Úlohy k procvičování textu o svazech

Číslo za pomlčkou v označení úlohy je číslo kapitoly textu, která je úlohou procvičovaná. Každá úloha je vyřešena o několik stránek později.

Kontrolní otázky - zadání

Odpovězte, zda uvedené tvrzení je pravdivé.

[**K1**-2] **ano - ne** Každý svaz na tříprvkové množině je řetězec.

[**K2**-2] **ano - ne** Množina všech prvoideálů okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ uspořádaná inkluzí tvoří svaz.

[**K3**-3] **ano - ne** Každý svazový homomorfismus je izotonní zobrazení.

[**K4**-3] **ano - ne** Je-li S svaz a M jeho neprázdná podmnožina, která je současně jeho ideálem i filtrem, pak $M = S$.

[**K5**-3] **ano - ne** Každé izotonní zobrazení mezi konečnými svazy je svazový homomorfismus.

[**K6**-3] **ano - ne** Libovolný svazový homomorfismus mezi konečnými svazy zobrazí nejmenší prvek jednoho svazu na nejmenší prvek druhého svazu.

[**K7**-3] **ano - ne** Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus svazů a $G' \subseteq G$ podsvaz. Pak $f(G')$ je podsvaz svazu H.

[**K8**-4] **ano - ne** Každý desetiprvkový svaz je úplný.

[**K9**-4] **ano - ne** Množina všech ideálů daného okruhu tvoří úplný svaz vzhledem k inkluzi.

[**K10**-4] **ano - ne** Množina všech podokruhů daného okruhu tvoří úplný svaz vzhledem k inkluzi.

[**K11**-4] **ano - ne** Složením dvou homomorfismů svazů dostaneme homomorfismus svazů.

[**K12**-4] **ano - ne** Každý řetězec, který má nejmenší i největší prvek, je úplný svaz.

[**K13**-4] **ano - ne** Je-li G konečný neprázdný svaz a $f : G \to G$ izotonní zobrazení, pak existuje $g \in G$ tak, že $f(g) = g$.

[**K14**-4] **ano - ne** Žádný nekonečný řetězec není úplný svaz.

[**K15**-4] **ano - ne** Existuje úplný svaz a jeho podsvaz, který není úplný.

[**K16**-4] **ano - ne** Existuje úplný svaz a jeho ideál, který není úplným svazem.

[**K17**-4] **ano - ne** Existuje úplný svaz a jeho filtr, který není úplným svazem.

[**K18**-4] **ano - ne** Je-li $f : G \to H$ homomorfismus svazů a $G' \subseteq G$ je ideál svazu G, pak $f(G')$ je ideál svazu H.

[**K19**-4] **ano - ne** Každý svaz, který má alespoň dva prvky, obsahuje dvojprvkový podsvaz.

[**K20**-5] **ano - ne** Součin dvou libovolných svazů, které jsou řetězci, je opět řetězec.

[**K21**-5] **ano - ne** Součin dvou úplných svazů je úplný.

[**K22**-5] **ano - ne** Podsvaz úplného svazu je úplný, právě když obsahuje svůj největší a nejmenší prvek.

[**K23**-6] **ano - ne** Nechť $f : G \to H$ je surjektivní homomorfismus svazů. Pak svaz G je modulární, právě když svaz H je modulární.

[**K24**-6] **ano - ne** Svaz všech podgrup libovolné komutativní grupy je modulární.

[**K25**-7] **ano - ne** Každý úplný svaz je distributivní.

[**K26**-7] **ano - ne** Každý modulární svaz je distributivní.

[**K27**-7] **ano - ne** Existují distributivní svazy G, H takové, že svaz $G \times H$ není modulární.

[**K28**-7] **ano - ne** Nechť $f : G \to H$ je surjektivní homomorfismus svazů. Pak svaz G je distributivní, právě když svaz H je distributivní.

[**K29**-7] **ano - ne** Svaz všech podgrup libovolné konečné komutativní grupy je distributivní.

[**K30**-7] **ano - ne** V libovolném konečném distributivním svazu tvoří množina všech $\vee$-nedosažitelných prvků podsvaz.

[**K31**-8] **ano - ne** Každý komplementární svaz je modulární.

[**K32**-8] **ano - ne** Každá Booleova algebra je konečná.

[**K33**-8] **ano - ne** Počet prvků libovolné konečné Booleovy algebry je sudé číslo.

[**K34**-8] **ano - ne** Počet prvků libovolné konečné Booleovy algebry je mocnina 2.

[**K35**-8] **ano - ne** V modulárním svazu je komplement prvku, pokud existuje, určen jednoznačně.

[**K36**-8] **ano - ne** Libovolné dvě konečné Booleovy algebry o stejném počtu prvků jsou izomorfní.

[**K37**-8] **ano - ne** Nechť G je Booleova algebra a $f : G \to H$ je surjektivní homomorfismus svazů. Pak H je distributivní svaz.

[**K38**-8] **ano - ne** Nechť G je Booleova algebra a $f : G \to H$ je surjektivní homomorfismus svazů. Pak H je modulární svaz.

[**K39**-9] **ano - ne** Každý netriviální Booleův okruh má charakteristiku 2.

[**K40**-9] **ano - ne** Každý konečný okruh charakteristiky 2 je Booleův.

Příklady - zadání

[**P1** -1] Udejte příklad grupy, která je polosvazem.

[**P2** -2] Udejte příklad polosvazu, který není svazem.

[**P3** -3] Udejte příklad sedmiprvkového svazu S, který je izomorfní s duálním svazem ke svazu S.

[**P4** -3] Udejte příklad pětiprvkového svazu, který není izomorfní se svazem k němu duálním.

[**P5** -3] Udejte příklad svazu, který obsahuje jako podsvaz řetězec libovolné konečné délky.

[**P6** -3] Udejte příklad svazu, který obsahuje jako podsvaz řetězec libovolné konečné délky, ale neobsahuje podsvaz izomorfní s $(\mathbb{N}, \leq)$.

[**P7** -3] Udejte příklad bijektivního izotonního zobrazení mezi uspořádanými množinami, které není izomorfismus uspořádaných množin.

[**P8** -3] Udejte příklad izotonního zobrazení mezi svazy, které není svazový homomorfismus.

[**P9** -4] Udejte příklad nekonečného úplného svazu S, který není izomorfní s duálním svazem ke svazu S.

[**P10** -4] Udejte příklad svazu S, který je izomorfní s duálním svazem ke svazu S a který není úplným svazem.

[**P11** -6] Udejte příklad čtyřprvkového svazu, který není modulární.

[**P12** -6] Udejte příklad šestiprvkového svazu, který není modulární.

