Řešení vzorové písemné zkoušky z předmětu Stochastické modely I, podzimní semestr 2005

Příklad 1. Nechť Y, Z jsou náhodné veličiny, které mají střední hodnoty E(Y) = 1, E(Z) = -6 a rozptyly D(Y) = 4, D(Z) = 9. Koeficient korelace R(Y,Z) = 0,9. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = 3tY + 2Z$. Najděte

a) střední hodnotu,
b) rozptyl a směrodatnou odchylku
c) autokovarianční a autokorelační funkci

tohoto stochastického procesu.

Řešení:

ad a) $\mu(t) = 3(t - 4)$

ad b) $\sigma^2(t) = 36(t^2 + 1{,}8t + 1)$, $\sigma(t) = 6\sqrt{t^2 + 1{,}8t + 1}$

ad c) $\gamma(t_1,t_2) = 36(t_1t_2 + 0{,}9t_1 + 0{,}9t_2 + 1)$, $\rho(t_1, t_2) = \dfrac{t_1t_2 + 0{,}9t_1 + 0{,}9t_2 + 1}{\sqrt{t_1^2 + 1{,}8t_1 + 1}\sqrt{t_2^2 + 1{,}8t_2 + 1}}$

Příklad 2. Máme černou a bílou urnu a pět koulí. Na počátku pokusu jsou všechny koule v černé urně. V každém kroku pokusu náhodně vybereme kouli a přemístíme ji do druhé urny, přičemž předpokládáme, že výběr každé koule je stejně možný.

a) Modelujte tento pokus pomocí homogenního markovského řetězce, najděte matici přechodu .
b) Stanovte stacionární rozložení tohoto řetězce.
c) Vypočtěte střední hodnotu počtu koulí po stabilizaci pokusu.

Řešení:

ad a)

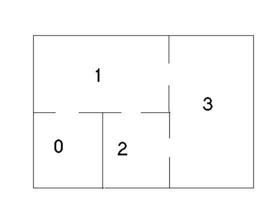
Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, … ,5}, přičemž $X_n = j$, když v n-tém kroku pokusu bude v černé urně právě j koulí.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ad b) **a** = (1/32 5/32 10/32 10/32 5/32 1/32)

ad c) 2,5

Příklad 3a. Myš je vložena do bludiště tvaru:

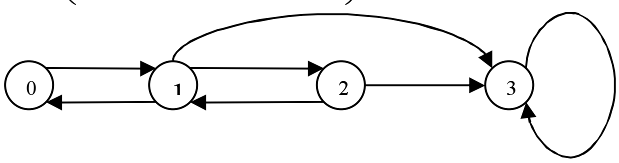


V každém okamžiku si myš vybere náhodně jedny z dveří přihrádky, v níž se právě nachází a přejde do příslušné přihrádky. Předpokládáme, že v přihrádce 3 je potrava a myš tuto přihrádku neopustí, jakmile do ní jednou vstoupí.

a) Modelujte proces pomocí homogenního markovského řetězce, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Ukažte, že tento řetězec je absorpční.
c) Najděte matici přechodu do absorpčních stavů.

Řešení:
ad a) $\{X_n; n \in N_0\}$, $X_n = j$, když v okamžiku n je myš v n-té přihrádce, j = 0, 1, 2, 3.
Matice přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



ad b) {0, 1, 2} jsou přechodné stavy, 3 je trvalý stav. Protože jediný trvalý stav je absorpční, jde o absorpční řetězec.

Matice přechodu v kanonickém tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1 = (1), \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Fundamentální matice: $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$

Matice přechodu do absorpčních stavů: $\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 3b. Homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ má množinou stavů J = {0, 1} a matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Pomocí vytvořujících funkcí najděte matici přechodu po n krocích $\mathbf{P}^n$.

Řešení:

Vytvořující funkce posloupnosti matic $\left\{\mathbf{P}^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar: $G_{\mathbf{P}}(z) = \left(\mathbf{I} - z\mathbf{P}\right)^{-1}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3z}{10} & \frac{7z}{10} \\ \frac{z}{4} & \frac{3z}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{10} & -\frac{7z}{10} \\ -\frac{8z}{10} & 1 - \frac{2z}{10} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I}\text{-}z\mathbf{P}) = \left(1 - \frac{3z}{10}\right) \cdot \left(1 - \frac{2z}{10}\right) - \frac{56z^2}{100} = \ldots = (1 - z) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right)$$

$$\left(\mathbf{I} - z\mathbf{P}\right)^{-1} = \frac{1}{(1 - z)\left(1 + \frac{z}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2z}{10} & \frac{7z}{10} \\ \frac{8z}{10} & 1 - \frac{3z}{10} \end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{1 - z} \begin{pmatrix} 8/15 & 7/15 \\ 8/15 & 7/15 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} \begin{pmatrix} 7/15 & -7/15 \\ -8/15 & 8/15 \end{pmatrix}$$

.

$\dfrac{1}{1 - z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\dfrac{1}{1 + \frac{z}{2}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Matici $\mathbf{P}^n$ lze tedy psát ve tvaru: $\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 8/15 & 7/15 \\ 8/15 & 7/15 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 7/15 & -7/15 \\ -8/15 & 8/15 \end{pmatrix}$.