## Úlohy k procvičování textu o univerzální algebře

Číslo za pomlčkou v označení úlohy je číslo kapitoly textu, která je úlohou procvičovaná. Každá úloha je vyřešena o několik stránek později.

### Kontrolní otázky - zadání

Odpovězte, zda uvedené tvrzení je pravdivé.

[**K1**-1] **ano - ne** Obsahuje-li typ $\Omega$ alespoň jeden nulární operační symbol, pak je každá $\Omega$-algebra neprázdná.

[**K2**-1] **ano - ne** Obsahuje-li typ $\Omega$ alespoň jeden unární operační symbol, pak je každá $\Omega$-algebra neprázdná.

[**K3**-2] **ano - ne** Množina všech podalgeber dané univerzální algebry $A$ typu $\Omega$ uspořádaná inkluzí tvoří úplný svaz.

[**K4**-2] **ano - ne** Složením homomorfismů $\Omega$-algeber je opět homomorfismus $\Omega$-algeber.

[**K5**-3] **ano - ne** Projekce ze součinu $\Omega$-algeber je surjektivní homomorfismus $\Omega$-algeber.

[**K6**-3] **ano - ne** Součin $\Omega$-algeber přes prázdnou množinu indexů je prázdná $\Omega$-algebra.

[**K7**-4] **ano - ne** Jádro homomorfismu $\Omega$-algeber $A \to B$ je podalgebra $\Omega$-algebry $A$.

[**K8**-4] **ano - ne** Projekce z $\Omega$-algebry na faktorovou algebru je surjektivní homomorfismus $\Omega$-algeber.

[**K9**-4] **ano - ne** Každá kongruence na $\Omega$-algebře $A$ je jádrem vhodného homomorfismu $\Omega$-algeber vycházejícího z $\Omega$-algebry $A$.

[**K10**-5] **ano - ne** Jestliže typ $\Omega$ nebsahuje žádný nulární operační symbol, pak neexistuje žádný nulární term typu $\Omega$.

[**K11**-5] **ano - ne** Jestliže typ $\Omega$ nebsahuje žádný unární operační symbol, pak neexistuje žádný unární term typu $\Omega$.

[**K12**-6] **ano - ne** Každá varieta $\Omega$-algeber je neprázdná. *[Do každé variety $\Omega$-algeber patří všechny jednoprvkové $\Omega$-algebry.]*

[**K13**-6] **ano - ne** Pro libovolný typ $\Omega$ tvoří třída všech $\Omega$-algeber varietu $\Omega$-algeber.

[**K14**-6] **ano - ne** Pro libovolný typ $\Omega$ tvoří třída všech jednoprvkových $\Omega$-algeber varietu $\Omega$-algeber.

[**K15**-7] **ano - ne** Pro každý typ $\Omega$ je volná $\Omega$-algebra generovaná prázdnou množinou konečná $\Omega$-algebra.

[**K16**-7] **ano - ne** Pro každý typ $\Omega$ je volná $\Omega$-algebra generovaná prázdnou množinou nekonečná $\Omega$-algebra.

[**K17**-8] **ano - ne** Pro každou varietu $V$ typu $\Omega$ platí: libovolná rovnost typu $\Omega$ platí ve volné algebře $F(V)$ variety $V$ právě tehdy, když tato rovnost platí v každé $\Omega$-algebře variety $V$.

## Úlohy - zadání

[**Ú1**-2] Je dán typ $\Omega = \{\star\}$, kde $\star$ je unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a^\star = \begin{cases} a-1 & \text{pro } a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a+1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

(a) Popište všechny podalgebry $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(a) = 1 - a$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ je homomorfismus $\Omega$-algeber.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú2**-3] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde $\bullet$ je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = x + 1$.

(a) Určete všechny podalgebry této $\Omega$-algebry.

(b) Popište součin dvou kopií této $\Omega$-algebry, tj. $\Omega$-algebru $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(c) Popište všechny homomorfismy $\Omega$-algeber $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú3**-4] Je dán typ $\Omega = \{f\}$, kde $f$ je unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace $f_{\mathbb{Z}}$ definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe $f_{\mathbb{Z}}(a) = |a| - 10$, kde $|a|$ značí obvyklou absolutní hodnotu celého čísla $a$.

(a) Popište podalgebru $\langle\{-53\}\rangle$ generovanou jednoprvkovou podmnožinou $\{-53\}$ v $\Omega$-algebře $\mathbb{Z}$.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x) = x + 1$, kde $+$ značí obvyklé sčítání celých čísel, je homomorfismem $\Omega$-algeber.

(c) Definujme relaci $\sim$ na $\mathbb{Z}$ takto: pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ klademe $a \sim b$, právě když rozdíl $a - b$ je dělitelný deseti. Rozhodněte, zda $\sim$ je kongruence na $\Omega$-algebře $\mathbb{Z}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú4**-7] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde $\bullet$ je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné liché $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 1$ a pro libovolné sudé $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 0$ .

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x) = x^2$ je homomorfismem $\Omega$-algeber.

(b) Určete, pro které $M \subseteq \mathbb{Z}$ tvoří $M$ podalgebru $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$.

(c) Popište volnou $\Omega$-algebru generovanou prázdnou množinou.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú5**-7] Je dán typ $\Omega = \{\star, '\}$, kde $\star$ i $'$ jsou unární operační symboly. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a' = -a, \qquad a^\star = \begin{cases} a+1 & \text{pro } a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a-1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

(a) Popište všechny podalgebry $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem

$$\varphi(a) = \begin{cases} a-1 & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a+1 & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, a < 0. \end{cases}$$

je homomorfismus $\Omega$-algeber.