[**P13** -6] Udejte příklad surjektivního svazového homomorfismu f nemodulárního svazu A na modulární svaz B.

[**P14** -6] Udejte příklad šestiprvkového svazu, který obsahuje dva různé podsvazy izomorfní s N_5 (s pětiúhelníkem).

[**P15** -6] Udejte příklad šestiprvkového svazu, který obsahuje podsvaz izomorfní s N_5 (s pětiúhelníkem) a podsvaz izomorfní s M_5 (diamantem).

[**P16** -7] Udejte příklad sedmiprvkového modulárního svazu, který není distributivní.

[**P17** -7] Udejte příklad surjektivního svazového homomorfismu f nedistributivního svazu A na distributivní svaz B.

[**P18** -8] Udejte příklad šestiprvkového komplementárního svazu.

[**P19** -8] Udejte příklad distributivního svazu, který není komplementární.

[**P20** -8] Udejte příklad komplementárního svazu, který není distributivní.

[**P21** -8] Udejte příklad Booleovy algebry, která není modulární svaz.

[**P22**-8] Udejte příklad Booleovy algebry a jejího podsvazu, který není její Booleovou podalgebrou.

[**P23**-8] Udejte příklad Booleovy algebry a jejího pětiprvkového podsvazu.

[**P24**-8] Udejte příklad Booleovy algebry B a svazového homomorfismu $f : B \to B$, který není homomorfismus Booleových algeber.

[**P25**-9] Udejte příklad Booleova okruhu, který není obor integrity.

[**P26**-9] Udejte příklad Booleova okruhu, který je těleso.

[**P27**-9] Udejte příklad tříprvkového Booleova okruhu.

Úlohy - zadání

[**Ú1**-2] V Gaussově rovině komplexních čísel uvažme pro libovolná reálná $a < b$ následující oblouk na jednotkové kružnici:

$$K(a,b) = \{\cos t + i \sin t;\ t \in \mathbb{R},\ a < t < b\}.$$

Nechť

$$\mathcal{K} = \{K(a,b);\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina ($\mathcal{K}$ $\subseteq$) tvoří svaz, a pokud ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú2**-2] Uvažme rovinu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Pro libovolný bod $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a libovolné $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, označme $K(x,y,r)$ otevřený kruh o středu (x,y) a poloměru r

$$K(x,y,r) = \{(u,v);\ u,v \in \mathbb{R},\ (x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2\}.$$

Označme $\mathcal{K}$ množinu všech kruhů spolu s prázdnou množinou:

$$\mathcal{K} = \{K(x,y,r);\ x,y,r \in \mathbb{R},\ r > 0\} \cup \{\emptyset\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{K}$ vzhledem k množinové inkluzi tvoří svaz. Pokud ano, popište, jak vypadají infima a suprema. Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú3**-3] Je dána konečná neprázdná množina Y. Označme $n = |Y|$ počet jejích prvků a $\mathcal{P}(Y)$ množinu všech jejích podmnožin. Uvažme zobrazení $f : \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ dané předpisem $f(A) = |A|$ pro libovolné $A \subseteq Y$ (je tedy $f(A)$ počet prvků množiny A.)

(a) Rozhodněte, zda zobrazení f je homomorfismus svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ do svazu $(\mathbb{N}\cup\{0\}, \leq)$.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení f je izotonní zobrazení uspořádané množiny $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ do uspořádané množiny $(\mathbb{N}\cup\{0\}, \leq)$.

(c) Určete, pro která nezáporná celá čísla k je množina $f^{-1}(k) = \{A \subseteq Y;\ f(A) = k\}$ všech k-prvkových podmnožin množiny Y podsvazem svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú4**-4] Označme $T = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ a > b\}$ podmnožinu uspořádané množiny $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$, kde pro libovolné $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ klademe $(a,b) \preceq (c,d)$ právě tehdy, když $a \leq c$ a současně $b \leq d$.

(a) Rozhodněte, zda T je ideál svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$.

(b) Rozhodněte, zda T je filtr svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$.

(c) Rozhodněte, zda T je podsvaz svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$.

(d) Rozhodněte, zda zobrazení $f : T \to \mathbb{N}$ určené předpisem $f((a,b)) = a + b$ je izotonní zobrazení $(T, \preceq)$ do $(\mathbb{N}, \leq)$.

(e) Rozhodněte, zda zobrazení $f : T \to \mathbb{N}$ určené předpisem $f((a,b)) = a + b$ je homomorfismus svazu $(T, \preceq)$ do svazu $(\mathbb{N}, \leq)$.

(f) Rozhodněte, zda svaz $(T, \preceq)$ je úplný svaz.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú5**-7] Jsou dány dvě dvojprvkové grupy G, H. Popište svaz všech podgrup jejich součinu, tj. svaz všech podgrup grupy $G \times H$ a rozhodněte, zda je tento svaz

(a) modulární;

(b) distributivní.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú6**-7] Nechť X je neprázdná množina. Označme

$$\mathcal{T}(X) = \{\rho \subseteq X \times X;\ \forall x,y,z \in X\colon ((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho \implies (x,z) \in \rho)\}$$

množinu všech tranzitivních relací na X.

(a) Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathcal{T}(X), \subseteq)$ je svaz, a pro libovolná $\sigma, \rho \in \mathcal{T}(X)$ popište $\sigma \wedge \rho$ a $\sigma \vee \rho$.

(b) Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{T}(X), \subseteq)$ tvoří úplný svaz.

(c) Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{T}(X), \subseteq)$ tvoří distributivní svaz.

(d) Rozhodněte, zda $\mathcal{T}(X)$ je podsvazem svazu $(\mathcal{P}(X \times X), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}(X \times X)$ značí množinu všech binárních relací na množině X.

Své odpovědi zdůvodněte.

[**Ú7**-8] Pro libovolná reálná čísla a, b taková, že $a < 0$, $b > 0$, uvažme otevřený interval

$$(a,b) = \{t \in \mathbb{R};\ a < t < b\}.$$

Nechť S je množina všech takových intervalů:

$$S = \{(a,b);\ a,b \in \mathbb{R},\ a < 0,\ b > 0\}.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(S, \subseteq)$ tvoří

(a) svaz;
(b) modulární svaz;
(c) distributivní svaz;
(d) Booleovu algebru.

Pokud v některém případě odpovíte ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú8** -8] Pro libovolnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ uvažme následující množinu polynomů s reálnými koeficienty:

$$P(M) = \{f \in \mathbb{R}[x];\ \forall a \in M:\ f(a) = a\}.$$

Položme $\mathcal{P} = \{P(M);\ M \subseteq \mathbb{R}\}$. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{P}, \subseteq)$ tvoří

(a) svaz;
(b) Booleovu algebru.

