 & 0 & -3 & -9 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Které z následujících matic jsou navzájem podobné?

$$B_1 = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[Řešení: B_1 je podobná B_3, B_2, B_4 a B_5 jsou si navzájem podobné.]

(3) Určete kanonické tvary charakteristických matic příslušných maticím

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

[Řešení:

$$K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2)^3 \end{pmatrix}$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

(4) Určete minimální polynom následujících matic

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

[Řešení: $m_1 = (\lambda - 3)^2(\lambda - 4)$; $m_2 = (\lambda - 3)^2$; $m_3 = (\lambda - 3)^3$; $m_4 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$.]

(5) Najděte matici, jejíž minimální polynom je
  (a) polynom λ^2 a matice má rozměry 3×3
  (b) polynom prvního řádu a matice má rozměry 2×2

[Řešení: např. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.]

Rejstřík

Další literatura

[D] M. Doupovec, Diferenciální geometrie a tenzorový počet, VUT Brno, 1999.

[JS] J. Janyška, A. Sekaninová, Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik, MU Brno, 1996.

[K] A. I. Kostrikin, Exercises in algebra: A collection of exercises in algebra, linear algebra and geometry, Gordon and Breach Publishers, 1996.

[KM] A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin, Linear algebra and geometry, Gordon and Breach Publishers, 1997.

[S] J. Slovák, Lineární algebra, elektronický učební text, `www.math.muni.cz/~slovak`.

Ke kapitolám 1, 2 a 3 lze doporučit [JS], [K] a [KM], ke kapitole 4 [D], [K], [KM] a [S] a ke kapitole 5 [S]. Mnohé příklady v tomto textu pocházejí z [JS] a [K].