

Kapitola 1

Úvod

Pojem **náhodného procesu** je zobecněním pojmu náhodné veličiny. Zatímco náhodná veličina je reálná funkce jedné proměnné - *elementárního jevu*, je náhodný proces reálnou funkcí dvou proměnných - *elementárního jevu* a jedné reálné proměnné. Tou obvykle bývá **čas**.

Je možno uvést bezpočet příkladů náhodných procesů. Uvedme namátkou tyto

- *Ve fyzikálních a technických vědách:*
seismický záznam v geofyzice,
řada nejvyšších denních teplot v meteorologii,
průběh výstupního signálu určitého elektrického přístroje,
tenzometrické měření povrchového napětí v provozu namáhané strojní součástky,
změny v tloušťce drátu v průběhu jeho délky,
změny v počtu výzev na určité telefonní lince, atd.
- *V biologických vědách:*
sledování různých parametrů znečištění ovzduší,
EEG, EKG záznamy v medicíně,
procesy množení (např. bakterií), apod.
- *Ve společenských vědách:*
změny v počtu obyvatelstva,
procesy mortality a invalidity obyvatelstva, aj.
- *V ekonomice*
změny poptávky po určitém výrobku,
analýza vývoje kursu akcií na burze,
objem zemědělské produkce,
počet čekajících v letecké dopravě, atd.

Tyto procesy, napohled rozmanité, lze jednotně popsat matematickým pojmem **náhodného (stochastického) procesu**. Ta část matematické statistiky, která se zmíněnými procesy zabývá, se také nazývá statistickou dynamikou.

Cílem analýzy náhodných procesů je konstrukce odpovídajícího modelu, což umožní porozumět mechanismu, na jehož základě jsou generovány sledované údaje. Znalost modelu dále umožňuje předpovídat budoucí vývoj a je-li možné řídit a optimalizovat činnost příslušného systému (vhodnou volbou vstupních parametrů a počátečních podmínek).

1.1 Historie

K nejstarším záznamům ve tvaru časových řad patří *astronomická pozorování*. Grafická znázornění časových řad v podobě, na kterou jsme zvyklí teď, se začala objevovat na počátku 19. století (např. záznamy zemědělské produkce - známá Beveridgeova řada popisující cenový index pšenice v západní Evropě v letech 1500-1869).

V 19. století a na počátku 20. století pod vlivem bouřlivého rozvoje fyziky byla snaha pohlížet na časové řady, jako kdyby byly generovány deterministickým mechanismem (s případnými chybami při měření jednotlivých hodnot). Hodně se proto pracovalo na rozpoznání periodických složek v časové řadě a jako matematický aparát se uplatnila především FOURIEROVA analýza. Schusterův periodogram (1898) položil základy pro moderní spektrální analýzu časových řad. Tento deterministický přístup přetrvával ještě během první čtvrtiny 20. století, přestože byl kritizován pro neschopnost vyjádřit nepravidelnosti v amplitudách a ve vzdálenosti mezi body zvratu (tj. lokálními extrémy) časových řad.

Velký přelom v rozvoji disciplíny proto znamenal přístup Yulea (1927) a Slutského (1937), kteří ukázali, že řada tvořená vzájemně závislými pozorováními může být úspěšně generována navzájem nezávislými "šoky" (přesně řečeno řadou nekolerovaných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem, pro kterou se vžilo označení bílý šum). Bylo opravdu velkým překvapením, když se potvrdilo, že pomocí modelů využívajících bílý šum (např. autoregresních modelů) lze rozumně popsat časové řady, které se často vyznačují cyklickým pohybem s proměnnou amplitudou a proměnnou vzdáleností mezi body zvratu. O další rozvoj disciplíny směrem k praktickým aplikacím se zasloužili Brown, Durbin, Kendall, Pawloski, Wold a další.

Kapitola 2

Náhodné procesy

2.1 Definice náhodného procesu

Definice 2.1.1.

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) , indexová množina $T \subseteq \mathbb{R}$ a reálná funkce

$$X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$$

definovaná pro $\forall \omega \in \Omega$ a $\forall t \in T$.

Jestliže je $X(\omega, t)$ pro $\forall t \in T$ borelovsky měřitelná vzhledem k \mathcal{A} , tj. pro $\forall B \in \mathcal{B}$ a pro $\forall t \in T$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{A},$$

kde \mathcal{B} je σ -algebra borelovských podmnožin, pak tuto funkci nazýváme (n -rozměrným) **náhodným procesem**. Náhodný proces $X(\omega, t)$ při pevném $\omega \in \Omega$ se nazývá **realizace (trajektorie) procesu**.

Pravděpodobnostní míru

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \quad B \in \mathcal{B}$$

nazýváme **rozdělení pravděpodobností náhodného procesu** $X(\omega, t)$.

POZNÁMKA 2.1.2.

Obdobně jako

u **náhodných veličin** kdy místo $X(\omega), \omega \in \Omega$ píšeme pouze X ,

u **náhodných procesů** místo $\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$ píšeme $\{X_t, t \in T\}$.

Definice 2.1.3.

Pokud $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ nebo $T \subset \mathbb{Z}$, mluvíme o **procesu s diskrétním časem** nebo o **časové řadě** či **náhodné posloupnosti**.

Pokud $T = \langle t_1, t_2 \rangle$, kde $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$, říkáme, že $\{X_t, t \in T\}$ je **náhodný proces se spojitým časem**.

Definice 2.1.4.

Dvojice (S, \mathcal{S}) , kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a \mathcal{S} je σ -algebra podmnožin S , se nazývá **stavový prostor** procesu $\{X_t, t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o **proces s diskrétními stavy**. Navývá-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o **procesu se spojitými stavy**.

Rozdělení pravděpodobností P_X náhodného procesu $\{X_t, t \in T\}$ jednoznačně definuje rozdělení každého konečněrozměrného náhodného vektoru

$$\mathbf{X} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})',$$

kde t_1, \dots, t_n jsou libovolné body z množiny T .

Definice 2.1.5.

Nechť T^n je množina všech vektorů

$$T^n = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' : t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n; t_i \in T; i = 1, \dots, n\}.$$

Pak (konečně dimenzionální) **distribuční funkci** náhodného procesu rozumíme funkci

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) &= F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) \\ &= P_{\mathbf{X}_{\mathbf{t}}}((-\infty, x_1 >, \dots, (-\infty, x_n >)) \end{aligned}$$

pro $\forall \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' \in T^n$ a $\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$.

Pro různá n a pro různé hodnoty t_1, \dots, t_n dostáváme celý systém distribučních funkcí, označme jej \mathcal{F} , a který nemůže být úplně libovolný, ale zřejmě musí splňovat tzv. **Kolmogorovy podmínky konzistence**

(K1) **Podmínka symetrie**: pro libovolnou permutaci i_1, \dots, i_n čísel $1, \dots, n$ platí

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

(K2) **Podmínka konzistence**:

$$F_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, \infty) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

Každému náhodnému procesu lze tedy přiřadit konzistentní systém distribučních funkcí. K danému konzistentnímu systému distribučních funkcí existuje vždy takový náhodný proces, že jeho systém distribučních funkcí je totožný se zadaným systémem, což říká následující věta.

Věta 2.1.6.**Kolmogorova věta**

K systému distribučních funkcí, které splňují Kolmogorovy podmínky konzistence, existuje pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) a náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ tak, že \mathcal{F} je jeho systémem distribučních funkcí.

DŮKAZ. Protože jde v podstatě o problém z teorie míry, nebudeme důkaz uvádět, lze ho najít např. v Neubrunn, T., Riečan, B.: Míra a integrál, Bratislava. Veda 1981. \square

2.2 PŘÍKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

PŘÍKLAD 2.2.1 (SINUSOIDA S NÁHODNOU FÁZÍ A AMPLITUDOU).

Nechť A a θ jsou nezávislé náhodné veličiny $A \geq 0$, $\theta \sim Rs(0, 2\pi)$. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ může být definován

$$\boxed{X_t = r^{-1}A \cos(\nu t + \theta)}, \quad \nu \geq 0, r > 0.$$

PŘÍKLAD 2.2.2 (BINÁRNÍ PROCES).

Binární proces $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ je posloupnost nezávislých alternativních náhodných proměnných:

$$\boxed{X_t \sim A \left(\frac{1}{2}\right)}.$$

PŘÍKLAD 2.2.3 (NÁHODNÁ PROCHÁZKA).

Náhodná procházka $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ je definován takto

$$\boxed{X_0 = 0}, \quad \boxed{X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t},$$

kde ε_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem, tj.

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{L}(0, \sigma^2).$$

PŘÍKLAD 2.2.4 (MARKOVOVŮV PROCES).

Markovovův proces $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ je definován takto

$$P(a < X_t \leq b; X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(a < X_t \leq b; X_n = x_n),$$

tj. chování procesu v budoucnosti závisí na jeho stavu v posledním časovém okamžiku, ale ne na cestě, kterou do tohoto stavu dospěl.

2.3 Stochastické procesy druhého řádu

Definice 2.3.1.

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **striktně stacionární**, jestliže pro $\forall \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ a pro $\forall \boldsymbol{\tau} = (t_1 + h, \dots, t_n + h) \in T^n$ platí

$$F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\tau_1, \dots, \tau_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}).$$

Rovnost lze interpretovat tak, že základní pravděpodobnostní charakteristiky procesu se nemění při posunutí v čase.

Definice 2.3.2.

Existuje-li pro $\forall t \in T$ střední hodnota EX_t , pak nazýváme funkci

$$\boxed{\mu_t = EX_t}$$

střední hodnotu náhodného procesu.

Definice 2.3.3.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ nazýváme **procesem druhého řádu**, jestliže pro $\forall t \in T$ platí

$$EX_t^2 < \infty$$

a říkáme, že náhodný proces má **konečné druhé momenty**.

POZNÁMKA 2.3.4.

Pokud $EX_t^2 < \infty$, pak ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$E|X_t| \leq (E1^2 \cdot E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} = (E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

tj. existuje střední hodnota

$$EX_t = \mu_t$$

a rozptyl

$$DX_t = EX_t^2 - (EX_t)^2 - \sigma_t^2.$$

Definice 2.3.5.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ nazýváme **stacionární ve střední hodnotě**, pokud pro $\forall t \in T$ je střední hodnota konstantní, tj.

$$EX_t = \mu.$$

Pokud $EX_t = 0$, náhodný proces nazýváme **centrovaným**.

Definice 2.3.6.

Uvažujme náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$, který má konečné druhé momenty. Pak funkci

$$\gamma(s, t) = C(X_s, X_t) = E(X_s - EX_s)(X_t - EX_t)$$

nazveme **autokovarianční funkcí**.

Tato reálná funkce dvou proměnných dává informaci o **lineárním vztahu** mezi jakoukoliv dvojicí náhodných veličin X_s a X_t .

Definice 2.3.7.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá **kovariančně stacionární**, pokud pro $\forall t, s \in T$ platí

$$\gamma(s, t) = \gamma(0, |s - t|),$$

což budeme také psát ve formě

$$\gamma(s, t) = \gamma(s - t),$$

tj. autokovarianční funkce závisí na svých argumentech pouze prostřednictvím jejich rozdílů.

POZNÁMKA 2.3.8.

Protože

$$C(X_s, X_t) = C(X_t, X_s),$$

pak pro kovariančně stacionární procesy platí

$$\boxed{\gamma(-t) = \gamma(t)}$$

a všechny náhodné veličiny X_t mají tentýž konečný rozptyl

$$DX_t = C(X_t, X_t) = \gamma(t - t) = \gamma(0).$$

Ze Schwarzovy nerovnosti dále plyne

$$\boxed{|\gamma(t)|} = |C(X_0, X_t)| \leq \sqrt{DX_0 DX_t} = \boxed{\gamma(0)}.$$

Definice 2.3.9.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá (**slabě**) **stacionární**, je-li **kovariančně stacionární**, tj.

$$\boxed{\gamma(s, t) = \gamma(s - t)}, \quad \text{pro } \forall t, s \in T$$

a navíc **stacionární ve střední hodnotě**, tj.

$$\boxed{EX_t = \mu} \quad \text{pro } \forall t \in T.$$

POZNÁMKA 2.3.10.

Přívlastek slabě se většinou vynechává. Lze snadno ukázat, že je-li proces striktně stacionární, je také stacionární. Opačná implikace však neplatí.

Definice 2.3.11.

Nechť náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je stacionární. Označme

$$\boxed{\gamma(0) = \sigma^2}$$

a zavedme funkci

$$\boxed{\varrho(t) = \frac{\gamma(t)}{\sigma^2} = \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)}}.$$

Tuto funkci nazveme **autokorelační funkcí** stacionárního náhodného procesu

Definice 2.3.12.

Řekneme, že náhodný proces $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ je **bílým šumem** (White Noise), jestliže ε_t jsou nekorelované náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou, tj.

$$E\varepsilon_t = 0 \quad D\varepsilon_t = \sigma^2 \quad C(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad (s \neq t),$$

značíme

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Pokud jsou navíc nejen nekolerované, ale i **nezávislé**, značíme je symbolem **IID** (independent identical defined), píšeme

$$\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2).$$

Věta 2.3.13.

Náhodné procesy $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ a $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$ jsou stacionárními náhodnými procesy.

DŮKAZ. Zřejmý. □

Definice 2.3.14.

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá **gaussovským** (normálním), jestliže pro každé přirozené n a libovolná čísla $t_j \in T$, $j = 1, \dots, n$, je jeho n -rozměrná distribuční funkce $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ distribuční funkcí n -rozměrného normálního rozdělení.

Věta 2.3.15.

Gaussův náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je stacionární, právě když je striktně stacionární.

DŮKAZ. Je triviální a plyne z vlastností normálního rozdělení. □

Definice 2.3.16.

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ splňuje **lineární regresní model**, pokud pro jeho střední hodnotu platí

$$\forall t \in T : EX_t = \mu_t = \sum_{j=0}^m \beta_j f_j(t),$$

kde f_0, \dots, f_m jsou známé funkce definované na T , $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)'$ je neznámý vektor regresních koeficientů.

2.3.1 Příklady

PŘÍKLAD 2.3.17.

Mějme náhodnou veličinu

$$U \sim N(0, 1)$$

a označme

$$\Phi(u) = P(U \leq u); u \in R.$$

Pro $t \in T \subseteq R$ zavedme

$$\boxed{X_t = U \cdot t}.$$

Vypočítejme **distribuční funkci** $F_t(x) = P(X_t \leq x)$.

$$F_t(x) = P(X_t \leq x) = P(U \cdot t \leq x) = \begin{cases} P(U \leq \frac{x}{t}) = \Phi(\frac{x}{t}) & t > 0; x \in R \\ 0 & t = 0; x \leq 0 \\ 1 & t = 0; x > 0 \\ P(U \geq \frac{x}{t}) = 1 - \Phi(\frac{x}{t}) & t < 0; x \in R \end{cases}.$$

PŘÍKLAD 2.3.18.

Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro něž platí:

$$\boxed{X_t \sim \begin{cases} N(1, 1) & \text{je-li } t \text{ liché} \\ Ex(1) & \text{je-li } t \text{ sudé} \end{cases}}.$$

Proces je (**slabě**) **stacionární**, neboť

$$EX_t = 1, \quad DX_t = 1 \quad \text{a} \quad \gamma(s, t) = 0 \quad \text{pro} \quad s \neq t$$

(jsou nezávislé). Tento proces však **není striktně stacionární**, neboť pro liché a sudé t je distribuční funkce rozdílná.

PŘÍKLAD 2.3.19.

Nechť stacionární náhodný proces $\{Y_t, t \in Z\}$. Definujme

$$\boxed{X_t = \begin{cases} Y_t & \text{je-li } t \text{ liché} \\ Y_t + 1 & \text{je-li } t \text{ sudé} \end{cases}}.$$

I když

$$\gamma_X(t+h, t) = C(X_{t+h}, X_t) = C(Y_{t+h}, Y_t) = \gamma_Y(h),$$

tj. proces je kovariančně stacionární, přesto **není (slabě) stacionární**, protože střední hodnota není konstantní.

PŘÍKLAD 2.3.20.

Mějme náhodný proces $\{X_t, t \in Z\}$, který je definován takto

$$\boxed{X_t = A \cos \theta t + B \sin \theta t},$$

kde A, B jsou nekorelované náhodné veličiny, pro něž

$$EA = EB = 0, \quad DA = DB = 1, \quad \theta \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Zjistíme, zda je proces (slabě) stacionární. Protože náhodné veličiny A a B jsou nekorelované, pak

$$C(A, B) = E(A \cdot B) = 0.$$

Vypočteme nejprve **střední hodnotu** procesu:

$$\boxed{EX_t} = E(A \cos \theta t + B \sin \theta t) = \cos \theta t \cdot \underbrace{EA}_{=0} + \sin \theta t \cdot \underbrace{EB}_{=0} = \boxed{0}.$$

Autokovarianční funkce:

$$\begin{aligned} \boxed{\gamma(t+h, t)} &= C(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h} \cdot X_t) \\ &= E\{[A \cos \theta(t+h) + B \sin \theta(t+h)] \cdot [A \cos \theta t + B \sin \theta t]\} \\ &= E\{A^2 \cos \theta(t+h) \cos \theta t + AB \cos \theta(t+h) \sin \theta t \\ &\quad + AB \sin \theta(t+h) \cos \theta t + B^2 \sin \theta(t+h) \sin \theta t\} \\ &= \cos \theta(t+h) \cos \theta t \cdot \underbrace{EA^2}_{=1} + \cos \theta(t+h) \sin \theta t \cdot \underbrace{EAB}_{=0} \\ &\quad + \sin \theta(t+h) \cos \theta t \cdot \underbrace{EAB}_{=0} + \sin \theta(t+h) \sin \theta t \cdot \underbrace{EB^2}_{=1} \\ &= \cos \theta(t+h) \cos \theta t + \sin \theta(t+h) \sin \theta t \\ &= \cos \theta t [\cos \theta t \cos \theta h - \sin \theta t \sin \theta h] + \sin \theta t [\sin \theta t \cos \theta h + \cos \theta t \sin \theta h] \\ &= \cos \theta h [\cos^2 \theta t + \sin^2 \theta t] = \cos \theta h = \boxed{\gamma(h)} \end{aligned}$$

Tedy $\gamma(t+h, t)$ nezávisí na t , proto proces je **(slabě) stacionární**.

PŘÍKLAD 2.3.21 (NÁHODNÁ PROCHÁZKA).

Nechť

$$\boxed{X_0 = 0}; \boxed{X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t},$$

kde ε_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny $\varepsilon_t \sim L(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Zjistíme, zda je proces (slabě) stacionární. Vypočteme nejprve **střední hodnotu** procesu:

$$\boxed{EX_t} = E\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^t \underbrace{E\varepsilon_i}_{=0} = \boxed{0}$$

tj. konstatní střední hodnota.

Autokovarianční funkce:

$$\boxed{\gamma(t+h, t)} = C(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h} \cdot X_t) = E\left(\sum_{i=1}^{t+h} \varepsilon_i\right) \left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^t E\varepsilon_i^2 = \boxed{t \cdot \sigma_\varepsilon^2},$$

závisí na t , tedy proces **není (slabě) stacionární**.

PŘÍKLAD 2.3.22 (MA(1) PROCES).

Mějme

$$\boxed{X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}}, \quad \text{kde} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Zjistěme, zda je proces (slabě) stacionární. Vypočtěme nejprve **střední hodnotu** procesu:

$$\boxed{EX_t} = E(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) = \underbrace{E\varepsilon_t}_{=0} + \theta \underbrace{E\varepsilon_{t-1}}_{=0} = \boxed{0}.$$

Autokovarianční funkce

$$\begin{aligned} \boxed{\gamma(t+h, t)} &= \gamma(t+h, t) = C(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h} \cdot X_t) = E(\varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= E\varepsilon_{t+h} \cdot \varepsilon_t + \theta E\varepsilon_{t+h-1} \cdot \varepsilon_t + \theta E\varepsilon_{t+h} \cdot \varepsilon_{t-1} + \theta^2 E\varepsilon_{t+h-1} \cdot \varepsilon_{t-1} = \\ &= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta^2) & h = 0 \\ \theta\sigma_\varepsilon^2 & h = \pm 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} = \boxed{\gamma(h)} \end{aligned}$$

Tedy MA(1) proces je (slabě) stacionární.

Autokorelační funkce:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & h = \pm 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

PŘÍKLAD 2.3.23 (MARKOVOVŮV SKOKOVÝ PROCES VZNIKU A ZÁNIKU).Mějme náhodný proces $\{X_t, t \in R\}$, pro který platí

$$\begin{aligned} P(X_t = 0) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \\ P(X_t = 1) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \lambda > 0, \mu > 0 \\ P(X_s = x | X_t = y) &= p_{xy}(t-s) \quad -\infty < s \leq t < \infty, \end{aligned}$$

přičemž

$$\begin{aligned} p_{00}(t) = 1 - p_{01}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \quad t \geq 0 \\ p_{11}(t) = 1 - p_{10}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Konstanty λ a μ se interpretují jako intenzity vzniku a zániku. Rozhodněme, zda je proces stacionární.**Výpočet střední hodnoty**

$$EX_t = \sum_{x=0,1} xP(X_t = x) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

a proces je tedy stacionární ve střední hodnotě.

Výpočet autokovarianční funkce: platí

$$\gamma(s, t) = C(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - (EX_s)(EX_t),$$

proto pro $-\infty < s \leq t < \infty$ nejprve počítejme

$$\begin{aligned} E(X_s X_t) &= \sum_{x=0,1} \sum_{y=0,1} xyP(X_s = x, X_t = y) = 1 \cdot 1 \cdot P(X_s = 1, X_t = 1) \\ &= P(X_t = 1) \underbrace{P(X_s = 1 | X_t = 1)}_{p_{11}(t-s)} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right] e^{-(\lambda + \mu)(t-s)} \end{aligned}$$

tudíž

$$\begin{aligned}\boxed{\gamma(s, t)} &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 + \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)(t-s)} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \\ &= \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)(t-s)} = \boxed{\gamma(t-s)}.\end{aligned}$$

Protože pro každou kovarianční funkci platí

$$\gamma(t) = \gamma(-t),$$

dostáváme pro $-\infty < t < \infty$

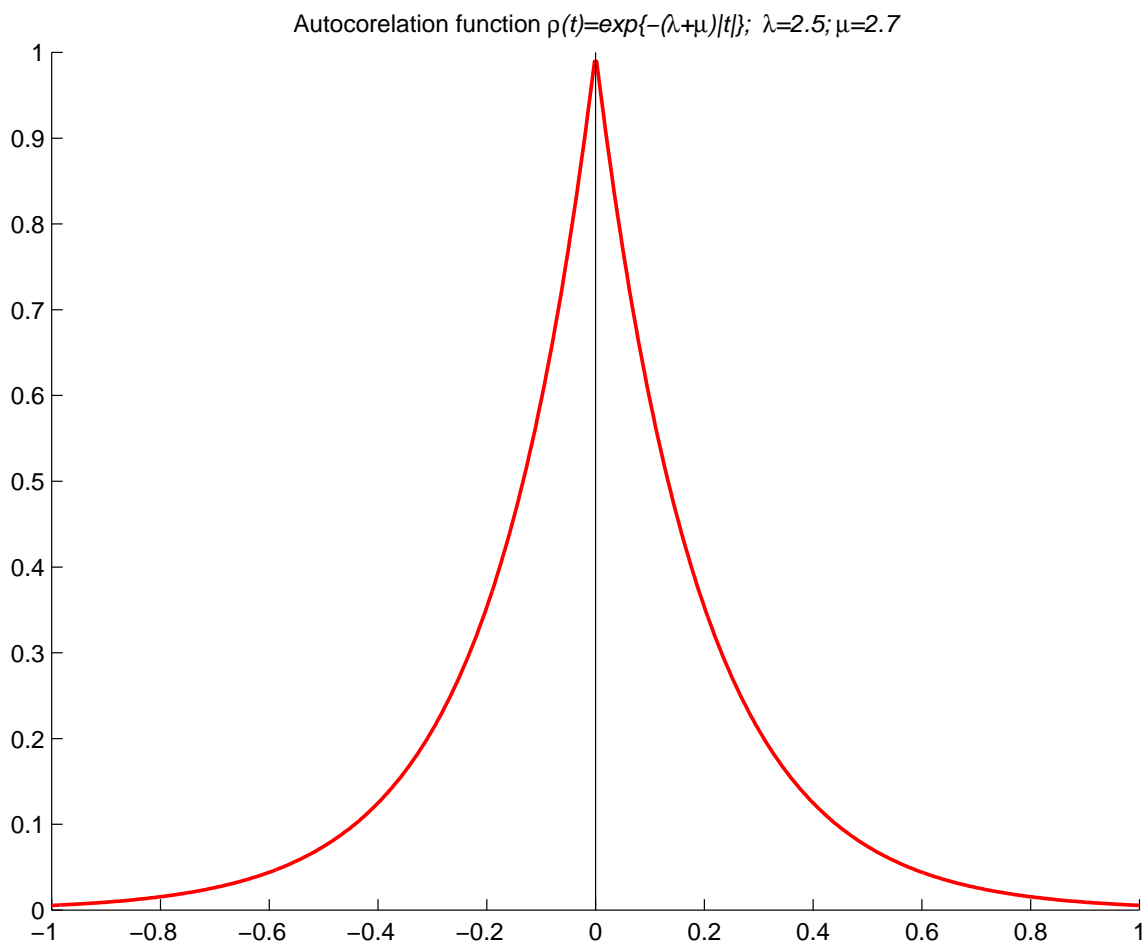
$$\gamma(t) = \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)|t|}.$$

Proces je tedy kovariančně stacionární a celkově je **slabě stacionární**.

Výpočet autokorelační funkce:

$$\rho(t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)} = e^{-(\lambda+\mu)|t|}.$$

Korelace mezi náhodnými veličinami tohoto procesu pro $|t| \rightarrow \infty$ exponenciálně klesá k nule.



Obrázek 2.1: Markovovův skokový proces vzniku a zániku: autokorelační funkce.

2.3.2 Vlastnosti autokovariační funkce

Třebaže v praktických situacích máme co činit jen s reálnými náhodnými veličinami, v teorii bývá výhodné pracovat někdy s **komplexními náhodnými veličinami**.

Komplexní veličinou rozumíme veličinu

$$X = Y + iZ,$$

kde Y a Z jsou reálné náhodné veličiny.

Komplexním náhodným procesem nazveme systém komplexních náhodných veličin

$$\{X_t, t \in T\}.$$

Mnoho dalších úvah se bude týkat právě komplexních procesů. Slovo „komplexní“ se bude vynechávat, když bude zřejmé ze souvislosti.

Existují-li střední hodnoty EY a EZ , definuje se **střední hodnota komplexní náhodné veličiny** $X = Y + iZ$

$$\boxed{EX = EY + iEZ}.$$

Budeme se nyní zabývat základními vlastnostmi autokovarianční funkce $\gamma(s, t)$. Přitom se samozřejmě předpokládá, že jde o proces s konečnými druhými momenty.

Jelikož autokovarianční funkce procesu zůstává stejná při změně střední hodnoty, budeme také pro jednoduchost předpokládat, že střední hodnota procesu je rovna nule, tj. že **proces je centrován**.

Nejprve uvedeme definici tzv. pozitivně semidefinitní funkce.

Definice 2.3.24.

Nechť $f(s, t)$ je funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$. Říkáme, že f je **pozitivně semidefinitní**, platí-li pro jakékoli přirozené číslo n , pro libovolná komplexní čísla c_1, \dots, c_n a libovolné body $t_1, \dots, t_n \in T$ vztah

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(t_j, t_k) c_j \bar{c}_k \geq 0.} \quad (2.1)$$

Funkce jedné proměnné $g(t)$, $t \in T$ se nazývá **pozitivně semidefinitní**, platí-li pro každé přirozené n , libovolná komplexní čísla c_1, \dots, c_n a libovolné body $t_1, \dots, t_n \in T$ a $t_j - t_k \in T$ pro $j, k = 1, \dots, n$ vztah

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g(t_j - t_k) c_j \bar{c}_k \geq 0.} \quad (2.2)$$

Ze souvislosti bude vždy patrné, zda jde o definici ve smyslu (2.1) nebo (2.2).

Věta 2.3.25.

Autokovarianční funkce $\gamma(s, t)$ je pozitivně semidefinitní.

DŮKAZ. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je centrovaný proces s autokovarianční funkcí $\gamma(s, t)$. Pak zřejmě platí

$$0 \leq E \left| \sum_{j=1}^n c_j X_{t_j} \right|^2 = E \left[\sum_{j=1}^n c_j X_{t_j} \sum_{k=1}^n \bar{c}_k \bar{X}_{t_k} \right] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k E(X_{t_j} \bar{X}_{t_k}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k \gamma(t_j, t_k).$$

Věta 2.3.26.

Autokovarianční funkce $\gamma(s, t)$ je **hermitovskky symetrická**, tj. pro $s, t \in T$ platí

$$\gamma(s, t) = \overline{\gamma(t, s)}$$

DŮKAZ. Plyne ze základních vlastností integrálu. Platí $\gamma(s, t) = E(X_s \bar{X}_t) = \overline{E(X_t \bar{X}_s)} = \overline{\gamma(t, s)}$. \square

Věta 2.3.27.