Pokud v některém případě odpovíte ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú9** -8] V Gaussově rovině komplexních čísel uvažme jednotkovou kružnici

$$K = \{\cos t + i \sin t;\ t \in \mathbb{R}\}$$

a pro libovolná reálná a, b taková, že $a < b < a + \pi$, definujme následující otevřený oblouk na jednotkové kružnici:

$$K(a, b) = \{\cos t + i \sin t;\ t \in \mathbb{R},\ a < t < b\}$$

(uvědomte si, že podmínka $a < b < a + \pi$ znamená, že oblouk $K(a, b)$ je částí půlkružnice). Nechť

$$\mathcal{K} = \{K(a, b);\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b < a + \pi\} \cup \{K, \emptyset\}.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{K}, \subseteq)$ tvoří

(a) svaz;
(b) Booleovu algebru.

Pokud v některém případě odpovíte ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú10** -8] Pro libovolná reálná čísla $a < b$ uvažme otevřený interval

$$(a, b) = \{t \in \mathbb{R};\ a < t < b\}.$$

Nechť S je množina všech takových intervalů spolu s prázdnou množinou:

$$S = \{(a, b);\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(S, \subseteq)$ tvoří

(a) svaz;

(b) modulární svaz;

(c) distributivní svaz;

(d) Booleovu algebru.

Pokud v některém případě odpovíte ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú11** -8] Nechť X je neprázdná množina. Označme

$$\mathcal{S}(X) = \{\rho \subseteq X \times X;\ \forall x, y \in X : ((x,y) \in \rho \implies (y,x) \in \rho)\}$$

množinu všech symetrických relací na X. Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathcal{S}(X), \subseteq)$ je svaz. Rozhodněte, zda $\mathcal{S}(X)$ je podsvaz svazu $(\mathcal{P}(X \times X), \cup, \cap)$, kde $\mathcal{P}(X \times X)$ označuje množinu všech binárních relací na množině X. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{S}(X), \subseteq)$ tvoří

(a) úplný svaz;

(b) komplementární svaz;

(c) distributivní svaz;

(d) Booleovu algebru.

Své odpovědi zdůvodněte.

[**Ú12** -8] Je dána konečná neprázdná množina Y a v ní pevně zvolený prvek $a \in Y$. Označme $\mathcal{P}(Y)$ množinu všech podmnožin množiny Y. Uvažme zobrazení $f : \mathcal{P}(Y) \to \{0, 1\}$ dané následujícím předpisem: pro libovolné $A \subseteq Y$ klademe $f(A) = 1$, jestliže $a \in A$, a $f(A) = 0$ v opačném případě. Označme $X = \{A \subseteq Y;\ f(A) = 1\}$.

(a) Rozhodněte, zda zobrazení f je homomorfismus svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ do svazu $(\{0, 1\}, \leq)$.

(b) Rozhodněte, zda X je ideál, resp. filtr svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$.

(c) Rozhodněte, zda $(X, \subseteq)$ je Booleova algebra.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Kontrolní otázky - řešení

[**K1**-2] **ano** Každý svaz na tříprvkové množině je řetězec. *[Jeden prvek musí být největší (jako supremum všech tří prvků), jeden nejmenší (jako infimum všech tří prvků), proto je každý prvek srovnatelný s každým.]*

[**K2**-2] **ne** Množina všech prvoideálů okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ uspořádaná inkluzí tvoří svaz. *[Množina všech prvoideálů okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ se skládá z nulového ideálu a hlavních ideálů (p), kde p probíhá všechna prvočísla. Proto například neexistuje žádný prvoideál obsahující ideály (2) a (3).]*

[**K3**-3] **ano** Každý svazový homomorfismus je izotonní zobrazení. *[Věta 3.3.]*

[**K4**-3] **ano** Je-li S svaz a M jeho neprázdná podmnožina, která je současně jeho ideálem i filtrem, pak $M = S$. *[Je-li $m \in M$, pak pro libovolné $s \in S$ musí M obsahovat i $m \wedge s \leq m$, protože je M ideál, a tedy i $s \geq m \wedge s$, protože je M filtr.]*

[**K5**-3] **ne** Každé izotonní zobrazení mezi konečnými svazy je svazový homomorfismus. *[Příkladem je izotonní bijekce z čtyřprvkového svazu, který není řetězec, do čtyřprvkového svazu, který je řetězec.]*

[**K6**-3] **ne** Libovolný svazový homomorfismus mezi konečnými svazy zobrazí nejmenší prvek jednoho svazu na nejmenší prvek druhého svazu. *[Například mezi dvěma dvojprvkovými svazy konstantní zobrazení na větší prvek.]*

[**K7**-3] **ano** Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus svazů a $G' \subseteq G$ podsvaz. Pak $f(G')$ je podsvaz svazu H. *[Plyne z věty 3.3, neboť zúžení zobrazení f na G' je homomorfismus svazů $G' \to H$.]*

[**K8**-4] **ano** Každý desetiprvkový svaz je úplný. *[Libovolný neprázdný konečný svaz je úplný.]*

[**K9**-4] **ano** Množina všech ideálů daného okruhu tvoří úplný svaz vzhledem k inkluzi. *[Plyne z věty 4.1 a skript Rosický, Algebra, věta 9.4.]*

[**K10**-4] **ano** Množina všech podokruhů daného okruhu tvoří úplný svaz vzhledem k inkluzi. *[Plyne z věty 4.1 a skript Rosický, Algebra, věta 3.8.]*

[**K11**-4] **ano** Složením dvou homomorfismů svazů dostaneme homomorfismus svazů. *[Plyne z definice homomorfismu svazů a toho, že tuto vlastnost má homomorfismus grupoidů.]*

[**K12**-4] **ne** Každý řetězec, který má nejmenší i největší prvek, je úplný svaz. *[Například $(\mathbb{Z} - \{0\}, \preceq)$, kde $\preceq$ je definováno takto: pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ klademe $a \preceq b$, právě když $ab > 0$ a $a \leq b$ nebo když $a > 0$ a $b < 0$. Názorně řečeno, v řetězci všech nenulových celých čísel jsme vyměnili kladná a záporná čísla: $1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec -3 \prec -2 \prec -1$. To je řetězec, má nejmenší i největší prvek, ale množina přirozených čísel zde nemá supremum.]*