(c) Popište volnou $\Omega$-algebru generovanou prázdnou množinou.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú6**-7] Je dán typ $\Omega = \{\star\}$, kde $\star$ je unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a^\star = a + (-1)^a.$$

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(a) = 1 - a$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ je homomorfismus $\Omega$-algeber.

(b) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V$ určené teorií $\{x_1^{\star\star} = x_1\}$.

(c) Popište volnou $\Omega$-algebru $F_3(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú7**-7] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde $\bullet$ je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné liché $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 1$ a pro libovolné sudé $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 0$ .

(a) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V$ typu $\Omega$ určené teorií $\{x_1'' = \bullet\}$.
(b) Popište volnou algebru typu $\Omega$ generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.
(c) Popište volnou algebru variety $V$ generovanou množinou $\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú8**-7] Je dán typ $\Omega = \{\star, '\}$, kde $\star$ i $'$ jsou unární operační symboly. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a' = |a|, \qquad a^\star = (-1)^a \cdot a.$$

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem

$$\varphi(a) = -a$$

je homomorfismus $\Omega$-algeber.
(b) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V$ určené teorií $\{x_1^{\star\star} = x_1,\, x_1'' = x_1',\, x_1^{\star\prime} = x_1'\}$.
(c) Určete počet prvků volné $\Omega$-algebry $F_1(V)$ variety $V$ generované množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú9**-7] Je dán typ $\Omega = \{n, g\}$, kde $n$ je nulární a $g$ unární operační symbol. Označme množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $B = \{6, 7, 8\}$. Položme

$$n_A = g_A(1) = g_A(2) = 3,\ g_A(3) = g_A(4) = 5,\ g_A(5) = 4,$$

a

$$n_B = g_B(6) = 7,\ g_B(7) = g_B(8) = 8.$$

Tím jsme vytvořili $\Omega$-algebry $A$, $B$. Uvažme teorii

$$T = \{g(g(g(x_1))) = g(n)\}$$

a varietu $V$ typu $\Omega$ určenou teorií $T$.

(a) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $A$ patří do $V$.
(b) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $B$ patří do $V$.
(c) Popište volnou algebru $F_0(V)$ variety $V$ generovanou prázdnou množinou.
(d) Popište volnou algebru $F_1(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú10**-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde $n$ je unární operační symbol. Je dána $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: $n_{\mathbb{Z}}(a) = a + 1$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ (kde $+$ značí obvyklé sčítání). Dále je dána $\Omega$-algebra $A = \{\triangle, \bigcirc\}$ s unární operací $n_A$ definovanou takto: $n_A(\bigcirc) = \triangle$, $n_A(\triangle) = \bigcirc$. Uvažme teorii $T = \{n(n(n(n(x_1)))) = x_1\}$ a varietu $V$ typu $\Omega$ určenou teorií $T$.

(a) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$ do $\Omega$-algebry $A$.

(b) U obou $\Omega$-algeber $A$ a $\mathbb{Z}$ rozhodněte, zda patří do $V$.

(c) Popište volnou algebru $F_0(\Omega)$ typu $\Omega$ generovanou prázdnou množinou.

(d) Popište volnou algebru $F_1(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú11**-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde $n$ je unární operační symbol. Je dána $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: $n_{\mathbb{Z}}(a) = a - 1$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ (kde $-$ značí obvyklé odčítání). Dále je dána $\Omega$-algebra $A = \{\triangle, \bigcirc\}$ s unární operací $n_A$ definovanou takto: $n_A(\bigcirc) = \triangle$, $n_A(\triangle) = \bigcirc$. Uvažme teorii $T = \{n(n(n(x_1))) = n(x_1)\}$ a varietu $V$ typu $\Omega$ určenou teorií $T$.

(a) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus $\Omega$-algebry $A$ do $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$.

(b) U obou $\Omega$-algeber $A$ a $\mathbb{Z}$ rozhodněte, zda patří do $V$.

(c) Popište volnou algebru $F_1(\Omega)$ typu $\Omega$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

(d) Popište volnou algebru $F_2(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1, x_2\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[**Ú12**-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde $n$ je unární operační symbol. Je dána $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$n_{\mathbb{Z}}(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a > 1, \\ 0 & \text{pro } -1 \leq a \leq 1, \\ -1 & \text{pro } a < -1. \end{cases}$$

Dále jsou dána zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ předpisy $f(a) = 3a$, $g(a) = a^2$ (kde užité operace ve výrazech značí obvyklé operace s celými čísly). Nechť varieta $V_1$ typu $\Omega$ je určená teorií $T_1 = \{n(n(n(x_1))) = n(n(x_1))\}$ a varieta $V_2$ typu $\Omega$ je určená teorií $T_2 = \{n(n(x_1))) = n(n(x_2))\}$ typu $\Omega$.

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $f$ je homomorfismem $\Omega$-algeber.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení $g$ je homomorfismem $\Omega$-algeber.

(c) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V_1$.

(d) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V_2$.

(e) Popište volnou algebru $F_1(V_1)$ variety $V_1$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

(f) Popište volnou algebru $F_1(V_2)$ variety $V_2$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

(g) Rozhodněte, zda variety $V_1$ a $V_2$ jsou stejné.

Svá tvrzení zdůvodněte.