Je-li funkce $\gamma(s, t)$ pozitivně semidefinitní a hermitovskky symetrická, existuje takový náhodný proces (dokonce normální), že $\gamma(s, t)$ je jeho autokovarianční funkce.

DŮKAZ. Viz Doob, J.L.: Stochastic processes. New York, Wiley 1953 - kap. 2, §3. \square

Věta 2.3.28.

Pro autokovarianční funkci $\gamma(s, t)$ platí nerovnosti

$$\gamma(s, s) \geq 0 \quad a \quad |\gamma(s, t)| \leq \sqrt{\gamma(s, s)} \sqrt{\gamma(t, t)}.$$

DŮKAZ. První nerovnost plyne z definice autokovarianční funkce a druhá ze Schwarzovy nerovnosti. \square

Lemma 2.3.29.

Součet dvou pozitivně semidefinitních hermitovskky symetrických funkcí je opět funkce pozitivně semidefinitní a hermitovskky symetrická.

DŮKAZ. Nechť $f_1(s, t)$ a $f_2(s, t)$ jsou pozitivně semidefinitní. Položme

$$f(s, t) = f_1(s, t) + f_2(s, t).$$

Pro libovolná komplexní čísla c_1, \dots, c_n platí

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k f(t_j, t_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k f_1(t_j, t_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k f_2(t_j, t_k).$$

Každý z obou výrazů na pravé straně je nezáporný. Musí být tudíž nezáporný i výraz vlevo, čímž je zaručena pozitivní semidefinitnost funkce f .

Jsou-li f_1 a f_2 hermitovskky symetrické, je i funkce f hermitovskky symetrická; to je ihned zřejmé. \square

Věta 2.3.30.

Součet dvou autokovariačních funkcí je opět autokovarianční funkcí.

DŮKAZ. Důkaz plyne z lemmatu 2.3.29 a z vět 2.3.25, 2.3.26 a 2.3.27. \square

Věta 2.3.31.

Reálná část autokovarianční funkce je též autokovarianční funkcí. Imaginární část je autokovarianční funkcí jen tehdy, je-li rovna identicky nule.

DŮKAZ. Nechť $\{Z_t, t \in T\}$ je komplexní náhodný proces s autokovariační funkcí $\gamma(s, t)$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že náhodný proces má nulovou střední hodnotu. Položme

$$Z_t = X_t + iY_t,$$

kde X_t a Y_t jsou reálná náhodné veličiny. Z předpokladu $EZ_t = 0$ plyne

$$EX_t = EY_t = 0.$$

Máme

$$\begin{aligned} \gamma(s, t) &= EZ_s \bar{Z}_t = E(X_s + iY_s)(X_t - iY_t) \\ &= EX_s X_t + EY_s Y_t + i(EY_s X_t - EX_s Y_t) \end{aligned}$$

Reálná část $\gamma(s, t)$ je rovna

$$EX_s X_t + EY_s Y_t.$$

Je tedy rovna součtu autokovariační funkce procesu $\{X_t, t \in T\}$ a autokovariační funkce procesu $\{Y_t, t \in T\}$. Podle věty 2.3.30 je autokovarianční funkcí.

Imaginární část $\gamma(s, t)$ je rovna

$$EY_s X_t - EX_s Y_t.$$

V bodech $s = t$ je rovna nule. Má-li být autokovariační funkcí, musí splňovat druhou nerovnost z věty 2.3.28. To je možné jen tehdy, je-li stále rovna nule. (Na druhé straně funkce identicky rovná nule je autokovariační funkcí - např. procesu, který je stále roven nule). \square

2.3.3 Spojitost, derivace a integrál procesu

Budeme nyní předpokládat, že

$$T = (a, b) \subset \mathbb{R}.$$

Tam, kde budeme pojednávat o spojitosti a o derivaci procesu, připustíme i možnost

$$a = -\infty \quad \text{nebo} \quad b = \infty.$$

V celé této kapitole budeme předpokládat, že **proces je centrován**. Tento předpoklad je dosti podstatný, neboť jinak by různé nespojitosti apod. mohly být zaviněny málo hladkým průběhem střední hodnoty. Samozřejmě budeme předpokládat, že proces má **konečné druhé momenty**. Všechny úvahy se týkají **komplexních procesů**.

SPOJITOST NÁHODNÉHO PROCESU

Pokud se zajímáme o spojitost procesu $\{X_t, t \in T\}$ v bodě $t_0 \in T$, budeme studovat chování náhodných veličin X_t při $t \rightarrow t_0$.

Jestliže X_t konvergují v nějakém smyslu k X_{t_0} , je možno mluvit o spojitosti procesu X_t v bodě t_0 . Z různých typů konvergenčí se ukazuje v tomto případě jako nejužitečnější konvergence podle kvadratického středu.

Definice 2.3.32.

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **spojitý podle středu v bodě** $t_0 \in T$, jestliže při $t \rightarrow t_0$ konvergují X_t k X_{t_0} podle kvadratického středu, tj. když

$$E|X_t - X_{t_0}|^2 \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad t \rightarrow t_0.$$

V tom případě píšeme

$$X_{t_0} = \text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} X_t$$

(zkratka z anglického "limit in the mean").

Je-li proces $\{X_t, t \in T\}$ **spojitý v každém bodě množiny** T , říkáme stručně, že je **spojitý**.

POZNÁMKA 2.3.33.

Z teorie pravděpodobnosti je známo, že konvergence podle kvadratického středu implikuje konvergenci podle pravděpodobnosti.

Věta 2.3.34 (kritérium spojitosti procesu).

Proces $\{X_t, t \in T\}$ je **spojitý právě tehdy**, když je jeho autokovarianční funkce $\gamma(s, t)$ **spojitá v bodech** (s, t) , pro něž $s = t$.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že proces je centrováný.

\Rightarrow Je-li proces $\{X_t, t \in T\}$ spojitý, pak platí

$$\begin{aligned} |\gamma(s, t) - \gamma(s_0, t_0)| &= |EX_s \bar{X}_t - EX_{s_0} \bar{X}_{t_0}| = \\ &= | \underbrace{E(X_s - X_{s_0})(\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0})}_{(1)} + \underbrace{EX_{s_0}(\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0})}_{(2)} + \underbrace{E(X_s - X_{s_0})\bar{X}_{t_0}}_{(3)} | \\ &\stackrel{\text{trojúheln. ner.}}{\leq} |E(X_s - X_{s_0})(\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0})| + |EX_{s_0}(\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0})| + |E(X_s - X_{s_0})\bar{X}_{t_0}| \\ &\stackrel{\text{Schwarz. ner.}}{\leq} \left(\underbrace{E|X_s - X_{s_0}|^2 E|\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0}|^2}_{\rightarrow 0} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\underbrace{E|X_{s_0}|^2 E|\bar{X}_t - \bar{X}_{t_0}|^2}_{\rightarrow 0} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\underbrace{E|X_s - X_{s_0}|^2 E|\bar{X}_{t_0}|^2}_{\rightarrow 0} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\text{pro} \quad s \rightarrow s_0, t \rightarrow t_0 \end{aligned}$$

(využili jsme vlastnosti spojitosti skalárního součinu). Funkce $\gamma(s, t)$ je tudíž spojitá všude, a tedy také na diagonále $s = t$.

⇐ Předpokládejme nyní, že $\gamma(s, t, \cdot)$ je spojitá na diagonále $s = t$. Máme

$$\begin{aligned} E|X_s - X_t|^2 &= E(X_s - X_t)(\bar{X}_s - \bar{X}_t) \\ &= EX_s\bar{X}_s - EX_s\bar{X}_t - EX_t\bar{X}_s + EX_t\bar{X}_t \\ &= \gamma(s, s) - \gamma(s, t) - \gamma(t, s) + \gamma(t, t) \end{aligned}$$

Při pevném t a při $s \rightarrow t$ z našeho předpokladu vyplývá

$$\gamma(s, s) \rightarrow \gamma(t, t), \quad \gamma(s, t) \rightarrow \gamma(t, t), \quad \gamma(t, s) \rightarrow \gamma(t, t),$$

takže

$$E|X_s - X_t|^2 \rightarrow 0,$$

tj. konverguje podle kvadratického středu. □

DERIVACE NÁHODNÉHO PROCESU

Derivaci náhodného procesu budeme definovat obdobně, jako se definuje derivace funkce.

Definice 2.3.35.

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ má v bodě $t_0 \in T$ derivaci X'_{t_0} , jestliže platí

$$\text{l.i.m.}_{h \rightarrow 0} \frac{X_{t_0+h} - X_{t_0}}{h} = X'_{t_0} \quad \text{pro} \quad t_0 + h \in T.$$

Má-li náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ derivaci ve všech bodech $t \in T$, říkáme stručně, že **má derivaci**.

Věty, které dávají nutnou a postačující podmínku pro existenci derivace náhodného procesu, lze najít v knize Anděl, J.: Statistická analýza časových řad. Praha. SNTL 1976

INTEGRÁL NÁHODNÉHO PROCESU

Definice 2.3.36.

Nechť $T = (a, b)$ je konečný nedegenerovaný interval. Nechť $\langle T_1, T_2 \rangle \subset T$, kde $T_1 < T_2$. Pomocí dělení D_n intervalu $\langle T_1, T_2 \rangle$ takového, že

$$T_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_2,$$

utvoříme součet

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} (t_{k+1} - t_k).$$

Označme

$$\Delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$$

normu dělení D_n . Jestliže posloupnost I_n konverguje podle kvadratického středu k náhodné veličině I pro $n \rightarrow \infty$ při každé takové posloupnosti dělení D_n , že $\Delta_n \rightarrow 0$, náhodná veličina I se nazývá **Riemannův integrál procesu** $\{X_t, t \in T\}$ na intervalu $\langle T_1, T_2 \rangle$. Píšeme pak

$$I = \int_{T_1}^{T_2} X_t dt.$$

Věta 2.3.37 (kritérium existence integrálu procesu).

Má-li $\{X_t, t \in T\}$ s konečnými druhými momenty *centrovaný* *náhodný* *proces* autokovarianční funkci $\gamma(s, t)$, pak Riemannův integrál $\int_{T_1}^{T_2} X_t dt$ existuje právě tehdy, když existuje Riemannův integrál

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} \gamma(s, t) ds dt.$$

DŮKAZ. Lze najít v knize Anděl, J.: Statistická analýza časových řad. Praha. SNTL 1976. \square
 V praxi samozřejmě není nutno počítat $\int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} \gamma(s, t) ds dt$, abychom se přesvědčili, že existuje $\int_{T_1}^{T_2} X_t dt$. Stačí např. zjistit, že $\gamma(s, t)$ je spojitá, protože pak už Riemannův integrál $\int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} \gamma(s, t) ds dt$ musí existovat vzhledem k omezenosti uzavřené množiny $\langle T_1, T_2 \rangle \times \langle T_1, T_2 \rangle$.
POZNÁMKA 2.3.38.

Někdy je třeba užívat integrál procesu v jiném smyslu. Chápeme-li proces $X(\omega, t)$ jako funkci dvou proměnných, můžeme pro každé $\omega \in \Omega$ definovat **Lebesgueův integrál**

$$\int_{T_1}^{T_2} X(\omega, t) dt.$$

Musíme mít ovšem zaručeno, že tento integrál vůbec existuje. V definici náhodného procesu jsme totiž nečinili žádné předpoklady o chování funkcí

$$X(\omega, \cdot),$$

tj. o chování množiny funkcí proměnné t při pevném ω , takže ani nemáme zaručeno, že tyto funkce jsou vůbec měřitelné. Pokud se stane, že při každém ω je $X(\omega, \cdot)$ **spojitou funkcí proměnné t** , pak je samozřejmě existence Lebesgueova integrálu zaručena.

2.3.4 Spektrální rozklad autokovariančních funkcí stacionárních procesů

V celém tomto odstavci budeme předpokládat, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **stacionární, centrovaný a druhého řádu** (tj. s konečnými druhými momenty).

Významnou vlastností stacionárních náhodných procesů je vlastnost, že jeho autokovarianční funkci lze vyjádřit jako (nespočetný) součet harmonických funkcí s různými frekvencemi a amplitudami.

Věta 2.3.39 (Herglotzova věta).

Je-li $\{X_t, t \in Z\}$ stacionární posloupnost, pak se její autokovarianční funkce $\gamma(t)$ dá vyjádřit ve tvaru

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda),$$

kde $F(\lambda)$ je taková neklesající, zprava spojitá funkce, že

$$F(-\pi) = 0 \quad a \quad F(\pi) = \gamma(0).$$

Přitom $F(\lambda)$ je jediná.

DŮKAZ. Protože $\gamma(t)$ je pozitivně semidefinitní, platí pro každé přirozené n , libovolná komplexní čísla

$$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$$

a libovolné body

$$t_1, \dots, t_n \in T \quad \text{a} \quad t_j - t_k \in T \quad j, k = 1, \dots, n$$

vztah

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma(t_j - t_k) c_j \bar{c}_k \geq 0. \quad (2.3)$$

Položme

$$\begin{aligned} t_j &= j, \\ c_j &= e^{-i\lambda j}, \quad \text{kde} \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \end{aligned}$$

Definujme

$$f_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma(j-k) e^{-i\lambda(j-k)}.$$

Vzhledem k (2.3) platí

$$f_n(\lambda) \geq 0 \quad \text{pro} \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

Po substituci

$$j - k = s$$

dostáváme vyjádření

$$f_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{s=-n+1}^{n-1} (n - |s|) \gamma(s) e^{-i\lambda s}$$

a celkově

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \gamma(s) e^{-i\lambda s} & |s| < n, \\ 0 & |s| \geq n. \end{cases} \quad (2.4)$$

Uvědomíme-li si, že platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi & k = 0, \\ 0 & k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

což lze ověřit třeba i rozkladem

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

počítejme

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f_n(\lambda) d\lambda &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \gamma(s) e^{-i\lambda s} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \gamma(s) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} d\lambda}_{=2\pi \text{ pro } t=s; =0 \text{ jinak}} = \begin{cases} \gamma(t) \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) & |t| < n, \\ 0 & |t| \geq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Označme

$$F_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_n(x) dx. \quad (2.6)$$

Protože $f_n(x)$ je nezáporná, je $F_n(\lambda)$ neklesající funkce. Je jasné, že

$$F_n(-\pi) = 0.$$

Dále s využitím vztahu (2.5) počítejme

$$\begin{aligned} \boxed{F_n(\pi)} &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \gamma(s) e^{-i\lambda s} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \gamma(s) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda s} d\lambda}_{=2\pi \text{ pro } s=0; =0 \text{ jinak}} = \boxed{\gamma(0)}. \end{aligned}$$

Položme

$$\begin{aligned} F_n(\lambda) &= 0 && \text{pro } \lambda < -\pi, \\ F_n(\lambda) &= \gamma(0) && \text{pro } \lambda > \pi. \end{aligned}$$

Podle 1. Hellyho věty lze z posloupnosti funkcí $\{F_n(\lambda)\}$ vybrat podposloupnost $\{F_{n_k}(\lambda)\}$, která konverguje k nějaké neklesající zprava spojitě funkci $F(\lambda)$ ve všech bodech spojitosti této limitní funkce (jde o tzv. konvergenci v podstatě). Pro $F(\lambda)$ musí zřejmě platit

$$F(-\pi - 0) = 0 \quad \text{a} \quad F(\pi + 0) = \gamma(0);$$

ovšem vzhledem ke spojitosti zprava musí dokonce platit

$$F(\pi) = \gamma(0).$$

Podle 2. Hellyho věty (vzhledem k ohraničenosti funkce $e^{it\lambda}$) platí pro každé celé t

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF_{n_k}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda).$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \boxed{\gamma(t)} &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \gamma(t) \left(1 - \frac{|t|}{n_k}\right) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f_{n_k}(\lambda) d\lambda \\ &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF_{n_k}(\lambda) = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda)}. \end{aligned} \quad \square$$

Má-li funkce $F(\lambda)$ skok v bodě

$$\lambda = \pi,$$

pozměníme ji tak, že velikost tohoto skoku dáme odtud do bodu

$$\lambda = -\pi.$$

Tím se hodnota integrálu nezmění a docílili jsme však toho, že

$$F(\pi) = \gamma(0).$$

Věta 2.3.40 (Bochnerova věta).