[**K13**-4] **ano** Je-li G konečný neprázdný svaz a $f : G \to G$ izotonní zobrazení, pak existuje $g \in G$ tak, že $f(g) = g$. *[Plyne z věty 4.3, protože každý konečný neprázdný svaz je úplný.]*

[**K14**-4] **ne** Žádný nekonečný řetězec není úplný svaz. *[Řetězec* $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ *je úplný svaz.]*

[**K15**-4] **ano** Existuje úplný svaz a jeho podsvaz, který není úplný. *[Uvažte například úplný svaz* $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ *a jeho podsvaz* $\mathbb{N}$*, který nemá největší prvek.]*

[**K16**-4] **ano** Existuje úplný svaz a jeho ideál, který není úplným svazem. *[Uvažte například úplný svaz* $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ *a jeho ideál* $\mathbb{N}$*, který nemá největší prvek.]*

[**K17**-4] **ano** Existuje úplný svaz a jeho filtr, který není úplným svazem. *[Uvažte například úplný svaz* $(\mathbb{Z} \cup \{\infty, -\infty\}, \leq)$ *a jeho filtr* $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$*, který nemá nejmenší prvek.]*

[**K18**-4] **ne** Je-li $f : G \to H$ homomorfismus svazů a $G' \subseteq G$ je ideál svazu G, pak $f(G')$ je ideál svazu H. *[Uvažte injektivní homomorfismus z tříprvkového svazu G do čtyřprvkového svazu H, který není řetězec. Pak $G' = G$ je ideál svazu G, ale $f(G')$ není ideál svazu H.]*

[**K19**-4] **ano** Každý svaz, který má alespoň dva prvky, obsahuje dvojprvkový podsvaz. *[Zvolte libovolně dva různé prvky a, b. Pak $a \vee b$ a $a \wedge b$ jsou dva různé srovnatelné prvky a tedy $\{a \vee b, a \wedge b\}$ tvoří dvojprvkový podsvaz.]*

[**K20**-5] **ne** Součin dvou libovolných svazů, které jsou řetězci, je opět řetězec. *[Předposlední poznámka na konci kapitoly 5.]*

[**K21**-5] **ano** Součin dvou úplných svazů je úplný. *[Plyne z toho, že v součinu svazů platí $(a, b) \leq (c, d)$, právě když $a \leq c$ a současně $b \leq d$.]*

[**K22**-5] **ne** Podsvaz úplného svazu je úplný, právě když obsahuje svůj největší a nejmenší prvek. *[Na množině $\mathbb{Z}$ uvažte následující uspořádání $\preceq$: pro libovolná celá čísla a, b klademe $a \preceq b$, právě když nastává některá z následujících podmínek: buď $ab > 0$ a $a \leq b$, anebo $b \leq 0 \leq a$. Názorně řečeno, v řetězci všech celých čísel jsme vyměnili kladná a záporná čísla:* $1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec 0 \prec \cdots \prec -3 \prec -2 \prec -1$. *Promyslete si, že jsme dostali úplný svaz. Odstraněním nuly získáme podsvaz, který už nebude úplný: například množina kladných čísel nemá supremum.]*

[**K23**-6] **ne** Nechť $f : G \to H$ je surjektivní homomorfismus svazů. Pak svaz G je modulární, právě když svaz H je modulární. *[Uvažte situaci, kdy G není modulární a H je jednoprvkový.]*

[**K24**-6] **ano** Svaz všech podgrup libovolné komutativní grupy je modulární. *[Viz důsledek věty 6.1.]*

[**K25**-7] **ne** Každý úplný svaz je distributivní. *[Příkladem je svaz N_5 (pětiúhelník) nebo svaz M_5 (diamant).]*

[**K26**-7] **ne** Každý modulární svaz je distributivní. *[Příkladem je svaz M_5 (diamant), který je modulární, ale není distributivní.]*

[**K27**-7] **ne** Existují distributivní svazy G, H takové, že svaz $G \times H$ není modulární. *[Věty 7.4 a 7.2.]*

[K28-7] **ne** Nechť $f : G \to H$ je surjektivní homomorfismus svazů. Pak svaz G je distributivní, právě když svaz H je distributivní. *[Uvažte situaci, kdy G není distributivní a H je jednoprvkový.]*

[K29-7] **ne** Svaz všech podgrup libovolné konečné komutativní grupy je distributivní. *[Uvažte grupu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, která má tři dvojprvkové podgrupy a tedy její svaz podgrup je izomorfní se svazem M_5 (diamantem).]*

[K30-7] **ne** V libovolném konečném distributivním svazu tvoří množina všech $\vee$-nedosažitelných prvků podsvaz. *[Uvažte svaz všech podmnožin množiny $\{1, 2\}$, tj. svaz $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \subseteq)$, který má dva $\vee$-nedosažitelné prvky, totiž $\{1\}$ a $\{2\}$.]*

[K31-8] **ne** Každý komplementární svaz je modulární. *[Příkladem je svaz N_5 (pětiúhelník).]*

[K32-8] **ne** Každá Booleova algebra je konečná. *[Příkladem je Booleova algebra všech podmnožin nějaké nekonečné množiny.]*

[K33-8] **ne** Počet prvků libovolné konečné Booleovy algebry je sudé číslo. *[Jednoprvkový svaz je Booleova algebra.]*

[K34-8] **ano** Počet prvků libovolné konečné Booleovy algebry je mocnina 2. *[Plyne z věty 8.7.]*

[K35-8] **ne** V modulárním svazu je komplement prvku, pokud existuje, určen jednoznačně. *[Příkladem je svaz M_5 (diamant).]*

[K36-8] **ano** Libovolné dvě konečné Booleovy algebry o stejném počtu prvků jsou izomorfní. *[Plyne z věty 8.7.]*

[K37-8] **ano** Nechť G je Booleova algebra a $f : G \to H$ je surjektivní homomorfismus svazů. Pak H je distributivní svaz. *[Protože G je Booleova algebra, je to distributivní svaz. Podle věty 7.4 je proto H distributivní svaz.]*

[K38-8] **ano** Nechť G je Booleova algebra a $f : G \to H$ je surjektivní homomorfismus svazů. Pak H je modulární svaz. *[Protože G je Booleova algebra, je to distributivní svaz. Podle věty 7.4 je proto H distributivní svaz a podle věty 7.2 je i modulární.]*

[K39-9] **ano** Každý netriviální Booleův okruh má charakteristiku 2. *[Věta 9.1.]*

[K40-9] **ne** Každý konečný okruh charakteristiky 2 je Booleův. *[Například těleso o 4 prvcích.]*

Příklady - řešení

[P1-1] Udejte příklad grupy, která je polosvazem. *[Jediným možným příkladem je jednoprvková grupa.]*