**Kontrolní otázky - řešení**

[**K1**-1] **ano** Obsahuje-li typ $\Omega$ alespoň jeden nulární operační symbol, pak je každá $\Omega$-algebra neprázdná. *[Plyne přímo z definice.]*

[**K2**-1] **ne** Obsahuje-li typ $\Omega$ alespoň jeden unární operační symbol, pak je každá $\Omega$-algebra neprázdná. *[Pro každý typ, který neobsahuje žádný nulární operační symbol, existuje prázdná $\Omega$-algebra.]*

[**K3**-2] **ano** Množina všech podalgeber dané univerzální algebry $A$ typu $\Omega$ uspořádaná inkluzí tvoří úplný svaz. *[Jde o jeden z důsledků věty 2.1.]*

[**K4**-2] **ano** Složením homomorfismů $\Omega$-algeber je opět homomorfismus $\Omega$-algeber. *[Jde o větu 2.2.]*

[**K5**-3] **ne** Projekce ze součinu $\Omega$-algeber je surjektivní homomorfismus $\Omega$-algeber. *[Protože $\Omega$-algebry mohou být i prázdné, nemusí být obecně projekce ze součinu surjektivní, uvažte součin prázdné $\Omega$-algebry s neprázdnou $\Omega$-algebrou a projekci z tohoto součinu do oné neprázdné $\Omega$-algebry.]*

[**K6**-3] **ne** Součin $\Omega$-algeber přes prázdnou množinu indexů je prázdná $\Omega$-algebra. *[Součin $\Omega$-algeber přes prázdnou množinu indexů je vždy jednoprvková $\Omega$-algebra. Toto tvrzení nemohlo být pravdivé i proto, že v případě, kdy typ $\Omega$ obsahuje alespoň jeden nulární operační symbol, je každá $\Omega$-algebra neprázdná.]*

[**K7**-4] **ne** Jádro homomorfismu $\Omega$-algeber $A \to B$ je podalgebra $\Omega$-algebry $A$. *[Podle definice je jádrem homomorfismu $\Omega$-algeber $A \to B$ kongruence na $\Omega$-algebře $A$.]*

[**K8**-4] **ano** Projekce z $\Omega$-algebry na faktorovou algebru je surjektivní homomorfismus $\Omega$-algeber. *[Plyne z věty 4.3 - viz definici projekce.]*

[**K9**-4] **ano** Každá kongruence na $\Omega$-algebře $A$ je jádrem vhodného homomorfismu $\Omega$-algeber vycházejícího z $\Omega$-algebry $A$. *[Jde o důsledek věty 4.3.]*

[**K10**-5] **ano** Jestliže typ $\Omega$ nebsahuje žádný nulární operační symbol, pak neexistuje žádný nulární term typu $\Omega$. *[Plyne přímo z definice termu.]*

[**K11**-5] **ne** Jestliže typ $\Omega$ nebsahuje žádný unární operační symbol, pak neexistuje žádný unární term typu $\Omega$. *[Pro libovolný typ je $x_1$ unární term.]*

[**K12**-6] **ano** Každá varieta $\Omega$-algeber je neprázdná. *[Do každé variety $\Omega$-algeber patří všechny jednoprvkové $\Omega$-algebry.]*

[**K13**-6] **ano** Pro libovolný typ $\Omega$ tvoří třída všech $\Omega$-algeber varietu $\Omega$-algeber. *[Jde o varietu $\Omega$-algeber určenou prázdnou teorií.]*

[**K14**-6] **ne** Pro libovolný typ $\Omega$ tvoří třída všech jednoprvkových $\Omega$-algeber varietu $\Omega$-algeber. *[Nebsahuje-li typ $\Omega$ žádný nulární operační symbol, existuje i prázdná $\Omega$-algebra, ve které platí všechny rovnosti typu $\Omega$, a tedy patří do každé variety $\Omega$-algeber.]*

[**K15**-7] **ne** Pro každý typ $\Omega$ je volná $\Omega$-algebra generovaná prázdnou množinou konečná $\Omega$-algebra. *[Obsahuje-li například typ $\Omega$ nekonečně mnoho nulárních operačních symbolů, je volná $\Omega$-algebra generovaná prázdnou množinou nekonečná.]*

[**K16**-7] **ne** Pro každý typ $\Omega$ je volná $\Omega$-algebra generovaná prázdnou množinou nekonečná $\Omega$-algebra. *[Obsahuje-li typ $\Omega$ jen nulární operační symboly, je nosnou množinou volné $\Omega$-algebry generované prázdnou množinou právě typ $\Omega$.]*

[**K17**-8] **ano** Pro každou varietu $V$ typu $\Omega$ platí: libovolná rovnost typu $\Omega$ platí ve volné algebře $F(V)$ variety $V$ právě tehdy, když tato rovnost platí v každé $\Omega$-algebře variety $V$. *[Viz poznámku za větou 8.6 (tj. na konci textu).]*

## Úlohy - řešení

[**Ú1**-2] Je dán typ $\Omega = \{^\star\}$, kde $^\star$ je unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a^\star = \begin{cases} a-1 & \text{pro } a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a+1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

(a) Popište všechny podalgebry $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(a) = 1 - a$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ je homomorfismus $\Omega$-algeber.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Podalgebry jsou podmnožiny uzavřené na operaci $^\star$, je to tedy celé $\mathbb{Z}$, prázdná množina a pro každá dvě nezáporná celá čísla $m, n$ množiny $\{a \in \mathbb{Z}; -m \le a \le n\}$, $\{a \in \mathbb{Z}; a \le n\}$, $\{a \in \mathbb{Z}; -m \le a\}$. Platí $\varphi(1)^\star = 0^\star = 0$, kdežto $\varphi(1^\star) = \varphi(0) = 1$, proto $\varphi$ není homomorfismus $\Omega$-algeber.]*

[**Ú2**-3] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, {}'\}$, kde $\bullet$ je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = x + 1$.

(a) Určete všechny podalgebry této $\Omega$-algebry.