Je-li $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ stacionární proces spojitý podle středu, pak se jeho autokovarianční funkce $\gamma(t)$ dá vyjádřit ve tvaru

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda),$$

kde $F(\lambda)$ je taková neklesající, zprava spojitá funkce, že

$$F(-\infty) = 0 \quad a \quad F(\infty) = \gamma(0).$$

Přitom $F(\lambda)$ je jediná.

DŮKAZ. Opět vyjdeme z pozitivně semidefinitní funkce $\gamma(t)$, tj. pro každé přirozené n , libovolná komplexní čísla

$$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$$

a libovolné body

$$t_1, \dots, t_n \in T \quad a \quad t_j - t_k \in T \quad j, k = 1, \dots, n$$

platí vztah

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma(t_j - t_k) c_j \bar{c}_k \geq 0. \quad (2.7)$$

Dosadíme-li do (2.7)

$$\begin{aligned} t_j &= \frac{j}{N}, & \text{kde } N \in \mathbb{N} \\ c_j &= e^{-i\lambda j}, & \text{kde } -\pi \leq \lambda \leq \pi, \end{aligned}$$

dostaneme, že funkce

$$\begin{aligned} f_n^N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma\left(\frac{j-k}{N}\right) e^{-i\lambda(j-k)} = \frac{1}{2\pi n} \sum_{s=-n+1}^{n-1} (n-|s|) \gamma\left(\frac{s}{N}\right) e^{-i\lambda s} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \gamma\left(\frac{s}{N}\right) e^{-i\lambda s} \end{aligned}$$

je pro každé $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$ nezáporná. Proto každá funkce

$$F_n^N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_n^N(x) dx$$

je neklesající a zřejmě

$$F_n^N(-\pi) = 0.$$

S využitím vztahu (2.5) platí

$$\begin{aligned} \boxed{F_n^N(\pi)} &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n^N(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \gamma\left(\frac{s}{N}\right) e^{-i\lambda s} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \gamma\left(\frac{s}{N}\right) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda s} d\lambda}_{=2\pi \text{ pro } s=0; =0 \text{ jinak}} = \boxed{\gamma(0)}. \end{aligned}$$

Podle 1. Hellyho věty lze z posloupnosti funkcí $F_1^N(\lambda), F_2^N(\lambda), \dots$ vybrat podposloupnost $\{F_{n_k}^N(\lambda)\}$, která konverguje k nějaké neklesající zprava spojitě funkci $F^N(\lambda)$, pro kterou platí

$$F^N(-\pi - 0) = 0 \quad \text{a} \quad F^N(\pi + 0) = F^N(\pi) = \gamma(0).$$

Položme

$$\gamma_N(t) = \int_{-N\pi}^{N\pi} e^{it\lambda} dF^N \left(\frac{\lambda}{N} \right). \quad (2.8)$$

Z 2. Hellyho věty plyne, že pro každé celé k platí

$$\begin{aligned} \gamma_N \left(\frac{k}{N} \right) &= \int_{-N\pi}^{N\pi} e^{i\frac{k}{N}\lambda} dF^N \left(\frac{\lambda}{N} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dF^N(x) \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} f_{n_j}^N(x) dx = \lim_{n_j \rightarrow \infty} \gamma \left(\frac{k}{N} \right) \left[1 - \frac{|k|}{n_j} \right] = \gamma \left(\frac{k}{N} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ke každému $t \in \mathbb{R}$ a každému přirozenému N existuje celé k (závislé na t a N) tak, že platí

$$0 \leq t - \frac{k}{N} < \frac{1}{N}. \quad (2.10)$$

Při této volbě platí

$$\frac{k}{N} \rightarrow t \quad \text{pro} \quad N \rightarrow \infty.$$

Ze spojitosti procesu $\{X_t, t \in T\}$ plyne spojitost funkce $\gamma(t)$. Proto s přihlédnutím k (2.9) máme

$$\gamma(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma \left(\frac{k}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_N \left(\frac{k}{N} \right). \quad (2.11)$$

Ze zřejmé rovnosti

$$\gamma_N(t) = \gamma_N \left(\frac{k}{N} \right) + \left[\gamma_N(t) - \gamma_N \left(\frac{k}{N} \right) \right]$$

plyne vzhledem k (2.10)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_N(t) = \gamma(t) + \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\gamma_N(t) - \gamma_N \left(\frac{k}{N} \right) \right] \quad (2.12)$$

Dosadíme-li z (2.8) a z první části (2.9), máme

$$\gamma_N(t) - \gamma_N \left(\frac{k}{N} \right) = \int_{-N\pi}^{N\pi} e^{i\frac{k}{N}\lambda} \left[e^{i(t-\frac{k}{N})\lambda} - 1 \right] dF^N \left(\frac{\lambda}{N} \right)$$

Nechť

$$\theta = t - \frac{k}{N}.$$

Z (2.10) plyne

$$0 \leq N\theta < 1.$$

Ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$\left| \gamma_N(t) - \gamma_N \left(\frac{k}{N} \right) \right|^2 \leq \underbrace{\int_{-N\pi}^{N\pi} \left| e^{i\frac{k}{N}\lambda} \right|^2 dF^N \left(\frac{\lambda}{N} \right)}_{=F^N(\pi)=\gamma(0)} \int_{-N\pi}^{N\pi} \left| e^{i(t-\frac{k}{N})\lambda} - 1 \right|^2 dF^N \left(\frac{\lambda}{N} \right)$$

První integrál na pravé straně je roven $\gamma(0)$. Protože

$$|e^{i\theta\lambda} - 1|^2 = (e^{i\theta\lambda} - 1)(e^{-i\theta\lambda} - 1) = 2 - 2\cos\theta\lambda,$$

máme

$$\begin{aligned} \left| \gamma_N(t) - \gamma_N\left(\frac{k}{N}\right) \right|^2 &\leq 2\gamma(0) \int_{-N\pi}^{N\pi} (1 - \cos\theta\lambda) dF^N\left(\frac{\lambda}{N}\right) \\ &= 2\gamma(0) \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos N\theta x) dF^N(x). \end{aligned}$$

Z nerovnosti

$$\cos b\alpha \geq \cos \alpha \quad \text{pro} \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq b < 1,$$

plyne

$$1 - \cos N\theta x \leq 1 - \cos x,$$

takže

$$\begin{aligned} \left| \gamma_N(t) - \gamma_N\left(\frac{k}{N}\right) \right|^2 &\leq 2\gamma(0) \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos N\theta x) dF^N(x) \\ &= 2\gamma(0) \left[\gamma(0) - \text{reálná část } \gamma\left(\frac{1}{N}\right) \right]. \end{aligned}$$

Vzhledem ke spojitosti $\gamma(t)$ a k tomu, že $\gamma(0)$ je nezáporné (a tudíž reálné) číslo, je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \gamma_N(t) - \gamma_N\left(\frac{k}{N}\right) \right| = 0.$$

Podle (2.12) tedy platí

$$\gamma(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_N(t). \tag{2.13}$$

□

Položme

$$F_N(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \lambda < -N\pi \\ F^N\left(\frac{\lambda}{N}\right) & \text{pro } -N\pi \leq \lambda \leq N\pi \\ \gamma(0) & \text{pro } \lambda > N\pi. \end{cases}$$

Je-li

$$\gamma(0) = 0,$$

je tvrzení věty zřejmé (stačí vzít $F(\lambda) \equiv 0$).

Nechť tedy

$$\gamma(0) > 0.$$

Pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat

$$\gamma(0) = 1,$$

neboť jinak bychom místo $\gamma(t)$ mohli vyšetřovat

$$\frac{\gamma(t)}{\gamma(0)}.$$

Vztah (2.8) můžeme napsat jako

$$\gamma_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_N(\lambda).$$

Jelikož $F_N(\lambda)$ má všechny vlastnosti distribuční funkce, je $\{\gamma_N(t)\}$ posloupnost charakteristických funkcí, která ve všech bodech t podle (2.13) konverguje ke spojitě funkci $\gamma(t)$. Podle známé věty o vztahu mezi charakteristickými a distribučními funkcemi je $\gamma(t)$ také charakteristická funkce, která odpovídá nějaké distribuční funkci $F(\lambda)$ takové, že $F_N \rightarrow F$ v podstatě. Tudíž

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda),$$

což je vztah, který bylo třeba dokázat. Jelikož F je distribuční funkce, platí

$$F(-\infty) = 0 \quad \text{a} \quad F(\infty) = 1 = \gamma(0).$$

Vzorci

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

resp.

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

se říká **spektrální rozklad kovarianční funkce**. Funkce $F(\lambda)$ se nazývá **spektrální distribuční funkce**.

Je-li $F(\lambda)$ absolutně spojitá, pak existuje taková funkce $f(\lambda)$, že pro náhodné stacionární posloupnosti, resp. pro stacionární náhodné procesy platí

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(x) dx \quad \text{resp.} \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(x) dx. \quad (2.14)$$

Jelikož $F(\lambda)$ je neklesající, je $f(\lambda)$ skoro všude nezáporná. Je-li třeba, pozměníme ji na množině míry nula tak, aby byla všude nezáporná. Tím se integrál (2.14) nezmění. Funkce $f(\lambda)$ se nazývá **spektrální hustota**. Existuje-li spektrální hustota, pak můžeme psát

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda \quad (2.15)$$

resp.

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda. \quad (2.16)$$

Všimněme si ještě, zda a jak se dá na základě nějaké jednoduché vlastnosti kovarianční funkce $\gamma(t)$ poznat, zda vůbec spektrální hustota existuje.

Věta 2.3.41.

K existenci spektrální hustoty stacionární náhodné posloupnosti stačí, aby pro její kovarianční funkci platilo

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |\gamma(t)| < \infty$$

K existenci spektrální hustoty spojitěho stacionární náhodného procesu stačí, aby pro její kovarianční funkci platilo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(t)| dt < \infty.$$

DŮKAZ. Viz Gichman, I.I., Skorochod, A.V.: Teorija slučajnych processov. Moskva. Nauka 1971. \square

V následujících dvou větách je zodpovězena otázka, jak vypočítat spektrální hustotu z kovarianční funkce.

Věta 2.3.42.

Existuje-li spektrální hustota $f(\lambda)$ stacionární posloupnosti a má-li variaci konečnou na $\langle -\pi, \pi \rangle$, pak platí

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \gamma(t) \quad (2.17)$$

ve všech bodech spojitosti funkce $f(\lambda)$, což je skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

DŮKAZ. Ze vzorce (2.15) vidíme, že až na normující konstantu $\frac{1}{2\pi}$ jsou $\gamma(t)$ Fourierovy koeficienty funkce $f(\lambda)$ vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí $\{e^{-it\lambda}\}$. Zbytek tvrzení plyne z faktu, že funkce s konečnou variací má nejvýše spočetně bodů nespojitosti. \square

Věta 2.3.43.

Existuje-li spektrální hustota $f(\lambda)$ spojitého stacionárního procesu a je-li autokovarianční funkce absolutně integrovatelná, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(t)| dt < \infty,$$

pak

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \gamma(t) dt. \quad (2.18)$$

DŮKAZ. Ze vzorce (2.16) vidíme, že až na normující konstantu $\frac{1}{2\pi}$ jsou je mezi $\gamma(t)$ a $f(\lambda)$ stejný vztah jako mezi charakteristickou funkcí a hustotou rozdělení. Proto lze přímo převzít vzorec pro výpočet hustoty z charakteristické funkce. \square

Věta 2.3.44.

Spektrální hustota $f(\lambda)$ reálného spojitého stacionárního procesu nebo reálné stacionární posloupnosti je sudá funkce v tom smyslu, že pro ni platí

$$f(\lambda) = f(-\lambda) \quad (2.19)$$

skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

DŮKAZ. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je spojitý stacionární proces. Jelikož je reálný, platí pro každé $t \in T$, že $\gamma(t) = \gamma(-t)$. Proto vzhledem k (2.16)

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} f(\lambda) d\lambda = \gamma(-t).$$

Substitucí se snadno zjistí, že pravá strana je rovna

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(-\lambda) d\lambda$$

takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(-\lambda) d\lambda. \quad (2.20)$$

Je-li $f(\lambda) = 0$ skoro všude, je tvrzení věty zřejmé. Předpokládejme tedy, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = C > 0.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme položit $C = 1$ (jinak stačí místo $f(\lambda)$ uvažovat $\frac{f(\lambda)}{C}$). Pak vztah (2.20) ukazuje, že charakteristické funkce příslušející hustotám $f(\lambda)$ a $f(-\lambda)$ jsou totožné. Vzhledem k vzájemně jednoznačnému vztahu mezi rozdělením pravděpodobnosti a charakteristickou funkcí odtud vyplývá tvrzení věty.

Pro stacionární posloupnosti je důkaz obdobný. □

2.3.5 Příklady

Mějme náhodný proces $Y_t = r \cos(t\omega_0 + \theta)$, kde

$r \in \mathbb{R} \dots$ amplituda, $\omega_0 \in [0, \pi] \dots$ frekvence

$\theta \sim R_s(-\pi, \pi) \dots$ náhodná fáze s hustotou $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Není těžké ukázat, že $EY_t = 0$ a autokovarianční funkce $\gamma(h) = C(Y_t, Y_{t+h}) = \frac{1}{2}r^2 \cos h\omega_0$, tedy rozptyl je roven $D(Y_t) = \frac{1}{2}r^2$.