[P2-2] Udejte příklad polosvazu, který není svazem. *[Například tříprvková uspořádaná množina, jejíž Hasseův diagram je tvaru V.]*

[P3-3] Udejte příklad sedmiprvkového svazu S, který je izomorfní s duálním svazem ke svazu S. *[Například sedmiprvkový řetězec.]*

[P4-3] Udejte příklad pětiprvkového svazu, který není izomorfní se svazem k němu duálním. *[Například* $(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}, \subseteq)$*.]*

[P5-3] Udejte příklad svazu, který obsahuje jako podsvaz řetězec libovolné konečné délky. *[Například řetězec* $(\mathbb{N}, \leq)$*.]*

[P6-3] Udejte příklad svazu, který obsahuje jako podsvaz řetězec libovolné konečné délky, ale neobsahuje podsvaz izomorfní s $(\mathbb{N}, \leq)$. *[Například sjednocení posloupnosti disjunktních řetězců délky 1, 2, 3, ..., ke kterému přidáte jeden největší a jeden nejmenší prvek.]*

[P7-3] Udejte příklad bijektivního izotonního zobrazení mezi uspořádanými množinami, které není izomorfismus uspořádaných množin. *[Příkladem je izotonní bijekce z čtyřprvkového svazu, který není řetězec, do čtyřprvkového svazu, který je řetězec.]*

[P8-3] Udejte příklad izotonního zobrazení mezi svazy, které není svazový homomorfismus. *[Například bijektivní izotonní zobrazení ze čtyřprvkového svazu, který není řetězec, do čtyřprvkového svazu, který je řetězec.]*

[P9-4] Udejte příklad nekonečného úplného svazu S, který není izomorfní s duálním svazem ke svazu S. *[Například svaz* $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$*.]*

[P10-4] Udejte příklad svazu S, který je izomorfní s duálním svazem ke svazu S a který není úplným svazem. *[Například svaz* $(\mathbb{Z}, \leq)$*.]*

[P11-6] Udejte příklad čtyřprvkového svazu, který není modulární. *[Neexistuje, viz větu 6.5.]*

[P12-6] Udejte příklad šestiprvkového svazu, který není modulární. *[Například svaz* N_5 *(pětiúhelník), ke kterému přidáte ještě jeden prvek jako největší.]*

[P13-6] Udejte příklad surjektivního svazového homomorfismu f nemodulárního svazu A na modulární svaz B. *[Za* A *lze vzít libovolný nemodulární svaz, například pětiúhelník* N_5*. Za* B *zvolte jednoprvkový svaz. Jediné zobrazení* $f : A \to B$ *je homomorfismus svazů.]*

[P14-6] Udejte příklad šestiprvkového svazu, který obsahuje dva různé podsvazy izomorfní s N_5 (s pětiúhelníkem). *[Modifikujte svaz* M_5 *(diamant) tak, že mezi nejmenší prvek a prvek nakreslený uprostřed umístíte další prvek.]*

[P15-6] Udejte příklad šestiprvkového svazu, který obsahuje podsvaz izomorfní s N_5 (s pětiúhelníkem) a podsvaz izomorfní s M_5 (diamantem). *[Modifikujte svaz* M_5 *(diamant) tak, že mezi nejmenší prvek a prvek nakreslený uprostřed umístíte další prvek.]*

[P16-7] Udejte příklad sedmiprvkového modulárního svazu, který není distributivní. *[Například drak, který vznikne z diamantu* M_5 *tím, že pod jeho nejmenší prvek přidáme ještě řetězec dvou dalších prvků.]*

[**P17**-7] Udejte příklad surjektivního svazového homomorfismu f nedistributivního svazu A na distributivní svaz B. *[Za A lze vzít libovolný nedistributivní svaz, například N_5 nebo M_5. Za B zvolte jednoprvkový svaz. Jediné zobrazení $f : A \to B$ je homomorfismus svazů.]*

[**P18**-8] Udejte příklad šestiprvkového komplementárního svazu. *[Například svaz $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}, \subseteq)$.]*

[**P19**-8] Udejte příklad distributivního svazu, který není komplementární. *[Například tříprvkový řetězec.]*

[**P20**-8] Udejte příklad komplementárního svazu, který není distributivní. *[Příkladem je svaz M_5 (diamant).]*

[**P21**-8] Udejte příklad Booleovy algebry, která není modulární svaz. *[Neexistuje: dle definice je Booleova algebra distributivní, a proto i modulární.]*

[**P22**-8] Udejte příklad Booleovy algebry a jejího podsvazu, který není její Booleovou podalgebrou. *[Například libovolná jednoprvková podmnožina dvojprvkové Booleovy algebry.]*

[**P23**-8] Udejte příklad Booleovy algebry a jejího pětiprvkového podsvazu. *[Například Booleova algebra všech podmnožin množiny $\{1, 2, 3\}$ a její podsvaz $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.]*

[**P24**-8] Udejte příklad Booleovy algebry B a svazového homomorfismu $f : B \to B$, který není homomorfismus Booleových algeber. *[Například dvojprvková Booleova algebra a nějaké konstantní zobrazení (tj. oba prvky zobrazí na stejný prvek).]*

[**P25**-9] Udejte příklad Booleova okruhu, který není obor integrity. *[Příkladem je Booleův okruh, který má alespoň 4 prvky, například $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.]*

[**P26**-9] Udejte příklad Booleova okruhu, který je těleso. *[Jediným možným příkladem je dvojprvkový Booleův okruh.]*

[**P27**-9] Udejte příklad tříprvkového Booleova okruhu. *[Neexistuje, viz věty 9.3 a 8.7.]*

Úlohy - řešení

[**Ú1**-2] V Gaussově rovině komplexních čísel uvažme pro libovolná reálná $a < b$ následující oblouk na jednotkové kružnici:

$$K(a, b) = \{\cos t + i \sin t;\ t \in \mathbb{R},\ a < t < b\}.$$

Nechť

$$\mathcal{K} = \{K(a, b);\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{K} \subseteq)$ tvoří svaz, a pokud ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[Nejde o svaz: například $K(0, \frac{\pi}{2})$ a $K(\pi, \frac{3\pi}{2})$ nemají supremum: množina jejich horních závor nemá nejmenší prvek, neboť horními závorami jsou $K(0, \frac{3\pi}{2})$ a $K(\pi, \frac{5\pi}{2})$ hledané supremum by muselo být podmnožinou obou těchto oblouků, tedy i jejich průniku $K(0, \frac{\pi}{2}) \cup K(\pi, \frac{3\pi}{2})$, muselo by však obsahovat oba oblouky $K(0, \frac{\pi}{2})$ a $K(\pi, \frac{3\pi}{2})$, tedy bylo by rovno $K(0, \frac{\pi}{2}) \cup K(\pi, \frac{3\pi}{2})$, to však není prvek $\mathcal{K}$.]