(b) Popište součin dvou kopií této $\Omega$-algebry, tj. $\Omega$-algebru $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(c) Popište všechny homomorfismy $\Omega$-algeber $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Každá podalgebra musí obsahovat $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a s každým svým prvkem i číslo o jedna větší, tedy podalgebry jsou právě množiny $M_n = \{x \in \mathbb{Z}; x \ge n\}$, kde $n$ probíhá množinu nekladných celých čísel (tj. $n \in \mathbb{Z}, n \le 0$). Součin dvou kopií $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$ je $\Omega$-algebra $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (tj. na množině všech uspořádaných*

*dvojic celých čísel), kde jsou operace definovány takto:* $\bullet_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = (0,0)$ *a pro každé* $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *je* $(x,y)' = (x+1, y+1)$. *Homomorfismus* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *je zobrazení* $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *splňující* $\varphi(\bullet_{\mathbb{Z}}) = \bullet_{\mathbb{Z}}$, *tedy* $\varphi(0) = 0$, *a také pro každé* $x \in \mathbb{Z}$ *splňuje* $\varphi(x') = \varphi(x)'$, *tj.* $\varphi(x+1) = \varphi(x) + 1$. *Snadno se dokáže indukcí, že pak* $\varphi(x) = x$:

*1. Dokazované platí pro* $x = 0$.

*2. Předpokládejme, že* $n$ *je přirozené číslo takové, že dokazované platí pro* $n-1$, *tj. je* $\varphi(n-1) = n-1$, *a dokažme tvrzení pro* $n$. *Pak* $\varphi(n) = \varphi((n-1)+1) = \varphi(n-1) + 1 = n - 1 + 1 = n$.

*3. Předpokládejme, že* $n$ *je přirozené číslo takové, že dokazované platí pro* $-(n-1)$, *tj. je* $\varphi(1-n) = 1-n$, *a dokažme tvrzení pro* $-n$. *Pak* $1 - n = \varphi(1-n) = \varphi(-n+1) = \varphi(-n) + 1$. *Odečtením* $1$ *dostaneme potřebné.*

*Jediným homomorfismem* $\Omega$*-algeber* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *je tedy identita.]*

[**Ú3**-4] Je dán typ $\Omega = \{f\}$, kde $f$ je unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace $f_{\mathbb{Z}}$ definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe $f_{\mathbb{Z}}(a) = |a| - 10$, kde $|a|$ značí obvyklou absolutní hodnotu celého čísla $a$.

(a) Popište podalgebru $\langle\{-53\}\rangle$ generovanou jednoprvkovou podmnožinou $\{-53\}$ v $\Omega$-algebře $\mathbb{Z}$.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x) = x + 1$, kde $+$ značí obvyklé sčítání celých čísel, je homomorfismem $\Omega$-algeber.

(c) Definujme relaci $\sim$ na $\mathbb{Z}$ takto: pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ klademe $a \sim b$, právě když rozdíl $a - b$ je dělitelný deseti. Rozhodněte, zda $\sim$ je kongruence na $\Omega$-algebře $\mathbb{Z}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Platí* $\langle\{-53\}\rangle = \{-53, 43, 33, 23, 13, 3, -7, -3\}$. *Zobrazení* $\varphi$ *není homomorfismem* $\Omega$*-algeber, neboť například* $\varphi(f_{\mathbb{Z}}(-1)) = \varphi(-9) = -8 \neq -10 = f_{\mathbb{Z}}(0) = f_{\mathbb{Z}}(\varphi(-1))$. *Relace* $\sim$ *není kongruence na* $\Omega$*-algebře* $\mathbb{Z}$*, neboť například* $4 \sim -6$, *avšak* $f_{\mathbb{Z}}(4) = -6 \not\sim -4 = f_{\mathbb{Z}}(-6)$.*]*

[**Ú4**-7] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde $\bullet$ je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné liché $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 1$ a pro libovolné sudé $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 0$ .

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x) = x^2$ je homomorfismem $\Omega$-algeber.

(b) Určete, pro které $M \subseteq \mathbb{Z}$ tvoří $M$ podalgebru $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$.

(c) Popište volnou $\Omega$-algebru generovanou prázdnou množinou.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Platí* $\varphi(\bullet_{\mathbb{Z}}) = \varphi(0) = 0^2 = 0 = \bullet_{\mathbb{Z}}$, *pro libovolné liché celé číslo* $a$ *je i* $a^2$ *liché, tedy* $\varphi(a') = \varphi(1) = 1^2 = 1 = (a^2)' = \varphi(a)'$, *pro libovolné sudé* $a$ *je i* $a^2$ *sudé, a proto* $\varphi(a') = \varphi(0) = 0^2 = 0 = (a^2)' = \varphi(a)'$. *Je tedy* $\varphi$ *homomorfismus* $\Omega$*-algeber. Podalgebra je libovolná podmnožina* $M$ *množiny*

*$\mathbb{Z}$, která obsahuje $\bullet_{\mathbb{Z}}$ a s každým $a \in M$ též je $a' \in M$. Podalgebrami jsou tedy právě všechny podmnožiny množiny všech sudých čísel obsahující 0 a všechny podmnožiny množiny všech celých čísel obsahující 0 i 1. Volná algebra typu $\Omega$ generovaná prázdnou množinou je podle definice algebra $F_0(\Omega)$ všech 0-árních termů typu $\Omega$, tj.*

$$F_0(\Omega) = \{\bullet, \bullet', \bullet'', \bullet''', \dots\},$$

*kde je unární operace $'$ definována takto: k libovolnému termu připíše apostrof.]*

[**Ú5**-7] Je dán typ $\Omega = \{^\star, '\}$, kde $^\star$ i $'$ jsou unární operační symboly. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a' = -a, \qquad a^\star = \begin{cases} a+1 & \text{pro } a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a-1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

(a) Popište všechny podalgebry $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem

$$\varphi(a) = \begin{cases} a-1 & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a+1 & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, a < 0. \end{cases}$$

je homomorfismus $\Omega$-algeber.