Ekvivalentně lze psát $Y_t = U \cos t\omega_0 + V \sin t\omega_0$, kde

$U = r \cos \theta \quad V = -r \sin \theta$

náhodné amplitudy s vlastnostmi

$$EU = EV = 0, \quad C(U, V) = 0, \\ DU = DV = \frac{1}{2}r^2 = \sigma^2.$$

Zobecníme-li tento proces pro nějaké přirozené číslo k

$$Y_t = \sum_{j=1}^k r_j \cos(t\omega_j + \theta_j) = \sum_{j=1}^k U_j \cos t\omega_j + V_j \sin t\omega_j, \quad \text{kde}$$

$U_j = r_j \cos \theta_j \quad V_j = -r_j \sin \theta_j$ náhodné amplitudy s vlastnostmi

$$EU_j = EV_j = 0, \quad C(U_i, V_j) = 0, \\ DU_j = DV_j = \frac{1}{2}r_j^2 = \sigma_j^2.$$

pak dostaneme

$$EY_t = 0,$$

$$\gamma(h) = C(Y_t, Y_{t+h}) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2}r_j^2 \cos h\omega_j,$$

$$DY_t = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2}r_j^2 = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2.$$

Se zobecněním můžeme jít ještě dále a definovat (konvergují-li příslušné nekonečné řady)

$$Y_t = \sum_{j=1}^{\infty} r_j \cos(t\omega_j + \theta_j) = \sum_{j=1}^{\infty} U_j \cos t\omega_j + V_j \sin t\omega_j$$

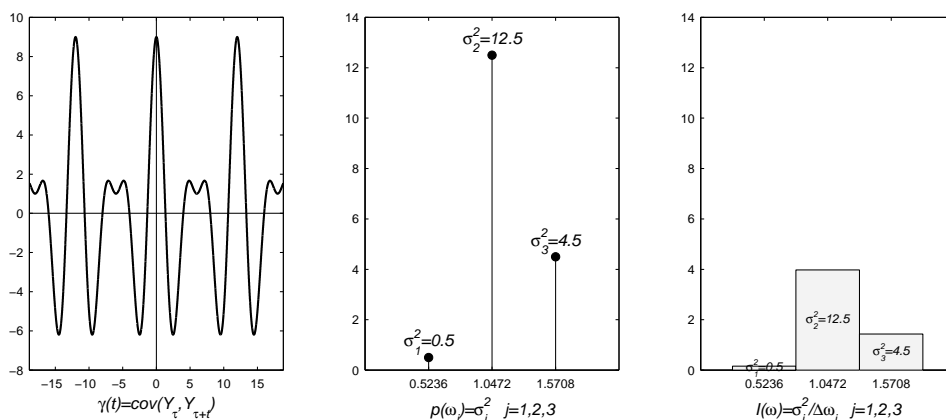
a bude platit

$$EY_t = 0,$$

$$\gamma(h) = C(Y_t, Y_{t+h}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}r_j^2 \cos h\omega_j,$$

$$DY_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}r_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2.$$

Example: $Y_t = 1\cos(\pi t/6 + \theta_1) + 5\cos(\pi t/3 + \theta_2) + 3\cos(\pi t/2 + \theta_3)$ $\theta_j \sim R_s(-\pi, \pi) \quad j=1,2,3$

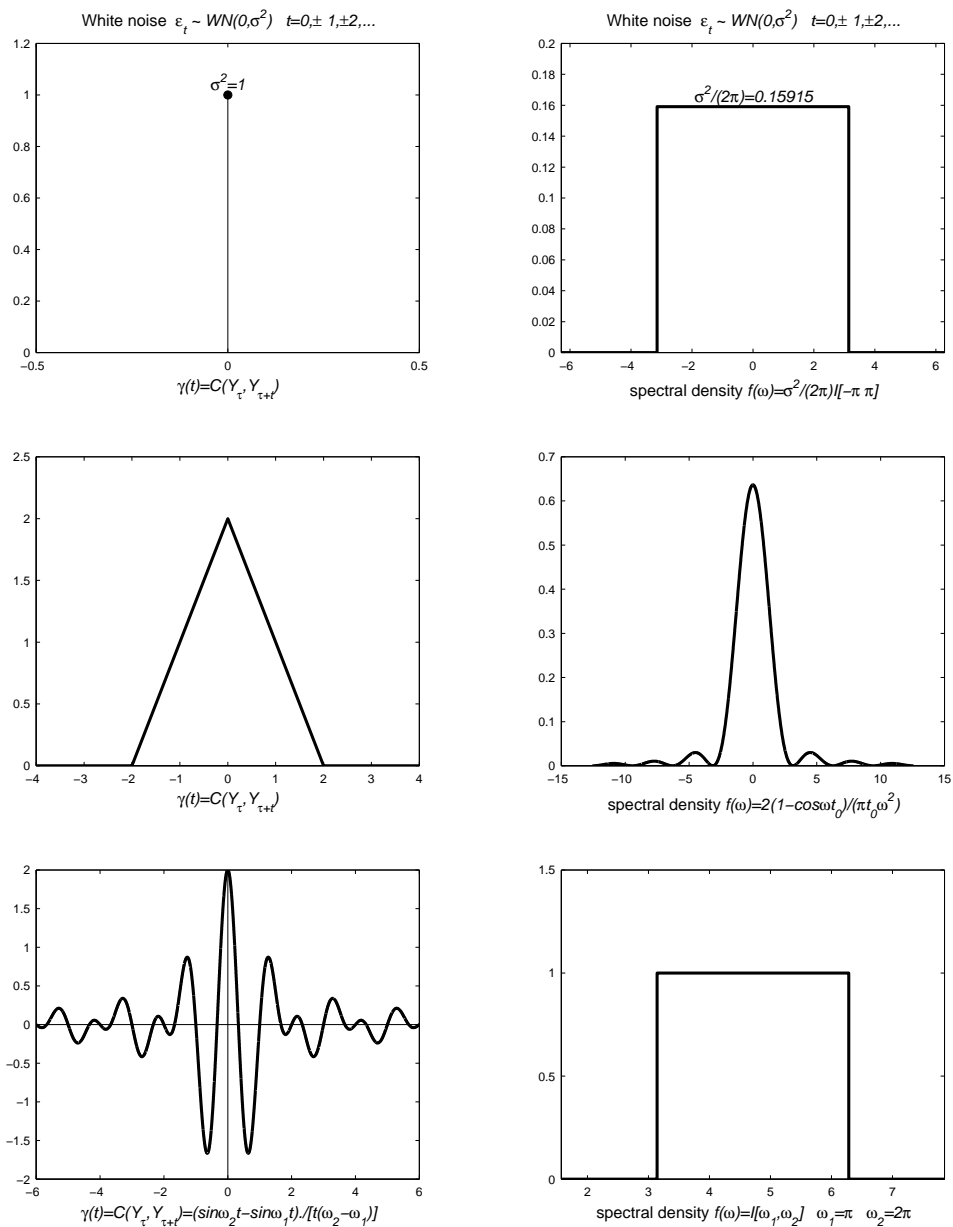


Obrázek 2.2: **Harmonický proces**: autokovarianční funkce a diskrétní spektrum definované vztahem $p(\omega_j) = F(\omega_j) - F(\omega_{j-1}) = \sigma_j^2$, $j = 1, 2, \dots$ vyjádřené pomocí čárkového a sloupcového grafu.

Na závěr tohoto odstavce ukážeme graf s několika příklady autokovariančních funkcí a jim

odpovídajících spektrálních hustot.

Autocovariance and spectral density



Obrázek 2.3: Příklady autokovarianční funkce a spektrální hustoty.

2.3.6 Hilbertovy prostory spjaté s procesy druhého řádu

Připomeňme si z funkcionální analýzy následující pojmy a vlastnosti:

UNITÁRNÍ PROSTORY. Komplexní lineární prostor \mathcal{H} se nazývá **unitární**, jestliže pro každé dva prvky x a y z \mathcal{H} existuje komplexní číslo $\langle x, y \rangle$, nazývané **skalární** či **vnitřní součin**, tak že pro každé $x, y, z \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

- (a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- (c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
- (d) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- (e) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

NORMA. V unitárním prostoru \mathcal{H} definujeme **normu** vztahem $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

CAUCHY-SCHWARZOVA NEROVNOST. V unitárním prostoru platí

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{a} \quad |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y.$$

ORTOGONALITA. Řekneme, že x a y z unitárního prostoru \mathcal{H} jsou **ortogonální**, pokud platí $\langle x, y \rangle = 0$ a značíme $x \perp y$.

ORTOGONÁLNÍ A ORTONORMÁLNÍ MNOŽINY. Řekneme, že množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je **ortogonální**, jestliže pro každé různé prvky $x, y \in \mathcal{M}$ platí $x \perp y$. Jestliže navíc pro $\forall x \in \mathcal{M}$ platí $\|x\| = 1$, pak množina \mathcal{M} se nazývá **ortonormální**.

Poznámka: Je-li \mathcal{M} ortogonální množina, pak množina $\{\frac{x}{\|x\|} : x \in \mathcal{M}\}$ je ortonormální.

VLASTNOSTI NORMY. Mějme unitární prostor \mathcal{H} s normou definovanou vztahem $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Pak pro každé $x, y \in \mathcal{H}$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

- (a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$;
- (b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (tzv. trojúhelníková nerovnost);
- (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- (d) $\|x\| \geq 0$;
- (e) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (f) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (tzv. rovnoběžníková rovnost);

KONVERGENCE PODLE NORMY. Řekneme že posloupnost prvků $\{x_n\}$ z unitárního prostoru \mathcal{H} **konverguje podle normy** k $x \in \mathcal{H}$, jestliže $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$.

SPOJITOST SKALÁRNÍHO SOUČINU. Jestliže $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou prvky z unitárního prostoru \mathcal{H} takové, že $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ a $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, pak platí

- (a) $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ a
- (b) $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ pro $n \rightarrow \infty$.

CAUCHYOVSKÁ POSLOUPNOST. Řekneme, že posloupnost prvků $\{x_n\}$ z unitárního prostoru \mathcal{H} je **cauchyovská**, pokud $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ pro $n, m \rightarrow \infty$.

HILBERTOVY PROSTORY. Hilbertův prostor je **úplný unitární prostor**, tj. takový, ve kterém každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ konverguje podle normy k nějakému prvku $x \in \mathcal{H}$, tj. $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

UZAVŘENÝ PODPROSTOR. Řekneme, že lineární podprostor \mathcal{M} Hilbertova prostoru \mathcal{H} je **uzavřeným podprostorem** \mathcal{H} , jestliže \mathcal{M} obsahuje všechny limitní body, tj. jestliže platí, že $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, pak $x \in \mathcal{M}$.

ORTOGONÁLNÍ KOMPLEMENT. Ortogonální komplement množiny \mathcal{M} je množina \mathcal{M}^\perp všech prvků \mathcal{H} , které jsou ortogonální ke každému prvku z \mathcal{M} . Tedy $\mathcal{M}^\perp = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \text{ tj. } x \perp y, x \in \mathcal{M}\}$.

PROJEKČNÍ VĚTA. Jestliže \mathcal{M} je **uzavřený podprostor Hilbertova prostoru** a $x \in \mathcal{H}$, pak

- (a) existuje jediný prvek $\hat{x} \in \mathcal{M}$, takový, že $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$
- (b) $\hat{x} \in \mathcal{M}$ a $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\| \Leftrightarrow \hat{x} \in \mathcal{M}$ a $(x - \hat{x}) \in \mathcal{M}^\perp$.

Prvek \hat{x} se nazývá **ortogonální projekcí** prvku x z \mathcal{H} do \mathcal{M} a značíme $\hat{x} = P_{\mathcal{M}}(x)$ a zobrazení $P_{\mathcal{M}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$ se nazývá **projekcí \mathcal{H} do \mathcal{M}** .

VLASTNOSTI PROJEKCE. Nechť \mathcal{H} je Hilbertův prostor a $P_{\mathcal{M}}$ je projekcí \mathcal{H} do \mathcal{M} . Pak pro každé $x, y, x_n \in \mathcal{H}$ a pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí

- (a) Každý prvek $x \in \mathcal{H}$ má jedinou reprezentaci jako součet prvku z \mathcal{M} a prvku z \mathcal{M}^\perp , tj. $x = P_{\mathcal{M}}(x) + (I - P_{\mathcal{M}})(x)$, kde I značí identické zobrazení
- (b) $P_{\mathcal{M}}(\alpha x + \beta y) = \alpha P_{\mathcal{M}}(x) + \beta P_{\mathcal{M}}(y)$
- (c) $\|x\|^2 = \|P_{\mathcal{M}}(x)\|^2 + \|(I - P_{\mathcal{M}})(x)\|^2$
- (d) $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow P_{\mathcal{M}}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_{\mathcal{M}}(x)$
- (e) $x \in \mathcal{M} \Leftrightarrow P_{\mathcal{M}}(x) = x$
- (f) $x \in \mathcal{M}^\perp \Leftrightarrow P_{\mathcal{M}}(x) = 0$
- (g) jestliže \mathcal{M}_1 a \mathcal{M}_2 jsou dva podprostory \mathcal{H} takové, že $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$, pak $P_{\mathcal{M}_1}(P_{\mathcal{M}_2}(x)) = P_{\mathcal{M}_1}(x)$

UZÁVĚR. Nechť \mathcal{M} je podprostor Hilbertova prostoru \mathcal{H} . **Uzávěrem** $\overline{\mathcal{M}}$ (také budeme značit $\overline{sp}(\mathcal{M})$, anglicky „closed span“) množiny \mathcal{M} nazveme nejmenší uzavřenou množinu obsahující \mathcal{M} .

Poznámka: Platí $\overline{\mathcal{M}} = \overline{sp}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{H} : \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, x_n \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\}$, kde $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ je množina všech lineárních kombinací prvků množiny \mathcal{H} , tzv. **lineární obal množiny \mathcal{H}** .

PROJEKCE NA KONEČNÉ ORTONORMÁLNÍ MNOŽINĚ. Jestliže $\{e_1, \dots, e_n\}$ je **ortonormální** podmnožina Hilbertova prostoru \mathcal{H} a $\mathcal{M} = \overline{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$, pak pro každé $x \in \mathcal{H}$ platí

- (a) $P_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$
- (b) $\|P_{\mathcal{M}}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$

- (c) $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|^2$ pro $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{C}$
 (d) $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|^2 \Leftrightarrow \alpha_i = \langle x, e_i \rangle \quad i = 1, \dots, n$
 (e) $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (tzv. Besselova nerovnost)

Poznámka: koeficienty $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ se nazývají **Fourierovy koeficienty** vzhledem k množině $\{e_1, \dots, e_n\}$.