[**Ú2** -2] Uvažme rovinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pro libovolný bod $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a libovolné $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, označme $K(x, y, r)$ otevřený kruh o středu (x, y) a poloměru r

$$K(x, y, r) = \{(u, v);\, u, v \in \mathbb{R},\ (x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2\}.$$

Označme $\mathcal{K}$ množinu všech kruhů spolu s prázdnou množinou:

$$\mathcal{K} = \{K(x, y, r);\, x, y, r \in \mathbb{R},\ r > 0\} \cup \{\emptyset\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{K}$ vzhledem k množinové inkluzi tvoří svaz. Pokud ano, popište, jak vypadají infima a suprema. Svá tvrzení zdůvodněte.

[Nejde o svaz. Uvažme dva disjunktní kruhy, například kruhy $K(-1, 0, 1)$ a $K(1, 0, 1)$. Množina horních závor se skládá ze všech kruhů, obsahujících sjednocení obou kruhů jako svou podmnožinu. Supremum těchto dvou kruhů by tedy musel být nejmenší prvek této množiny horních závor. Ale žádný z těchto kruhů není obsažen v ostatních jako jejich podmnožina: uvědomte si, jak vypadá průnik všech těchto kruhů, je to sjednocení dvou otevřených půlkruhů a uzavřeného čtverce. Diskutovaným supremem by musel být kruh, který by byl obsažen v právě popsaném útvaru a obsahoval by oba kruhy. Takový kruh neexistuje.]

[**Ú3** -3] Je dána konečná neprázdná množina Y. Označme $n = |Y|$ počet jejích prvků a $\mathcal{P}(Y)$ množinu všech jejích podmnožin. Uvažme zobrazení $f : \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ dané předpisem $f(A) = |A|$ pro libovolné $A \subseteq Y$ (je tedy $f(A)$ počet prvků množiny A.)

(a) Rozhodněte, zda zobrazení f je homomorfismus svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ do svazu $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq)$.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení f je izotonní zobrazení uspořádané množiny $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ do uspořádané množiny $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq)$.

(c) Určete, pro která nezáporná celá čísla k je množina $f^{-1}(k) = \{A \subseteq Y;\, f(A) = k\}$ všech k-prvkových podmnožin množiny Y podsvazem svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ve svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ jsou suprema množinová sjednocení a infima množinové průniky. Ve svazu $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq)$ je supremem maximum a infimem minimum. Snadno je vidět, že v případě, kdy je množina Y jednoprvková, je zobrazení f svazový homomorfismus. V případě, kdy množina Y má alespoň dva prvky, pak pro $a, b \in Y$, $a \neq b$, platí $f(\{a\} \cup \{b\}) = f(\{a, b\}) = 2 \neq 1 = \max\{f(\{a\}), f(\{b\})\}$, takže zobrazení f není v případě alespoň dvojprvkové množiny Y svazový homomorfismus. Nechť $A, B \subseteq Y$ jsou libovolné. Pak z $A \subseteq B$ plyne $f(A) \leq f(B)$, a tedy zobrazení f je izotonní. Protože pro libovolné nezáporné celé číslo k má průnik dvou různých k-prvkových množin méně než k prvků, může být množina $f^{-1}(k)$

všech k-prvkových podmnožin množiny Y podsvazem svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ jedině v případě, že je $f^{-1}(k)$ jednoprvková, což nastane právě tehdy, když $k = 0$ nebo když $k = |Y| = n$.]

[**Ú4**-4] Označme $T = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ a > b\}$ podmnožinu uspořádané množiny $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$, kde pro libovolné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ klademe $(a, b) \preceq (c, d)$ právě tehdy, když $a \leq c$ a současně $b \leq d$.

(a) Rozhodněte, zda T je ideál svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$.

(b) Rozhodněte, zda T je filtr svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$.

(c) Rozhodněte, zda T je podsvaz svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$.

(d) Rozhodněte, zda zobrazení $f : T \to \mathbb{N}$ určené předpisem $f((a, b)) = a + b$ je izotonní zobrazení $(T, \preceq)$ do $(\mathbb{N}, \leq)$.

(e) Rozhodněte, zda zobrazení $f : T \to \mathbb{N}$ určené předpisem $f((a, b)) = a + b$ je homomorfismus svazu $(T, \preceq)$ do svazu $(\mathbb{N}, \leq)$.

(f) Rozhodněte, zda svaz $(T, \preceq)$ je úplný svaz.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[T není ideál svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$, neboť například $(3, 2) \in T$, $(1, 2) \preceq (3, 2)$, ale $(1, 2) \notin T$. Podobně T není ani filtr svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$, neboť například $(3, 2) \in T$, $(3, 2) \preceq (3, 4)$, ale $(3, 4) \notin T$. Pro snadnější orientaci v textu budeme značit min *a* max *infimum a supremum ve svazu $(\mathbb{N}, \leq)$. Je ihned vidět, že pro libovolné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ platí $(a, b) \vee (c, d) = (\max\{a, c\}, \max\{b, d\})$ a $(a, b) \wedge (c, d) = (\min\{a, c\}, \min\{b, d\})$. Platí-li $(a, b), (c, d) \in T$, pak $a > b$ a $c > d$, odkud $\max\{a, c\} \geq a > b$ a současně $\max\{a, c\} \geq c > d$, proto $\max\{a, c\} > \max\{b, d\}$, a tedy $(a, b) \vee (c, d) \in T$. Podobně se ověří, že $(a, b) \wedge (c, d) \in T$. Je tedy T podsvaz svazu $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$. Jsou-li $(a, b), (c, d) \in T$ libovolné takové, že $(a, b) \preceq (c, d)$, znamená to, že $a \leq c$ a současně $b \leq d$ odkud sečtením $a + b \leq c + d$, tedy $f((a, b)) \leq f((c, d))$. Ověřili jsme, že zobrazení $f : T \to \mathbb{N}$ je izotonní zobrazení. Zobrazení $f : T \to \mathbb{N}$ není homomorfismus svazu $(T, \preceq)$ do svazu $(\mathbb{N}, \leq)$, neboť například $f((4, 1) \wedge (3, 2)) = f((3, 1)) = 4$, kdežto $\min\{f((4, 1)), f((3, 2))\} = \min\{5, 5\} = 5$. Svaz $(T, \preceq)$ není úplný svaz, neboť nemá největší prvek.]*

[**Ú5**-7] Jsou dány dvě dvojprvkové grupy G, H. Popište svaz všech podgrup jejich součinu, tj. svaz všech podgrup grupy $G \times H$ a rozhodněte, zda je tento svaz

(a) modulární;

(b) distributivní.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Užijeme-li aditivního zápisu, $G = H = \{0, 1\}$ s neutrálním prvkem 0, je grupa $G \times H = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Tato grupa má 5 podgrup: triviální $\{(0, 0)\}$, celou grupu $G \times H$ a tři dvojprvkové. Její svaz podgrup je tedy izomorfní se svazem M_5 (diamant), o kterém víme, že je modulární a není distributivní. Mimochodem, svaz musel být modulární podle důsledku věty 6.1.]