(c) Popište volnou $\Omega$-algebru generovanou prázdnou množinou.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Podalgebry jsou podmnožiny uzavřené na obě operace, je to tedy prázdná množina, $\{0\}$, a pro každé přirozené číslo $n$ množiny $\{a \in \mathbb{Z}; |a| \geq n\}$ a $\{a \in \mathbb{Z}; |a| \geq n\} \cup \{0\}$. Platí $\varphi(1)^\star = 0^\star = 0$, kdežto $\varphi(1^\star) = \varphi(2) = 1$, proto $\varphi$ není homomorfismus $\Omega$-algeber. Protože typ $\Omega$ neobsahuje žádný nulární operační symbol, je volná $\Omega$-algebra generovaná prázdnou množinou prázdná $\Omega$-algebra.]*

[**Ú6**-7] Je dán typ $\Omega = \{^\star\}$, kde $^\star$ je unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a^\star = a + (-1)^a.$$

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(a) = 1 - a$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ je homomorfismus $\Omega$-algeber.

(b) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V$ určené teorií $\{x_1^{\star\star} = x_1\}$.

(c) Popište volnou $\Omega$-algebru $F_3(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Zobrazení $\varphi$ je homomorfismus $\Omega$-algeber, neboť pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ platí*

$$\begin{aligned}\varphi(a^\star) &= 1 - a^\star = 1 - (a + (-1)^a) = 1 - a - (-1)^a,\\ \big(\varphi(a)\big)^\star &= (1-a)^\star = 1 - a + (-1)^{1-a} = 1 - a - (-1)^a.\end{aligned}$$

*$\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V$, protože pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ platí*

$$a^{\star\star} = \big(a + (-1)^a\big)^\star = a + (-1)^a + (-1)^{a+(-1)^a} = a + (-1)^a - (-1)^a = a.$$

*Volná $\Omega$-algebra $F_3(\Omega)$ generovaná množinou $\{x_1, x_2, x_3\}$ se skládá ze všech 3-árních termů typu $\Omega$, tedy*

$$F_3(\Omega) = \{x_1, x_1^\star, x_1^{\star\star}, \ldots, x_2, x_2^\star, x_2^{\star\star}, \ldots, x_3, x_3^\star, x_3^{\star\star}, \ldots\}.$$

*Pro každý term $t \in F_3(\Omega)$ platí, že term $t^{\star\star}$ určuje v každé $\Omega$-algebře variety $V$ stejnou operaci jako term $t$, proto*

$$\begin{aligned}F_3(V) = \big\{&\{x_1, x_1^{\star\star}, \ldots\}, \{x_1^\star, x_1^{\star\star\star}, \ldots\}, \{x_2, x_2^{\star\star}, \ldots\}, \{x_2^\star, x_2^{\star\star\star}, \ldots\},\\ &\{x_3, x_3^{\star\star}, \ldots\}, \{x_3^\star, x_3^{\star\star\star}, \ldots\}\big\},\end{aligned}$$

*kde operace $^\star$ je definována takto: pro libovolné $i = 1, 2, 3$ platí*

$$\{x_i, x_i^{\star\star}, \ldots\}^\star = \{x_i^\star, x_i^{\star\star\star}, \ldots\}, \qquad \{x_i^\star, x_i^{\star\star\star}, \ldots\}^\star = \{x_i, x_i^{\star\star}, \ldots\}. \qquad ]$$

[**Ú7**-7] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, {}'\}$, kde $\bullet$ je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné liché $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 1$ a pro libovolné sudé $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 0$ .

(a) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V$ typu $\Omega$ určené teorií $\{x_1'' = \bullet\}$.

(b) Popište volnou algebru typu $\Omega$ generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

(c) Popište volnou algebru variety $V$ generovanou množinou $\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[$\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ nepatří do variety $V$, neboť například platí $(x_1'')_{\mathbb{Z}}(1) = 1'' = 1 \neq 0 = \bullet_{\mathbb{Z}}(1)$. Volná algebra typu $\Omega$ generovaná množinou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ je podle definice algebra $F_4(\Omega)$ všech 4-árních termů typu $\Omega$, tj.*

$$\begin{aligned}F_4(\Omega) = \{&\bullet, \bullet' \bullet'', \ldots, x_1, x_1', x_1'', \ldots, x_2, x_2', x_2'', \ldots, x_3, x_3', x_3'', \ldots,\\ &x_4, x_4', x_4'', \ldots\},\end{aligned}$$

*kde jsou operace definovány takto: unární operace $'$ k libovolnému termu připíše apostrof, výsledkem nulární operace $\bullet$ je prvek $\bullet$. Hledaná volná algebra variety $V$ je $F_4(V) = F_4(\Omega)/\sim_V$, kde pro $t_1, t_2 \in F_4(\Omega)$ platí $t_1 \sim_V t_2$, právě když pro každou $\Omega$-algebru $A$ variety $V$ oba termy $t_1$, $t_2$*

*určují stejnou operaci, tj. platí* $(t_1)_A = (t_2)_A$. *Ovšem pro libovolný prvek* $a \in A$ *je* $a'' = \bullet_A$, *tedy pro každý term* $t \in F_4(\Omega)$ *je* $t'' \sim_V \bullet$. *Protože v* $\Omega$*-algebře* $A$ *platí* $\bullet''_A = \bullet_A$, *plyne odtud aplikací operace* $'$, *že* $\bullet'''_A = \bullet'_A$, *ovšem také* $\bullet'''_A = (\bullet'_A)'' = \bullet_A$, *proto* $\bullet'_A = \bullet_A$. *Je tedy*

$$F_4(V) = \{\{x_1\}, \{x'_1\}, \{x_2\}, \{x'_2\}, \{x_3\}, \{x'_3\}, \{x_4\}, \{x'_4\}, T\},$$

*kde třída* $T = F_4(\Omega) - \{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, x_4, x'_4\}$. *Výsledkem nulární operace* $\bullet$ *je zde třída* $T$, *dále* $T' = T$ *a pro libovolné* $i = 1, 2, 3, 4$ *platí*

$$\{x_i\}' = \{x'_i\}, \qquad \{x'_i\}' = T. \qquad ]$$

[**Ú8**-7] Je dán typ $\Omega = \{^\star, {}'\}$, kde $^\star$ i $'$ jsou unární operační symboly. Uvažme $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a' = |a|, \qquad a^\star = (-1)^a \cdot a.$$

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem

$$\varphi(a) = -a$$

je homomorfismus $\Omega$-algeber.