SEPARABILITA. Hilbertův prostor \mathcal{H} nazveme **separabilním**, právě když $\mathcal{H} = \overline{\text{sp}}\{e_t, t \in T\}$, kde T je spočetná indexová množina.

ORTONORMÁLNÍ REPREZENTACE V SEPARABILNÍM HILBERTOVĚ PROSTORU.

Nechť $\mathcal{H} = \overline{\text{sp}}\{e_1, e_2, \dots\}$ je separabilní Hilbertův prostor, kde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ je **ortonormální** množina. Pak pro každé $x, y \in \mathcal{H}$ platí

- (a) Množina všech konečných lineárních kombinací $\{e_1, \dots, e_n\}$ je **hustá**, tj. pro $\forall x \in \mathcal{H}$ a $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$ a $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{C}$, že platí $\|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\| < \varepsilon$
 (b) $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ pro $\forall x \in \mathcal{H}$, tj. $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 (c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (tzv. Parsevalova identita)
 (d) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$
 (e) $x = 0 \Leftrightarrow \langle x, e_i \rangle = 0 \quad i = 1, 2, \dots$

Zavedme následující **prostory náhodných veličin**:

- Označme $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ množinu všech **reálných**, resp. **komplexních** náhodných veličin definovaných nad týmž pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{A}, P) , které mají konečné druhé momenty, tj. platí $EX^2 < \infty$, resp. $E|X|^2 < \infty$.

Do tohoto prostoru zahrnujeme také všechny konstanty z \mathbb{R} , resp. z \mathbb{C} , které považujeme za náhodné veličiny s nulovým rozptylem.

V tomto prostoru vytvoříme **třídy ekvivalentních náhodných veličin** takto: řekneme, že dvě náhodné veličiny jsou ekvivalentní, pokud se liší jen na množině míry nula. Zřejmě X a Y jsou ekvivalentní právě tehdy, platí-li

$$E|X - Y|^2 = 0.$$

V takto definovaném prostoru tříd ekvivalentních náhodných veličin definujeme pro každé $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $X, Y \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **skalární součin** předpisem

$$\langle X, Y \rangle = E(XY) \quad \text{resp.} \quad \langle X, Y \rangle = E(X\bar{Y})$$

a odpovídající normu

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{EX^2} \quad \text{resp.} \quad \|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{E(X\bar{X})} = \sqrt{E|X|^2}.$$

Přechod ke třídám je nutný proto, abychom zaručili platnost požadavku

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Věta 2.3.45.

Prostory $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jsou Hilbertovy prostory.

DŮKAZ. Viz Brockwell, P.J. a Davis, R.A.: *Theory and methods*, 2-nd ed., Springer-Verlag, New York, 1991, §2.10. \square

Již dříve jsme definovali pojem **spojitosti podle středu v bodě** $t_0 \in T$ takto

$$E|X_t - X_{t_0}|^2 \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad t \rightarrow t_0.$$

což jsme značili

$$X_{t_0} = \text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} X_t$$

(zkratka z anglického "limit in the mean") a je-li proces $\{X_t, t \in T\}$ spojitý v každém bodě množiny T , říkáme stručně, že je **spojitý**.

Tutéž spojitost můžeme definovat i pomocí výše uvedené normy takto

$$\|X_t - X_{t_0}\|^2 = E|X_t - X_{t_0}|^2 \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad t \rightarrow t_0$$

a pro každý uzavřený podprostor $\mathcal{M} \subseteq L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ díky projekční větě můžeme definovat nejlepší střední kvadratickou predikci prvku $Y \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pomocí \mathcal{M} .

Definice 2.3.46.

Jestliže \mathcal{M} je **uzavřený** podprostor \mathcal{H} , kde $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pak **nejlepší střední kvadratická predikce** $Y \in \mathcal{H}$ v \mathcal{M} je prvek $\hat{Y} \in \mathcal{M}$ takový, že

$$\|Y - \hat{Y}\|^2 = \inf_{Z \in \mathcal{M}} \|Y - Z\|^2 = \inf_{Z \in \mathcal{M}} E|Y - Z|^2 \quad \text{tj.} \quad \hat{Y} = P_{\mathcal{M}}(Y).$$

Nyní definujeme

Definice 2.3.47.

Jestliže \mathcal{M} je **uzavřený** podprostor \mathcal{H} , kde $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a $X \in \mathcal{H}$, pak definujeme **podmíněnou střední hodnotu při dané** \mathcal{M} předpisem

$$E_{\mathcal{M}}X = E(X|Y \in \mathcal{M}) = P_{\mathcal{M}}(X).$$

Dále definujeme

Definice 2.3.48.

Nechť $X, Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{H}$, kde $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak **podmíněná střední hodnota** X při daném náhodném vektoru $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)'$ je dána vztahem

$$E(X|\mathbf{Z}) = E_{\mathcal{M}(\mathbf{Z})}X = E(X|Y \in \mathcal{M}(\mathbf{Z})),$$

kde $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ je uzavřený podprostor všech náhodných veličin $\phi(\mathbf{Z})$ z \mathcal{H} , které jsou borelovskou funkcí náhodného vektoru \mathbf{Z} , tj. $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, resp. $\phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Výpočet podmíněných středních hodnot bývá však velmi obtížný. Z těchto důvodů se omežeme většinou na jednodušší podprostor, a to

$$\mathcal{M} = \overline{\text{sp}}\{1, Z_1, \dots, Z_n\} = \overline{\{1, Z_1, \dots, Z_n\}}.$$

Připomeňme vlastnost predikce $\hat{x} \in \mathcal{M}$ prvku $x \in \mathcal{H}$. Platí

$$\hat{x} = P_{\mathcal{M}}(x) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \hat{x} \in \mathcal{M} \wedge (x - \hat{x}) \in \mathcal{M}^{\perp}$$

tj. pro každé $y \in \mathcal{M}$ platí

$$\langle x - \hat{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle \hat{x}, y \rangle = 0$$

a odtud dostaneme tzv. **projekční rovnice**

$$\boxed{\langle \hat{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle.}$$

Dále již uvažujme Hilbertův prostor

$$\boxed{\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)}$$

a jeho podprostor

$$\mathcal{M} = \overline{\text{sp}}\{1, Z_1, \dots, Z_n\} = \overline{\{1, Z_1, \dots, Z_n\}},$$

kde $Z_1, \dots, Z_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pak projekce je dána vztahem

$$\hat{X} = P_{\mathcal{M}}(X) = E_{\mathcal{M}}X = \arg \inf_{Y \in \mathcal{M}} \|X - Y\|^2 = \arg \inf_{Y \in \mathcal{M}} E(X - Y)^2$$

a projekční rovnice jsou tvaru

$$\boxed{E(Y \cdot E_{\mathcal{M}}X) = E(Y \cdot X).}$$

Pro každý prvek z \mathcal{M} (tedy i pro $1, Z_1, \dots, Z_n$) platí tyto rovnice, tj. pro $Y = 1$ máme

$$\begin{aligned} E(1 \cdot E_{\mathcal{M}}X) &= E(1 \cdot X) \\ E\left(1 \cdot \sum_{i=0}^n \alpha_i Z_i\right) &= EX \\ \sum_{i=0}^n \alpha_i E Z_i &= EX \end{aligned}$$

a pro $Y = Z_j, j = 1, \dots, n$ dostaneme

$$\begin{aligned} E(Z_j \cdot E_{\mathcal{M}}X) &= E(Z_j \cdot X) \\ E\left(Z_j \cdot \sum_{i=0}^n \alpha_i Z_i\right) &= E(Z_j X) \\ \sum_{i=0}^n \alpha_i E(Z_i Z_j) &= E(Z_j X) \end{aligned}$$

Celkem dostáváme systém $n + 1$ rovnic.

Definujme proto nyní nejlepší lineární predikci pomocí obecnějších systémů náhodných veličin druhého řádu $\{Z_t, t \in T\}$.

Definice 2.3.49.

Nechť $X \in \mathcal{H}$ a pro každé $t \in T$ také $Z_t \in \mathcal{H}$, kde T je indexová množina, $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resp. $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pak **nejlepší lineární predikci** náhodné veličiny X pomocí $\{Z_t, t \in T\}$ rozumíme

$$\boxed{P_{\overline{\text{sp}}\{Z_t, t \in T\}}(X)}.$$

Vidíme, že při hledání nejlepší lineární predikce vystačíme se znalostí kovarianční funkce a není třeba znát ani momenty vyšších řádů.

PREDIKCE U NORMÁLNĚ ROZDĚLENÝCH NÁHODNÝCH VELIČIN.

Je-li sdružené rozdělení náhodných veličin X, Z_1, \dots, Z_n **normální**, tj.

$$\boxed{(X, Z_1, \dots, Z_n)' \sim N_{n+1}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})},$$

kde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_{Z_1} \\ \mu_{Z_2} \\ \vdots \\ \mu_{Z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_{XZ_1}} & \frac{\sigma_{XZ_1}}{\sigma_{Z_1}^2} & \cdots & \cdots & \frac{\sigma_{XZ_n}}{\sigma_{Z_n}^2} \\ \sigma_{XZ_1} & \sigma_{Z_1}^2 & \sigma_{Z_1Z_2} & \cdots & \sigma_{Z_1Z_n} \\ \sigma_{XZ_2} & \sigma_{Z_1Z_2} & \sigma_{Z_2}^2 & \cdots & \sigma_{Z_2Z_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{XZ_n} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{Z_n}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \boldsymbol{\Sigma}'_{X\mathbf{Z}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{X\mathbf{Z}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} \end{pmatrix}$$

Pak rozdělení náhodné veličiny X při daném \mathbf{Z} má opět normální rozdělení

$$\boxed{X|\mathbf{Z} \sim N(\mu_{X|\mathbf{Z}}, \sigma_{X|\mathbf{Z}}^2)},$$

kde

$$\mu_{X|\mathbf{Z}} = \mu_X + \boldsymbol{\Sigma}'_{X\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Z}})$$

a

$$\sigma_{X|\mathbf{Z}}^2 = \sigma_X^2 + \boldsymbol{\Sigma}'_{X\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}\mathbf{X}}$$

Odtud vidíme, že podmíněná střední hodnota je lineární funkcí náhodného vektoru

$$\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)'$$

To znamená, že v tomto případě je **nejlepší lineární predikce totožná s optimální predikcí** (ve smyslu minimální střední kvadratické odchylky) založenou na podmíněných středních hodnotách.

2.4 Odhady středních hodnot a autokovariancí

Stochastický proces je matematickým modelem reálného děje náhodného charakteru, který probíhá nepřetržitě v čase. Můžeme jej však pozorovat jen v konečných časových intervalech a na základě těchto pozorování určit odhady hodnot charakteristik tohoto procesu - střední hodnoty, rozptylu, kovarianční funkce, atd.

Jestliže máme k dispozici dostatečný počet pozorování realizací náhodného procesu, můžeme

1. Přibližně určit charakteristiky každé realizace náhodného procesu.
2. Přibližné celkové charakteristiky lze získat zprůměrováním předchozích.

Tato metoda zpracování je však poměrně složitá a vzniká otázka, či by nebylo možné pro **stacionární** náhodný proces zaměnit tento složitý přístup za mnohem jednodušší, který se zakládá na předpokladu, že střední hodnota nezávisí na čase a korelační funkce na začátku výpočtu. Kromě toho vzniká otázka, zda při zpracování pozorování stacionárního náhodného procesu je třeba disponovat několika jejich realizacemi. Protože náhodný proces je stacionární a homogenní v čase, je přirozené předpokládat, že jedna jediná realizace s dostatečnou délkou je postačujícím materiálem na získání charakteristik náhodného procesu. Při podrobnějším zkoumání této otázky se ukázalo, že existuje takováto možnost, ale ne pro všechny stacionární náhodné procesy.

Tedy jestliže **jediná realizace** náhodného procesu pozorovaná v dostatečně dlouhém čase může být považovaná za určitého reprezentanta všech možných realizací, říkáme, že takovéto stacionární stochastické procesy **mají ergodickou vlastnost**.

Jestliže určitý náhodný proces nemá tuto vlastnost ergodičnosti, i když je stacionární, potom jeho různé realizace, které se vyskytují s určitými pravděpodobnostmi, mají různý charakter průběhů. V tomto duchu, jako by šlo o realizace různých jednodušších stacionárních procesů, které mají svoje individuální charakteristiky.

V některých případech na neergodičnost stacionárního procesu může působit už jen výskyt jediného náhodného sčítance (tj. náhodné proměnné nezávislé na čase).

PŘÍKLAD 2.4.1.

Nechť

$$\boxed{\{Y(t) = X(t) + Z, t \in \mathbb{R}\}}$$

je náhodný proces, kde $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ je ergodický stacionární proces definovaný na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) a Z náhodná veličina definovaná na témže pravděpodobnostním prostoru se střední hodnotou μ_Z , rozptylem σ_Z^2 a pro niž pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$C(X(t), Z) = 0.$$

Potom

$$\begin{aligned} \mu_Y(t) &= \mu_X + \mu_Z \\ \gamma_Y(t) &= C(Y(s), Y(s+t)) = C(X(s) + Z, X(s+t) + Z) = \\ &= \underbrace{C(X(s), X(s+t))}_{\gamma_X(t)} + \underbrace{C(X(s+t), Z)}_{=0} + \underbrace{C(Z, X(s+t))}_{=0} + \underbrace{C(Z, Z)}_{\sigma_Z^2} \\ &= \gamma_X(t) + \sigma_Z^2. \end{aligned}$$

Tedy náhodný proces $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ je stacionární proces, ale nemůžeme ho považovat za ergodický, neboť se dá očekávat, že každá jeho realizace se bude charakterem svého průběhu lišit od jiných - v závislosti od toho jakou hodnotu při dané realizaci nabyla náhodná veličina Z .

Kovarianční funkce stacionárního procesu $Y(t), t \in \mathbb{R}$ se od kovarianční funkce stacionárního ergodického procesu $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ liší o kladnou složku σ_Z^2 . Takže pro $t \rightarrow \infty$ se hodnoty $\gamma_Y(t)$ nezmenšují k nule, ale od určitého času t_m zůstávají konstantní ($= \sigma_Z^2$).

Nyní budeme definovat ergodičnost stacionárních procesů přesněji matematicky v souvislosti s konstrukcí odhadů některých charakteristik stacionárních procesů.

2.4.1 Odhady střední hodnoty

Nechť $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ je stochastický proces 2. řádu, který pozorujeme v časovém intervalu $[0, T]$. Nechť jeho konstantní střední hodnota μ je neznámá a je třeba ji odhadnout.

Definice 2.4.2.