[**Ú6**-7] Nechť X je neprázdná množina. Označme

$$\mathcal{T}(X) = \{\rho \subseteq X \times X;\ \forall x, y, z \in X \colon ((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho \implies (x,z) \in \rho)\}$$

množinu všech tranzitivních relací na X.

(a) Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathcal{T}(X), \subseteq)$ je svaz, a pro libovolná $\sigma, \rho \in \mathcal{T}(X)$ popište $\sigma \wedge \rho$ a $\sigma \vee \rho$.

(b) Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{T}(X), \subseteq)$ tvoří úplný svaz.

(c) Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{T}(X), \subseteq)$ tvoří distributivní svaz.

(d) Rozhodněte, zda $\mathcal{T}(X)$ je podsvazem svazu $(\mathcal{P}(X \times X), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}(X \times X)$ značí množinu všech binárních relací na množině X.

Své odpovědi zdůvodněte.

[Protože průnik libovolného neprázdného systému tranzitivních relací je opět tranzitivní relace a $(\mathcal{T}(X), \subseteq)$ má největší prvek $X \times X$, je podle věty 4.1 $(\mathcal{T}(X), \subseteq)$ úplný svaz, ve kterém jsou infima průniky. Supremem $\rho \vee \sigma$ tranzitivních relací ρ a σ je průnik všech tranzitivních relací obsahujících sjednocení $\rho \cup \sigma$ (tzv. tranzitivní obal sjednocení $\rho \cup \sigma$). Jestliže tedy má množina X alespoň dva prvky $a \neq b$, pak pro tranzitivní relace $\rho = \{(a,b)\}$, $\sigma = \{(b,a)\}$ a $\tau = \{(a,a)\}$ platí $(\rho \vee \sigma) \wedge \tau = \tau \neq \emptyset = (\rho \wedge \tau) \vee (\sigma \wedge \tau)$, a tedy $\mathcal{T}(X)$ není distributivní. Proto ani není podsvazem distributivního svazu $(\mathcal{P}(X \times X), \subseteq)$. Pro jednoprvkovou množinu X naopak $\mathcal{T}(X) = \mathcal{P}(X \times X)$, a tedy je $\mathcal{T}(X)$ podsvazem svazu $(\mathcal{P}(X \times X), \subseteq)$ a je distributivní.]

[**Ú7**-8] Pro libovolná reálná čísla a, b taková, že $a < 0$, $b > 0$, uvažme otevřený interval

$$(a,b) = \{t \in \mathbb{R};\ a < t < b\}.$$

Nechť S je množina všech takových intervalů:

$$S = \{(a,b);\ a, b \in \mathbb{R},\ a < 0,\ b > 0\}.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(S, \subseteq)$ tvoří

(a) svaz;

(b) modulární svaz;

(c) distributivní svaz;

(d) Booleovu algebru.

Pokud v některém případě odpovíte ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[Jde o svaz, v němž suprema jsou sjednocení a infima jsou průniky. Tento svaz je modulární a distributivní. Není to Booleova algebra, neboť nemá nejmenší ani největší prvek.]

[**Ú8**-8] Pro libovolnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ uvažme následující množinu polynomů s reálnými koeficienty:

$$P(M) = \{f \in \mathbb{R}[x];\ \forall a \in M : f(a) = a\}.$$

Položme $\mathcal{P} = \{P(M);\ M \subseteq \mathbb{R}\}$. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{P}, \subseteq)$ tvoří

(a) svaz;

(b) Booleovu algebru.

Pokud v některém případě odpovíte ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[Platí $P(\emptyset) = \mathbb{R}[x]$, což je největší prvek uspořádané množiny $(\mathcal{P}; \subseteq)$. Pro libovolný polynom $f(x) \in R[x]$ a libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí $f(a) = a$, právě když a je kořen polynomu $f(x) - x$. Protože libovolný nenulový polynom může mít jen konečně mnoho kořenů, pro libovolnou nekonečnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ platí $P(M) = \{x\}$, což je nejmenší prvek uspořádané množiny $(\mathcal{P}; \subseteq)$. Protože pro libovolné $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}$ platí

$$M_1 \subseteq M_2 \iff P(M_2) \subseteq P(M_1),$$

tvoří $(\mathcal{P}; \subseteq)$ svaz, kde $P(M_1) \wedge P(M_2) = P(M_1 \cup M_2)$. Jsou-li množiny M_1, M_2 konečné, platí $P(M_1) \vee P(M_2) = P(M_1 \cap M_2)$. Je-li množina M_1 nekonečná, je $P(M_1) \vee P(M_2) = P(M_2)$, je-li množina M_2 nekonečná, je $P(M_1) \vee P(M_2) = P(M_1)$. Svaz $(\mathcal{P}; \subseteq)$ však není Booleova algebra, nebot' například $P(\{0\})$ nemá komplement. Pro libovolnou množinu $M \subseteq R$ platí $P(\{0\}) \wedge P(M) = \{x\}$ právě tehdy, když je M nekonečná. Pak ale

$$P(\{0\}) \vee P(M) = P(\{0\}) \neq \mathbb{R}[x]. \qquad]$$

[**Ú9**-8] V Gaussově rovině komplexních čísel uvažme jednotkovou kružnici

$$K = \{\cos t + i \sin t;\ t \in \mathbb{R}\}$$

a pro libovolná reálná a, b taková, že $a < b < a + \pi$, definujme následující otevřený oblouk na jednotkové kružnici:

$$K(a, b) = \{\cos t + i \sin t;\ t \in \mathbb{R},\ a < t < b\}$$

(uvědomte si, že podmínka $a < b < a + \pi$ znamená, že oblouk $K(a, b)$ je částí půlkružnice). Nechť

$$\mathcal{K} = \{K(a, b);\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b < a + \pi\} \cup \{K, \emptyset\}.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{K}, \subseteq)$ tvoří

(a) svaz;

(b) Booleovu algebru.