(b) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V$ určené teorií $\{x_1^{\star\star} = x_1,\ x''_1 = x'_1,\ x_1^{\star\prime} = x'_1\}$.

(c) Určete počet prvků volné $\Omega$-algebry $F_1(V)$ variety $V$ generované množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Zobrazení* $\varphi$ *není homomorfismus* $\Omega$*-algeber, neboť například*

$$\varphi((-1)') = \varphi(1) = -1,$$

*kdežto*

$$(\varphi(-1))' = 1' = 1.$$

$\Omega$*-algebra* $\mathbb{Z}$ *patří do variety* $V$, *protože pro libovolné* $a \in \mathbb{Z}$ *platí*

$$\begin{aligned}
a^{\star\star} &= \big((-1)^a \cdot a\big)^\star = (-1)^{(-1)^a \cdot a} \cdot (-1)^a \cdot a = a, \\
a'' &= \big||a|\big| = |a| = a', \\
a^{\star\prime} &= \big|(-1)^a \cdot a\big| = |a| = a'.
\end{aligned}$$

*Volná* $\Omega$*-algebra* $F_1(\Omega)$ *generovaná množinou* $\{x_1\}$ *se skládá ze všech unárních termů typu* $\Omega$, *což jsou termy* $x_1$, $x_1^\star$, $x'_1$, $x_1^{\star\star}$, $x_1^{\star\prime}$, $x_1^{\prime\star}$, $x''_1$, *atd. Vždy tedy jde o* $x_1$, *na které jsou aplikovány v libovolném (konečném) počtu v libovolném pořadí oba operační symboly. Rovnosti* $x''_1 = x'_1$ *a* $x_1^{\star\prime} = x'_1$ *způsobují, že každý term, na který je naposledy aplikován symbol* $'$, *určuje v každé* $\Omega$*-algebře variety* $V$ *stejnou operaci jako term* $x'_1$. *Rovnost* $x_1^{\star\star} = x_1$ *způsobuje, že každý term, na který je naposledy aplikován dvakrát symbol* $^\star$, *určuje v každé* $\Omega$*-algebře variety* $V$ *stejnou operaci jako tento term bez oné aplikace. Proto každý unární term určuje stejnou operaci jako některý z termů* $x_1$, $x_1^\star$, $x'_1$, $x_1^{\prime\star}$. *Žádné dva z těchto čtyř vyjmenovaných termů nemusejí určovat stejné operace, proto volná* $\Omega$*-algebra* $F_1(V)$ *variety* $V$ *generovaná množinou* $\{x_1\}$ *má čtyři prvky.]*

**[Ú9**-7] Je dán typ $\Omega = \{n, g\}$, kde $n$ je nulární a $g$ unární operační symbol. Označme množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $B = \{6, 7, 8\}$. Položme

$$n_A = g_A(1) = g_A(2) = 3,\ g_A(3) = g_A(4) = 5,\ g_A(5) = 4,$$

a

$$n_B = g_B(6) = 7,\ g_B(7) = g_B(8) = 8.$$

Tím jsme vytvořili $\Omega$-algebry $A$, $B$. Uvažme teorii

$$T = \{g(g(g(x_1))) = g(n)\}$$

a varietu $V$ typu $\Omega$ určenou teorií $T$.

(a) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $A$ patří do $V$.

(b) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $B$ patří do $V$.

(c) Popište volnou algebru $F_0(V)$ variety $V$ generovanou prázdnou množinou.

(d) Popište volnou algebru $F_1(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[$\Omega$-algebra $A$ nepatří do $V$, neboť například $g_A(g_A(g_A(1))) = g_A(g_A(3)) = g_A(5) = 4 \neq 5 = g_A(3) = g_A(n_A)$. Naproti tomu $\Omega$-algebra $B$ patří do $V$, neboť $g_B(g_B(g_B(6))) = g_B(g_B(g_B(7))) = g_B(g_B(g_B(8))) = g_B(n_B) = 8$. Podle definice je $F_0(\Omega)$ množina všech nulárních termů typu $\Omega$, platí tedy $F_0(\Omega) = \{n, g(n), g(g(n)), g(g(g(n))), \dots\}$. Přitom rovnost $g(g(g(x_1))) = g(n)$ způsobí, že každý z uvedených termů, v němž se vyskytují alespoň tři $g$, je kongruentní s $g(n)$. Ovšem aplikací $g$ na $g(g(g(n))) \sim g(n)$ dostaneme $g(g(g(g(n)))) \sim g(g(n))$, a tedy volná algebra $C = F_0(V)$ variety $V$ generovaná prázdnou množinou je dvouprvková: $C = \{T_1, T_2\}$, kde $T_1 = \{n\}$, $T_2 = \{g(n), g(g(n)), g(g(g(n))), \dots\}$, přičemž $n_C = T_1$, $g_C(T_1) = g_C(T_2) = T_2$. Podobně $F_1(\Omega)$ je množina všech unárních termů typu $\Omega$, tedy*

$$\begin{aligned} F_1(\Omega) = \{&n, g(n), g(g(n)), g(g(g(n))), \dots, \\ &x_1, g(x_1), g(g(x_1)), g(g(g(x_1))), \dots\} \end{aligned}$$