Odhad střední hodnoty $\hat{\mu}$ stacionárního náhodného procesu $\{Y(t), t \in [0, T]\}$ pomocí metody nejmenších čtverců (MNC) je definován vztahem:

$$\int_0^T (Y(t) - \hat{\mu})^2 dt = \min_{\mu} \int_0^T (Y(t) - \mu)^2 dt.$$

POZNÁMKA 2.4.3.

Stále budeme předpokládat, že integrály vystupující v jednotlivých vztazích existují a dají se v nich zaměnit pořadí integrování a střední hodnoty E .

Snadno lze odvodit, že odhad střední hodnoty pomocí MNC je roven

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt \quad (2.21)$$

neboť

$$\square = \frac{d}{d\mu} \int_0^T (Y(t)^2 - 2\mu Y(t) + \mu^2) dt = -2 \int_0^T Y(t) dt + 2\mu \underbrace{\int_0^T dt}_{=T} = \boxed{2T\mu - 2 \int_0^T Y(t) dt}.$$

Věta 2.4.4.

*Odhad střední hodnoty pomocí metody nejmenších čtverců je **nestranný** a jeho **střední kvadratická chyba** je rovna*

$$MSE(\hat{\mu}) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) \gamma_Y(u) du. \quad (2.22)$$

DŮKAZ. Nestrannost:

$$E\hat{\mu} = E\left(\frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt\right) = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{EY(t)}_{=\mu(\text{stac.})} dt = \mu \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T dt}_{=T} = \mu.$$

Střední kvadratická chyba v případě nestranného odhadu je rozptylem tohoto odhadu

$$MSE(\hat{\mu}) = E [(\hat{\mu} - \mu)^2] = E [(\hat{\mu} - E\hat{\mu})^2] = D(\hat{\mu}).$$

Počítejme

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\mu}) &= E [(\hat{\mu} - \mu)^2] = E \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt - \mu \right]^2 \right\} = E \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_0^T (Y(t) - \mu) dt \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{T^2} E \left\{ \int_0^T \int_0^T (Y(s) - \mu)(Y(t) - \mu) ds dt \right\} \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \underbrace{E[(Y(s) - \mu)(Y(t) - \mu)]}_{\gamma_Y(t-s)(\text{stac.})} ds dt = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \gamma_Y(t-s) ds dt \end{aligned}$$

Uvažujme transformaci

$$\begin{aligned} u &= t - s \\ v &= t \end{aligned}$$

s Jakobiánem $|J| = 1$. Protože $s, t \in [0, T]$, pak platí

$$\begin{aligned} -T &\leq u \leq T \\ 0 &\leq v = t \leq T \end{aligned}$$

a tudíž

$$u \leq v = s + u \leq T = u,$$

tedy

$$\max\{0, u\} \leq v \leq \min\{T, T + u\}.$$

Tak dostaneme

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\mu}) &= \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \left(\int_{\max\{0, u\}}^{\min\{T, T+u\}} \gamma_Y(u) dv \right) du \\ &= \frac{1}{T^2} \left[\int_{-T}^0 \left(\gamma_Y(u) \int_0^{T+u} dv \right) du + \int_0^T \left(\gamma_Y(u) \int_u^T dv \right) du \right] \\ &= \frac{1}{T^2} \left[\int_{-T}^0 \gamma_Y(u)(T+u) du + \int_0^T \gamma_Y(u)(T-u) du \right] \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \gamma_Y(u)(T-|u|) du = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-u)\gamma_Y(u) du \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) \gamma_Y(u) du = D(\hat{\mu}) = D \left[\frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt \right], \quad \square \end{aligned}$$

Pro další studium ergodických procesů je vhodné vyslovit následující definici:

Definice 2.4.5.

Řekneme, že stacionární proces $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 2. řádu je **ergodický ve střední hodnotě**, pokud platí

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D \left[\frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt \right] = 0. \quad (2.23)$$

Věta 2.4.6.

Nechť pro stacionární proces $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 2. řádu s kovarianční funkcí $\gamma_Y(t)$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) |\gamma_Y(u)| du = 0.$$

Potom je náhodný proces $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ ergodický ve střední hodnotě.

DŮKAZ. Tvrzení věty plyne ze vztahů (2.22), (2.23) a nerovnosti

$$\left| \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) \gamma_Y(u) du \right| \leq \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) |\gamma_Y(u)| du.$$

Důsledek 2.4.7.

Nechť $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_Y(t) = 0$. Pak stacionární proces s kovarianční funkcí $\gamma_Y(t)$ je ergodický ve střední hodnotě.

DŮKAZ. Jestliže

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_Y(t) = 0,$$

pak také

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma_Y(t)| = 0.$$

Pak pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ existují dostatečně velká $T, T_0 \in \mathbb{R}$ ($T_0 < T$) taková, že pro každé $t > T_0$, platí

$$|\gamma_Y(t)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} D \left[\frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt \right] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) \gamma_Y(u) du \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) |\gamma_Y(u)| du \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T |\gamma_Y(u)| du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left[\int_0^{T_0} \underbrace{|\gamma_Y(u)|}_{\leq \gamma_Y(0)} du + \int_{T_0}^T \underbrace{|\gamma_Y(u)|}_{< \varepsilon} du \right] \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \left[\frac{T_0}{T} \gamma_Y(0) + \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \varepsilon \right] = \boxed{0} \quad \text{ergodicita ve střední hodnotě. } \square \end{aligned}$$

Poznamenejme, že jestliže platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_Y(t) = 0,$$

pak také pro autokorelační funkci platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_Y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_Y(t)}{\gamma_Y(0)} = 0,$$

což znamená, že **síla lineárních vazeb** mezi jednotlivými náhodnými veličinami, které tvoří daný stacionární proces $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$, jakmile se tyto od sebe neustále **vzdalují, postupně slábnou**, tj. jejich korelační koeficient $\rightarrow 0$.

DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ PROCESY

Při pozorování stacionárních procesů $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ druhého řádu se spojitým časem nejčastěji pozorujeme jen určitou jejich konečnou diskretní část, tj. pro $n \in \mathbb{N}$ v diskretních časových okamžicích $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ pozorujeme jen náhodný vektor

$$\mathbf{Y} = (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})' = (Y_1, \dots, Y_n)',$$

který nazýváme **diskretním pozorováním náhodného procesu** $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ (anebo diskretizací náhodného procesu $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ se spojitým časem), kde jsme položili

$$t_i = i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak lze snadno ukázat, že obdobným diskretním ekvivalentem **odhadu střední hodnoty** je odhad

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \underbrace{Y_{t_i} \cdot \frac{T}{n}}_{\approx \int_{t_i - \Delta t/2}^{t_i + \Delta t/2} Y(t) dt} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t \quad \text{kde } \Delta t = \frac{T}{n}.$$

2.4.2 Odhady autokovarianční a autokorelační funkce

Odhad kovarianční funkce lze analogicky jako v případě střední hodnoty nalézt ve tvaru

$$\hat{\gamma}_Y(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [(Y(t) - \hat{\mu})(Y(t + \tau) - \hat{\mu})] dt.$$

Podobně jak jsme výše definovali ergodičnost ve střední hodnotě pro stacionární proces $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$, můžeme definovat i jeho **ergodičnost v rozptylu**, pokud platí

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D \left[\frac{1}{T} \int_0^T (Y(t) - \mu)^2 dt \right] = 0$$

a jeho **ergodičnost v kovarianční funkci**, jestliže platí

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D \left[\frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} (Y(\tau + t) - \mu)(Y(t) - \mu) dt \right] = 0.$$

Snadno lze ukázat, že obdobnými diskretními ekvivalenty jsou následující odhady

Odhad autokovarianční funkce

$$c_k = \frac{1}{n - k} \sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})$$

pro $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Odhad autokorelační funkce ACF

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}$$

pro $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Aby tyto odhady měly praktický význam, požaduje se obvykle $n > 50$ a $k < \frac{n}{4}$, neboť odhady $\{c_k\}_{k=0}^{n-1}$, resp. $\{r_k\}_{k=0}^{n-1}$, nejsou lineárně nezávislé a s rostoucím k roste i jejich rozptyl.

Kapitola 3

Analýza časových řad

V dalších budeme u náhodného procesu $\{X_t, t \in T\}$ indexovou množinu T interpretovat jako čas a pokud $T = \mathbb{Z}$, budeme tento proces nazývat **časovou řadou**.

3.1 Základní přístupy k analýze časových řad

V analýze časových řad se setkáváme s následujícími základními přístupy:

1. V **časové doméně**:
 - a) klasická dekompozice časových řad je založena na regresní analýze;
 - b) neoklasická dekompozice časových řad, tzv. *Box-Jenkinsonova* metodologie, je založena na korelační analýze;
2. Ve **spektrální doméně**: je spektrální analýza časových řad založena na Fourierově analýze.

3.1.1 Klasická dekompozice

Klasická dekompozice časových řad vychází z předpokladu, že náhodný proces, který generuje časovou řadu, je závislý pouze na čase. Snaží se pak časovou řadu rozdělit na

- **deterministikou** a
- **náhodnou složku**.

Deterministickou složku dále rozkládá na *trend* a *sezónní složku*.

Jednotlivé složky

- Tr_t **trend** odráží dlouhodobé změny v chování časových řad;
- Sz_t **sezónní složka** popisuje periodické změny (kratšího rázu) např. vliv střídání ročních období;
- ε_t **náhodné fluktuace** modelují drobné a v jednotlivostech nepostizitelné příčiny kolísání časových řad.

Při klasické dekompozici časových řad se používají především

- **aditivní modely:** $Y_t = Tr_t + Sz_t + \varepsilon_t$
- **multipikativní modely** $Y_t = Tr_t \cdot Sz_t \cdot \varepsilon_t$, které se transformují logaritmováním na aditivní modely.

Klíčovým nástrojem klasické dekompozice časových řad je regresní analýza, kde jednotlivá pozorování se obvykle berou jako navzájem nekorelovaná, tj. $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se chápe jako bílý šum.

3.1.2 Box-Jenkinsonova metodologie

Box-Jenkinsonova metodologie na rozdíl od klasické dekompozice předpokládá, že všechny složky časové řady, tj. trend i cyklická složka, mají náhodný charakter. Těžištěm je pak korelační analýza a cílem je vyšetřit vzájemnou závislost jednotlivých prvků řady s různým zpožděním a závislost na různě zpožděném (náhodném) vstupu.

3.1.3 Spektrální analýza časových řad

Spektrální analýza časových řad (Fourierovská analýza) považuje časovou řadu za "směs" sinusovek a kosinovek o rozličných amplitudách a frekvencích.

Tato koncepce pak umožní provést explicitní popis periodického chování časové řady a především vystopovat ty významné složky periodicity, které se podílejí na věcných vlastnostech zkoumaného procesu. V této koncepci není stěžejním faktorem časová proměnná, ale právě faktor frekvenční.

Spektrální analýza je také vhodná při srovnávání chování několika řad, neboť umožňuje nalézt případné časové zpoždění mezi dvěma řadami, ale také dovolí porovnat řady v rámci jednotlivých frekvencí.

3.2 Lineární dynamické modely

V praxi se často setkáváme s tím, že hodnoty určité časové řady evidentně nejsou jen funkcí času, či předchozích pozorování, ale jsou vysvětlovány pomocí dalších časových řad, kterým říkáme **faktorové časové řady** a mluvíme o tzv. *příčinných (kauzálních, faktorových)* modelech. Modely se konstruují na základě teoretických předpokladů.

Při jejich studiu se používají

- odhadovací metody, které jsou většinou modifikacemi základní metody nejmenších čtverců a lineární regrese;
- Box-Jenkinsonovy modely, v nichž kromě popisované řady a bílého šumu vystupují další vysvětlující časové řady.

Příklad: $C_t = \alpha + \beta C_{t-1} + \gamma X_t + \delta P_t + \varepsilon_t$

kde

$\{C_t, t \in \mathbb{Z}\}$	časová řada výdajů obyvatelstva na nákup
$\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$	časová řada disponibilních peněžních příjmů
$\{P_t, t \in \mathbb{Z}\}$	časová řada cenový index spotřebního zboží
$\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$	bílý šum
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	neznámé parametry

3.3 Klasická dekompozice časových řad

Dekompozicí časové řady rozumíme rozklad časové řady na **deterministickou a náhodnou složku**, která má v případě

aditivního modelu tvar $Y_t = Tr_t + Sz_t + \varepsilon_t$

multiplikativního modelu $Y_t = Tr_t \cdot Sz_t \cdot \varepsilon_t$

Jednotlivé složky

Tr_t, Sz_t trend a sezónní složka mají *deterministický charakter*

ε_t náhodné fluktuace mají *stochastický charakter*,

přičemž $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **bílý šum**, pro který platí

$$E\varepsilon_t = 0, \quad C(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E\varepsilon_t \varepsilon_s = \begin{cases} 0 & s \neq t, \\ D\varepsilon_t = \sigma^2 & s = t. \end{cases}$$

někdy se navíc předpokládá jeho normalita, tj. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

3.3.1 Obecné lineární regresní modely

Mějme **regresní model** plné hodnosti:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \wedge \quad h(\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = p + 1 = k \quad \wedge \quad n > p + 1 \quad \wedge \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{L}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$$

vektor závisle proměnných $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$
 kde matice plánu $\mathbf{X} = (x_{ij}) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 0, \dots, p$
 vektor chyb $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$ $E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}; \quad D\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 \mathbf{I}_n;$

Tento model se také nazývá **regresní model plné hodnosti s pevným plánem**, neboť regresory x_{ij} ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$) jsou nenáhodné, tj. pevně dané.

Podmínka $D\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ znamená, že náhodné veličiny Y_1, \dots, Y_n mají **různé střední hodnoty** (které jsou známou funkcí regresorů) a **stejně rozptýly** - mluvíme o **homogenitě rozptýlu**.