Pokud v některém případě odpovíte ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[Jde o svaz, infima jsou průniky, suprema se počítají takto: supremum s $\emptyset$ nebo s K je jasné, pro dva oblouky takové, že jejich sjednocení obsahuje dva protilehlé body kružnice K (tedy jejich sjednocení není podmnožinou žádné půlkružnice) je supremem K, kdežto pro dva oblouky takové, že jejich sjednocení je podmnožinou nějaké půlkružnice, je supremem nejmenší

oblouk obsahující toto sjednocení. Tento svaz není distributivní, proto to není Booleova algebra. Platí totiž například

$$\big(K(0,\tfrac{\pi}{3}) \vee K(\tfrac{2\pi}{3},\pi)\big) \wedge K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}) = K(0,\pi) \wedge K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}) = K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}),$$

kdežto

$$\big(K(0,\tfrac{\pi}{3}) \wedge K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3})\big) \vee \big(K(\tfrac{2\pi}{3},\pi) \wedge K(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3})\big) = \emptyset \vee \emptyset = \emptyset. \qquad]$$

[**Ú10** -8] Pro libovolná reálná čísla $a < b$ uvažme otevřený interval

$$(a,b) = \{t \in \mathbb{R};\ a < t < b\}.$$

Nechť S je množina všech takových intervalů spolu s prázdnou množinou:

$$S = \{(a,b);\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(S,\subseteq)$ tvoří

(a) svaz;

(b) modulární svaz;

(c) distributivní svaz;

(d) Booleovu algebru.

Pokud v některém případě odpovíte ano, popište, jak se počítají všechny operace příslušné algebraické struktury. Svá tvrzení zdůvodněte.

[Jde o svaz, v němž infima jsou průniky. Supremum se počítá takto: pro libovolné $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ takové, že intervaly (a,b) a (c,d) nejsou disjunktní, platí $(a,b) \vee (c,d) = (a,b) \cup (c,d)$. Naopak, pokud například $a < b < c < d$, pak je $(a,b) \vee (c,d) = (c,d) \vee (a,b) = (a,d)$. Pro libovolné $s \in S$ je $s \vee \emptyset = \emptyset \vee s = s$. Tento svaz není modulární, neboť například

$$\big((0,2) \wedge (3,4)\big) \vee (0,1) = \emptyset \vee (0,1) = (0,1),$$

kdežto

$$(0,2) \wedge \big((3,4) \vee (0,1)\big) = (0,2) \wedge (0,4) = (0,2).$$

Proto tento svaz není ani distributivní a tedy ani Booleova algebra.]

[**Ú11** -8] Nechť X je neprázdná množina. Označme

$$\mathcal{S}(X) = \{\rho \subseteq X \times X;\ \forall x,y \in X : ((x,y) \in \rho \implies (y,x) \in \rho)\}$$

množinu všech symetrických relací na X. Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathcal{S}(X),\subseteq)$ je svaz. Rozhodněte, zda $\mathcal{S}(X)$ je podsvaz svazu $(\mathcal{P}(X \times X),\cup,\cap)$, kde $\mathcal{P}(X \times X)$ označuje množinu všech binárních relací na množině X. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\mathcal{S}(X),\subseteq)$ tvoří

(a) úplný svaz;

(b) komplementární svaz;

(c) distributivní svaz;

(d) Booleovu algebru.

Své odpovědi zdůvodněte.

[Protože sjednocení i průnik libovolného systému symetrických relací jsou opět symetrické relace, je $(\mathcal{S}(X), \subseteq)$ úplný svaz, ve kterém jsou infima průniky a suprema sjednocení. Je tedy $\mathcal{S}(X)$ podsvaz Booleovy algebry $(\mathcal{P}(X \times X), \cup, \cap)$. Jako podvaz distributivního svazu je distributivní. Komplementem symetrické relace $\rho \subseteq X \times X$ v Booleově algebře $(\mathcal{P}(X \times X), \cup, \cap)$ je symetrická relace $(X \times X) - \rho$, je tedy $\mathcal{S}(X)$ Booleova podalgebra Booleovy algebry $(\mathcal{P}(X \times X), \cup, \cap)$. Jde tedy o komplementární svaz.]

[**Ú12**-8] Je dána konečná neprázdná množina Y a v ní pevně zvolený prvek $a \in Y$. Označme $\mathcal{P}(Y)$ množinu všech podmnožin množiny Y. Uvažme zobrazení $f : \mathcal{P}(Y) \to \{0,1\}$ dané následujícím předpisem: pro libovolné $A \subseteq Y$ klademe $f(A) = 1$, jestliže $a \in A$, a $f(A) = 0$ v opačném případě. Označme $X = \{A \subseteq Y;\, f(A) = 1\}$.

(a) Rozhodněte, zda zobrazení f je homomorfismus svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ do svazu $(\{0,1\}, \leq)$.

(b) Rozhodněte, zda X je ideál, resp. filtr svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$.

(c) Rozhodněte, zda $(X, \subseteq)$ je Booleova algebra.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ve svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ jsou suprema množinová sjednocení a infima množinové průniky. Ve svazu $(\{0,1\}, \leq)$ je supremem maximum a infimem minimum. Nechť $A, B \subseteq Y$ jsou libovolné. Pak $f(A \cup B) = 0$ právě tehdy, když $a \notin A \cup B$, tj. právě když $a \notin A$ a současně $a \notin B$, což nastane právě tehdy, když $f(A) = 0$ a současně $f(B) = 0$. Je proto $f(A \cup B) = \max\{f(A), f(B)\}$. Podobně se dokáže $f(A \cap B) = \min\{f(A), f(B)\}$, a tedy zobrazení f je svazový homomorfismus. Libovolný prvek množiny X je podmnožina množiny Y obsahující prvek a. Proto budou prvek a obsahovat průniky i sjednocení libovolných dvou prvků množiny X. Proto je X podsvazem svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$. Jistě pro každé $A \in X$ a každé $B \in \mathcal{P}(Y)$ takové, že $A \subseteq B$, platí $B \in X$. Je tedy X filtr svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$. Ideál to však není, neboť $\{a\} \in X$, avšak $\emptyset \notin X$, přestože $\emptyset \subseteq \{a\}$. Jako podsvaz distributivního svazu $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ je $(X, \subseteq)$ distributivní svaz. Je též komplementární, komplementem prvku $A \in X$ je množina $\{a\} \cup (Y - A)$, je tedy $(X, \subseteq)$ Booleova algebra s největším prvkem Y a nejmenším prvkem $\{a\}$.]