*a volná algebra $D = F_1(V)$ variety $V$ generovaná množinou $\{x_1\}$ je pětiprvková: $D = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, kde $T_1 = \{n\}$,*

$$T_2 = \{g(n), g(g(n)), g(g(g(n))), \dots, g(g(g(x_1))), g(g(g(g(x_1)))), \dots\},$$

*$T_3 = \{x_1\}$, $T_4 = \{g(x_1)\}$, $T_5 = \{g(g(x_1))\}$, přičemž $n_D = T_1$, $g_D(T_1) = g_D(T_2) = T_2$, $g_D(T_3) = T_4$, $g_D(T_4) = T_5$, $g_D(T_5) = T_2$.]*

**[Ú10**-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde $n$ je unární operační symbol. Je dána $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: $n_{\mathbb{Z}}(a) = a + 1$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ (kde $+$ značí obvyklé sčítání). Dále je dána $\Omega$-algebra $A = \{\triangle, \bigcirc\}$ s unární operací $n_A$ definovanou takto: $n_A(\bigcirc) = \triangle$, $n_A(\triangle) = \bigcirc$. Uvažme teorii $T = \{n(n(n(n(x_1)))) = x_1\}$ a varietu $V$ typu $\Omega$ určenou teorií $T$.

(a) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$ do $\Omega$-algebry $A$.

(b) U obou $\Omega$-algeber $A$ a $\mathbb{Z}$ rozhodněte, zda patří do $V$.

(c) Popište volnou algebru $F_0(\Omega)$ typu $\Omega$ generovanou prázdnou množinou.

(d) Popište volnou algebru $F_1(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Snadno se ověří, že zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to A$, které lichá čísla zobrazí na $\triangle$ a sudá čísla na $\bigcirc$, je homomorfismus $\Omega$-algeber. Dosazením obou prvků $\Omega$-algebry $A$ ověříme, že v ní je identita teorie $T$ splněna, a tedy $\Omega$-algebra $A$ patří do variety $V$. Naproti tomu $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ nepatří do variety $V$, neboť například $n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(0)))) = 4 \neq 0$. Protože typ $\Omega$ nemá žádný nulární operační symbol, neexistuje žádný nulární term typu $\Omega$, a tedy volná algebra $F_0(\Omega)$ typu $\Omega$, generovaná prázdnou množinou, je prázdná $\Omega$-algebra. Volnou algebrou $F_1(\Omega)$ typu $\Omega$, generovanou množinou $\{x_1\}$, je množina všech unárních termů typu $\Omega$, tedy*

$$F_1(\Omega) = \{x_1, n(x_1), n(n(x_1)), n(n(n(x_1))), \dots\}.$$

*Faktorizací dostaneme volnou algebru $B = F_1(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1\}$. Platí $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, kde*

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{x_1, n(n(n(n(x_1)))), n(n(n(n(n(n(n(n(x_1)))))))), \dots\},\\
M_2 &= \{n(x_1), n(n(n(n(n(x_1))))), \dots\},\\
M_3 &= \{n(n(x_1)), n(n(n(n(n(n(x_1)))))), \dots\},\\
M_4 &= \{n(n(n(x_1))), n(n(n(n(n(n(n(x_1))))))), \dots\}.
\end{aligned}$$

*Přitom $n_B(M_1) = M_2$, $n_B(M_2) = M_3$, $n_B(M_3) = M_4$, $n_B(M_4) = M_1$.]*

[**Ú11**-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde $n$ je unární operační symbol. Je dána $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: $n_{\mathbb{Z}}(a) = a - 1$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ (kde $-$ značí obvyklé odčítání). Dále je dána $\Omega$-algebra $A = \{\triangle, \bigcirc\}$ s unární operací $n_A$ definovanou takto: $n_A(\bigcirc) = \triangle$, $n_A(\triangle) = \bigcirc$. Uvažme teorii $T = \{n(n(n(x_1))) = n(x_1)\}$ a varietu $V$ typu $\Omega$ určenou teorií $T$.

(a) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus $\Omega$-algebry $A$ do $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$.

(b) U obou $\Omega$-algeber $A$ a $\mathbb{Z}$ rozhodněte, zda patří do $V$.

(c) Popište volnou algebru $F_1(\Omega)$ typu $\Omega$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

(d) Popište volnou algebru $F_2(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1, x_2\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Dokažme sporem, že žádný homomorfismus $\Omega$-algeber $\varphi : A \to \mathbb{Z}$ neexistuje. Předpokládejme tedy jeho existenci. Pak $\triangle = n_A(\bigcirc) = n_A(n_A(\triangle))$ a tedy z toho, že $\varphi$ je homomorfismus $\Omega$-algeber, plyne*

$$\varphi(\triangle) = \varphi(n_A(n_A(\triangle))) = n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(\varphi(\triangle))) = \varphi(\triangle) - 2,$$

*což nesplňuje žádné celé číslo $\varphi(\triangle)$, spor. Dosazením obou prvků $\Omega$-algebry $A$ ověříme, že v ní je identita teorie $T$ splněna, a tedy $\Omega$-algebra $A$ patří do variety $V$. Naproti tomu $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ nepatří do variety $V$, neboť například $n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(0))) = -3 \neq -1 = n_{\mathbb{Z}}(0)$. Volnou algebrou $F_1(\Omega)$ typu $\Omega$, generovanou množinou $\{x_1\}$, je množina všech unárních termů typu $\Omega$, tedy $F_1(\Omega) = \{x_1, n(x_1), n(n(x_1)), n(n(n(x_1))), \dots\}$. Podobně volnou algebrou $F_2(\Omega)$ typu $\Omega$, generovanou množinou $\{x_1, x_2\}$, je množina všech binárních termů typu $\Omega$, tedy*

$$\begin{aligned} F_2(\Omega) = \{&x_1, n(x_1), n(n(x_1)), n(n(n(x_1))), \dots, \\ &x_2, n(x_2), n(n(x_2)), n(n(n(x_2))), \dots\}. \end{aligned}$$

*Faktorizací dostaneme volnou algebru $B = F_2(V)$ variety $V$ generovanou množinou $\{x_1, x_2\}$. Platí $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$, kde*

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x_1\}, \\ M_2 &= \{n(x_1), n(n(n(x_1))), n(n(n(n(n(x_1))))), \dots\}, \\ M_3 &= \{n(n(x_1)), n(n(n(n(x_1)))), \dots\}, \\ M_4 &= \{x_2\}, \\ M_5 &= \{n(x_2), n(n(n(x_2))), n(n(n(n(n(x_2))))), \dots\}, \\ M_6 &= \{n(n(x_2)), n(n(n(n(x_2)))), \dots\}. \end{aligned}$$

*Přitom $n_B(M_1) = M_2$, $n_B(M_2) = M_3$, $n_B(M_3) = M_2$, $n_B(M_4) = M_5$, $n_B(M_5) = M_6$, $n_B(M_6) = M_5$.]*

[**Ú12**-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde $n$ je unární operační symbol. Je dána $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$n_{\mathbb{Z}}(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a > 1, \\ 0 & \text{pro } -1 \leq a \leq 1, \\ -1 & \text{pro } a < -1. \end{cases}$$

Dále jsou dána zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ předpisy $f(a) = 3a$, $g(a) = a^2$ (kde užité operace ve výrazech značí obvyklé operace s celými čísly). Nechť varieta $V_1$ typu $\Omega$ je určená teorií $T_1 = \{n(n(n(x_1))) = n(n(x_1))\}$ a varieta $V_2$ typu $\Omega$ je určená teorií $T_2 = \{n(n(x_1))) = n(n(x_2))\}$ typu $\Omega$.

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $f$ je homomorfismem $\Omega$-algeber.

(b) Rozhodněte, zda zobrazení $g$ je homomorfismem $\Omega$-algeber.

(c) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V_1$.

(d) Rozhodněte, zda $\Omega$-algebra $\mathbb{Z}$ patří do variety $V_2$.

(e) Popište volnou algebru $F_1(V_1)$ variety $V_1$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

(f) Popište volnou algebru $F_1(V_2)$ variety $V_2$ generovanou množinou $\{x_1\}$.

(g) Rozhodněte, zda variety $V_1$ a $V_2$ jsou stejné.

Svá tvrzení zdůvodněte.

*[Zobrazení $f$ není homomorfismem $\Omega$-algeber, neboť například $n_{\mathbb{Z}}(f(1)) = n_{\mathbb{Z}}(3) = 1$, avšak $f(n_{\mathbb{Z}}(1)) = f(0) = 0$. Dokažme, že zobrazení $g$ je homomorfismem $\Omega$-algeber. Pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $a > 1$ platí také $a^2 > 1$, a tedy $n_{\mathbb{Z}}(g(a)) = n_{\mathbb{Z}}(a^2) = 1 = g(1) = g(n_{\mathbb{Z}}(a))$. Máme-li libovolné $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $a < -1$, pak $a^2 > 1$, a tedy $n_{\mathbb{Z}}(g(a)) = n_{\mathbb{Z}}(a^2) = 1 = g(-1) = g(n_{\mathbb{Z}}(a))$. Konečně pro $a \in \{-1, 0, 1\}$ platí $n_{\mathbb{Z}}(g(a)) = n_{\mathbb{Z}}(a^2) = 0 = g(0) = g(n_{\mathbb{Z}}(a))$. Dvojnásobnou aplikací $n_{\mathbb{Z}}$ na libovolný prvek $\Omega$-algebry $\mathbb{Z}$ dostaneme 0, proto jak varieta $V_1$ určená teorií $T_1$ tak i varieta $V_2$ určená teorií $T_2$ obsahují $\Omega$-algebru $\mathbb{Z}$. Volnou algebrou $F_1(\Omega)$ typu $\Omega$, generovanou množinou $\{x_1\}$, je množina všech unárních termů typu $\Omega$, tedy $F_1(\Omega) = \{x_1, n(x_1), n(n(x_1)), \dots\}$. Protože rovnost $n(n(n(x_1))) = n(n(x_1))$ znamená, že trojnásobnou aplikací operace $n$ na libovolný prvek dostaneme vždy totéž jako dvojnásobnou aplikací operace $n$ na tento prvek, má volná algebra $A = F_1(V_1)$ variety $V_1$ generovaná množinou $\{x_1\}$ tři prvky: $A = \{M_1, M_2, M_3\}$, kde $M_1 = \{x_1\}$, $M_2 = \{n(x_1)\}$, $M_3 = \{n(n(x_1)), n(n(n(x_1))), n(n(n(n(x_1)))), \dots\}$. Přitom je operace na $A$ definovaná takto: $n_A(M_1) = M_2$, $n_A(M_2) = M_3$, $n_A(M_3) = M_3$. Protože rovnost $n(n(x_1))) = n(n(x_2))$ znamená, že dvojnásobnou aplikací operace $n$ na libovolný prvek dostaneme vždy tentýž prvek, je výše popsaná $\Omega$-algebra $A$ také volnou algebrou $F_1(V_2)$ variety $V_2$ generovanou množinou $\{x_1\}$. Variety $V_1$ a $V_2$ nejsou stejné, uvažte $\Omega$-algebru $B = \{1, 2\}$ s operací $n_B(1) = 1$, $n_B(2) = 2$. Tato $\Omega$-algebra $B$ patří do variety $V_1$, ale nepatří do variety $V_2$.]*