Odhad neznámých parametrů $\boldsymbol{\beta}$ provedený **metodou nejmenších čtverců** je řešením normálních rovnic

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

a platí:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Označme

$$\bullet \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underbrace{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}_{\mathbf{H}} \mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{Y}$$

$$\bullet \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{H})}_{\mathbf{M}} \mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{M}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\mathbf{M}\mathbf{X}}_{=\mathbf{0}} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\bullet s^2 = \frac{SSE}{n-p-1} = \frac{1}{n-p-1} (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})' (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = \frac{1}{n-p-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{n-p-1} \hat{\mathbf{Y}}' (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{n-p-1} \boldsymbol{\varepsilon}' (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \boldsymbol{\varepsilon}$$

Pak platí:

- $E\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$,
- $E s^2 = \frac{E(SSE)}{n-p-1} = \sigma^2$, tj. s^2 je nestranným odhadem rozptylu,
- $D\boldsymbol{\beta} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Platí-li navíc $\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)}$, pak

- $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$
- $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{H}))$
- $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_{p+1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$
- $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p-1)$
- $\boldsymbol{\beta}$ a s^2 jsou stochasticky nezávislé
- $T_j = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{s^2 v_{jj}}} \sim t(n-p-1)$, kde $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (v_{ij})_{i,j=0,\dots,p}$
- $F = \frac{1}{qs^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)'W^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2) \sim F(q, n-p-1)$,
kde $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \mathbf{W} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}$; $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix}$ a $h(\mathbf{W}) = q$
- $T = \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{s^2 \mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \sim t(n-p-1)$, kde $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_p)'$ a $E(\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$
- Označme i -tý řádek matice plánu \mathbf{X} jako $\mathbf{x}'_i = (x_{i0}, \dots, x_{ip})$, pak

$$\begin{aligned} Y_i = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i &\sim N(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}, \sigma^2), \\ \hat{Y}_i = \mathbf{x}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} &\sim N(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{x}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i) \\ Y_i - \hat{Y}_i = \mathbf{x}'_i (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) + \varepsilon_i &\sim N(0, \sigma^2 (1 + \mathbf{x}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i)). \end{aligned}$$

INTERVALY SPOLEHLIVOSTI	
pro parametry β_j $j = 0, \dots, p$	$(\beta_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{v_{jj}}, \beta_j + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{v_{jj}})$
pro střední hodnotu predikce $E\hat{Y}_i = E\mathbf{x}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}$	$(\mathbf{x}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{\mathbf{x}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i}, \mathbf{x}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{\mathbf{x}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i})$
pro predikci $\hat{Y}_i = \mathbf{x}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}}$ $i = 1, \dots, n$	$(\mathbf{x}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{1 + \mathbf{x}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i}, \mathbf{x}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)s\sqrt{1 + \mathbf{x}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i})$

kde $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)$ je $1 - \frac{\alpha}{2}$ kvantil Studentova rozdělení o $n-p-1$ stupních volnosti

3.3.2 Rozšířený lineární regresní model a vážená metoda nejmenších čtverců

Následující věta ukazuje, jakým způsobem lze lineární regresní model rozšířit i na případ, kdy rozptyl není homogenní.

Věta 3.3.1.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \wedge \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{L}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} > 0 \wedge h(\mathbf{X}) = k \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}.$$

DŮKAZ. Jelikož jsme předpokládali, že

$$\mathbf{V} > 0,$$

tj. \mathbf{V} je pozitivně definitní, takže existuje $\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}$, která je symetrická a regulární. Proto

$$h(\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}) = k = h(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X})$$

takže $\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ je regulární. Položme

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Pak z

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

plyne, že

$$\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon},$$

tj.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}.$$

Pak

$$E\boldsymbol{\eta} = E\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \underbrace{E\boldsymbol{\varepsilon}}_{=0} = 0$$

a

$$D\boldsymbol{\eta} = D(\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} = \sigma^2 \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} = \sigma^2 \mathbf{I}_n$$

a tento model již splňuje předpoklady klasického regresního modelu, ve kterém odhad vektoru neznámých parametrů metodou nejmenších čtverců je roven

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}'\mathbf{Z} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}.$$

POZNÁMKA 3.3.2.

Nejčastěji se matice \mathbf{V} uvažuje ve tvaru

$$\mathbf{V} = \text{diag}\{v_1, \dots, v_n\},$$

tj. jde o diagonální matici. Položíme-li

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1} = \text{diag}\left\{\frac{1}{v_1}, \dots, \frac{1}{v_n}\right\} = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\},$$

přičemž prvky w_1, \dots, w_n se nazývají **váhami** (tedy čím je rozptyl větší, tím je váha pozorování menší). Pak odhad neznámých parametrů metodou nejmenších čtverců:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{Y}$$

se nazývá **vážená metoda nejmenších čtverců**.

3.3.3 Modelování trendu

Klasická dekompozice časových řad deterministickou složku **trend** modeluje pomocí **regresních modelů**. Do trendu se obvykle zahrnují i cyklické složky s dlouhou periodou.

Ke stanovení trendů lze v závislosti na jejich typu a charakteru náhodných fluktuací v dané časové řadě použít různé přístupy:

- **parametrický přístup**, který předpokládá určitý typ rozdělení, obvykle normální rozdělení bílého šumu;
- **neparametrický přístup**, kam patří různé metody založené na jádrových odhadech, vyhlazovacích splajnech, waveletech apod.

Regresní modely můžeme dále rozdělit na

- **modely globálního trendu** a
- **modely postupného nebo lokálního trendu**.

MODELY GLOBÁLNÍHO TRENDU

Mějme časovou řadu $\{Y_t, t \in T\}$ a n pozorování této řady v časových okamžicích

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$

Označme: $\boxed{Y_i = Y_{t_i}}$. Předpokládejme, že pozorování Y_i vyhovují modelu:

$$\boxed{Y_i = f(t_i) + \varepsilon_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

$\boxed{f(t)}$ je neznámá **trendová funkce** uvažované řady vybraná z předem dané třídy funkcí
 kde $\boxed{\varepsilon_i}$ jsou **náhodné fluktuace** nevykazující systematickou odchylku, tj. $E\varepsilon_i = 0$,
 s konstantním rozptylem $D\varepsilon_i = \sigma^2$ a nekolerované, t.j. $C(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$

REGRESNÍ MODEL TRENDU

Parametrický přístup k odhadu trendové funkce vede na *regresní modely trendu*. Předpokládáme, že trendová funkce $f(t)$ patří do třídy funkcí, které jsou určeny konečným počtem parametrů, přičemž

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1\varphi_1(t) + \dots + \beta_p\varphi_p(t) \quad \text{kde} \quad \begin{array}{ll} \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p & \text{neznámé parametry} \\ \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p & \text{známé funkce} \end{array}$$

Nejprve uvažujme **lineární regresní model**:

$$\boxed{\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \quad \wedge \quad h(\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = k = p + 1 \quad \wedge \quad n > p + 1 \quad \wedge \quad \varepsilon \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)} \quad (3.2)$$

přičemž

$$\begin{array}{ll} \text{vektor závisle proměnných} & \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)' \\ \text{matice plánu} & \mathbf{X} = (x_{ij}) = (\varphi_j(t_i)) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 0, \dots, p; \quad \varphi_0(t_i) \equiv 1 \\ \text{vektor chyb} & \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)' \quad E\varepsilon = \mathbf{0}; \quad D\varepsilon = \sigma^2 I_n; \end{array}$$

Odhad neznámých parametrů β provedený *metodou nejmenších čtverců* je řešením normálních rovnic $\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ a platí:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (3.3)$$

Označme **reziduální rozptyl**

$$s^2 = s_k^2 = \frac{SSE}{n-k} = \frac{1}{n-p-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) \quad \text{kde } k = p + 1 \quad (3.4)$$

Z velkého okruhu **trendových funkcí**, které vedou k lineárnímu regresnímu modelu, se zaměříme na

- **polynomický trend:** $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_p t^p$
- **periodický trend:** $f(t) = \mu + \sum_{j=1}^p (\alpha_j \cos \lambda_j t + \beta_j \sin \lambda_j t)$

V případě **polynomického trendu**, matice plánu je tvaru $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^p \end{pmatrix}$.

Kromě neznámých parametrů $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p)'$ zbývá určit vhodný stupeň polynomu p . Pro odhad stupně polynomu se nabízí 2 intuitivní metody

- (1) „**od nejnižšího stupně k nejvyššímu**“: začneme se stupněm $p = 0$, postupně stupeň zvyšujeme a testujeme hypotézu

$$H_0 : \beta_p = 0 \quad \text{proti alternativě} \quad H_1 : \beta_p \neq 0$$

pomocí statistiky (viz Anděl)

$$T_p = \frac{\hat{\beta}_p - \beta_p}{\sqrt{s_k^2 v_{pp}}} \sim t(n-p-1), \quad \text{kde } (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (v_{ij})_{i,j=0}^p.$$

Jestliže H_0 **zamítneme** \Rightarrow **zvyšujeme** stupeň polynomu.

- (2) „**od maximálního stupně dolů**“: zvolme $p = p_{max}$. Testujeme opět

$$H_0 : \beta_p = 0 \quad \text{proti alternativě} \quad H_1 : \beta_p \neq 0$$

pomocí T_p . Jestliže H_0 **nezamítneme** \Rightarrow **snižujeme** stupeň polynomu.

Obě metody nedávají uspokojivé výsledky (viz Anderson(1971)).

Penalizační metoda odhadu počtu regresních koeficientů

Předpokládejme, že k_0 je **skutečný počet regresních parametrů**. Lze ukázat, že platí

$$\begin{aligned} E(s_k^2) &> \sigma^2 & \text{pro } k < k_0 \\ E(s_k^2) &= \sigma^2 & k \geq k_0 \end{aligned}$$

Zůstává problém, jak z grafu hodnot s_k^2 určit právě tu hodnotu k_0 , od níž počínaje již graf dostává vodorovný charakter. Tento problém se řeší zavedením tzv. *penalizační funkce* a např. Anděl navrhuje místo hodnot s_k^2 použít její modifikaci

$$A_k = s_k^2 (1 + kw_n).$$

Penalizační funkce w_n

- nesmí být příliš velká - aby nezakreslila klesající charakter s_k^2 pro $k < k_0$;
- nesmí být příliš malá - aby z hodnot s_k^2 oscilujících kolem σ^2 vytvořila pro $k \geq 0$ rostoucí posloupnost;

Za odhad \hat{k} se bere hodnota $k \in \{0, 1, \dots, k_{max}\}$, pro kterou A_k nabývá svého **minima**. Konstanta k_{max} je maximální počet parametrů, které jsme ochotni uvažovat a o němž jsme si jisti, že splňuje podmínku $k_0 \leq k_{max}$.

Za dosti obecných podmínek týkajících se rozumné volby hodnot t_i lze ukázat (Geweke a Meese(1981), Anděl a kol.(1981)), že

$$\text{pokud } w_n > 0 \wedge w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge nw_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \hat{k} \rightarrow k_0 \text{ podle pravděpodobnosti.}$$

V praxi se osvědčilo volit

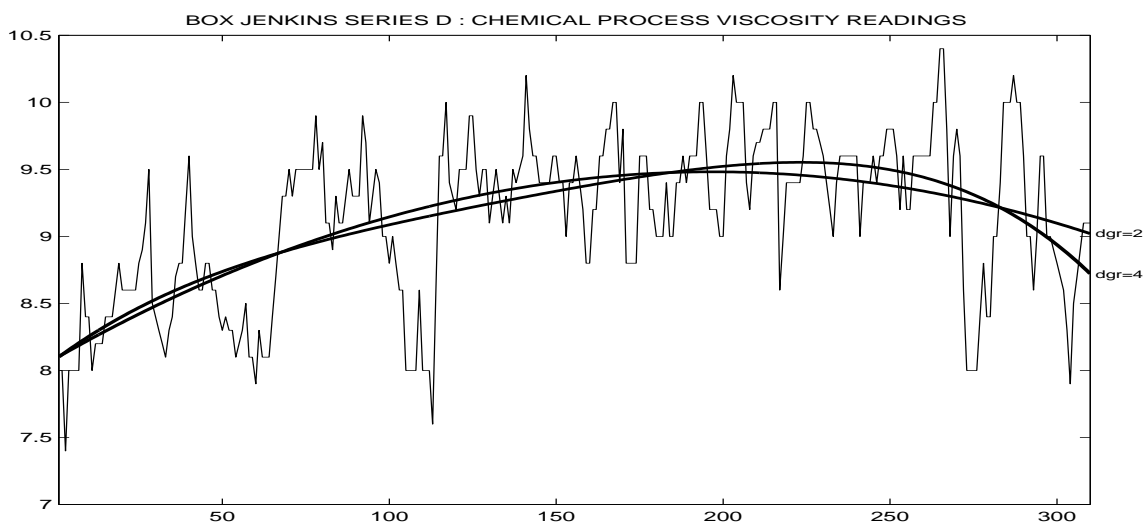
$$w_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}},$$

tj.

$$A_k = s_k^2 \left(1 + \frac{k}{\sqrt[4]{n}} \right).$$

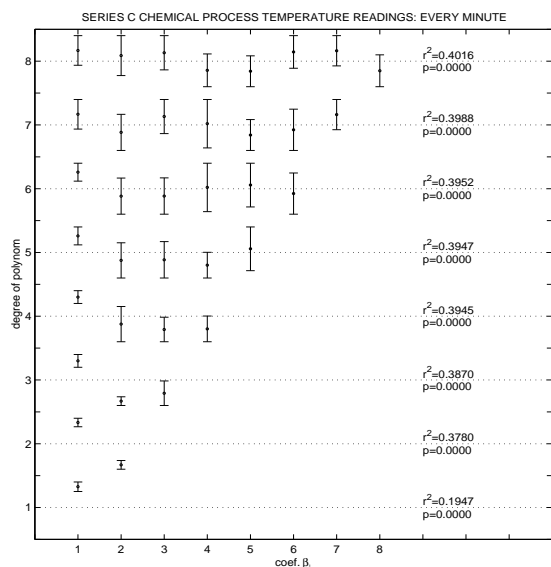
Další kritéria pro určení počtu regresních koeficientů

Akaikeovo informační kritérium (1972)	$AIC_k = \ln s_k^2 + \frac{2k}{n}$	nadhodnocuje k_0
Swarz (1978) a Rissanen (1978)	$SR_k = \ln s_k^2 + \frac{k \ln n}{n}$	
Hannan a Quinn (1979)	$HQ_k = \ln s_k^2 + \frac{2kc \ln \ln n}{n}$	$c > 1$; obvykle $c = 2$ nebo 3 .

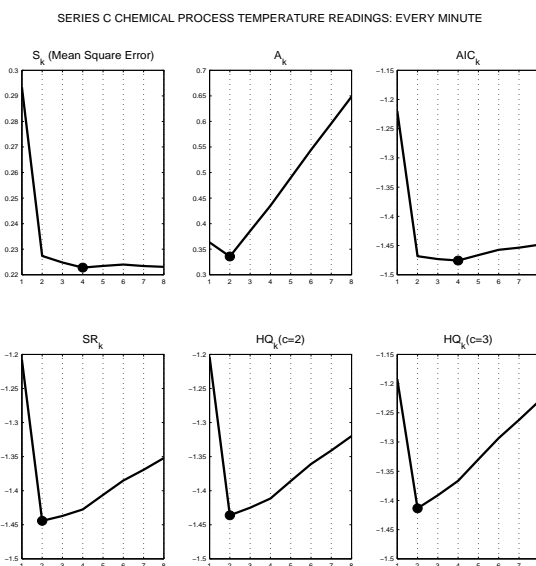


Obrázek 3.1: Vstupní data spolu s polynomickým trendem různých řádů.

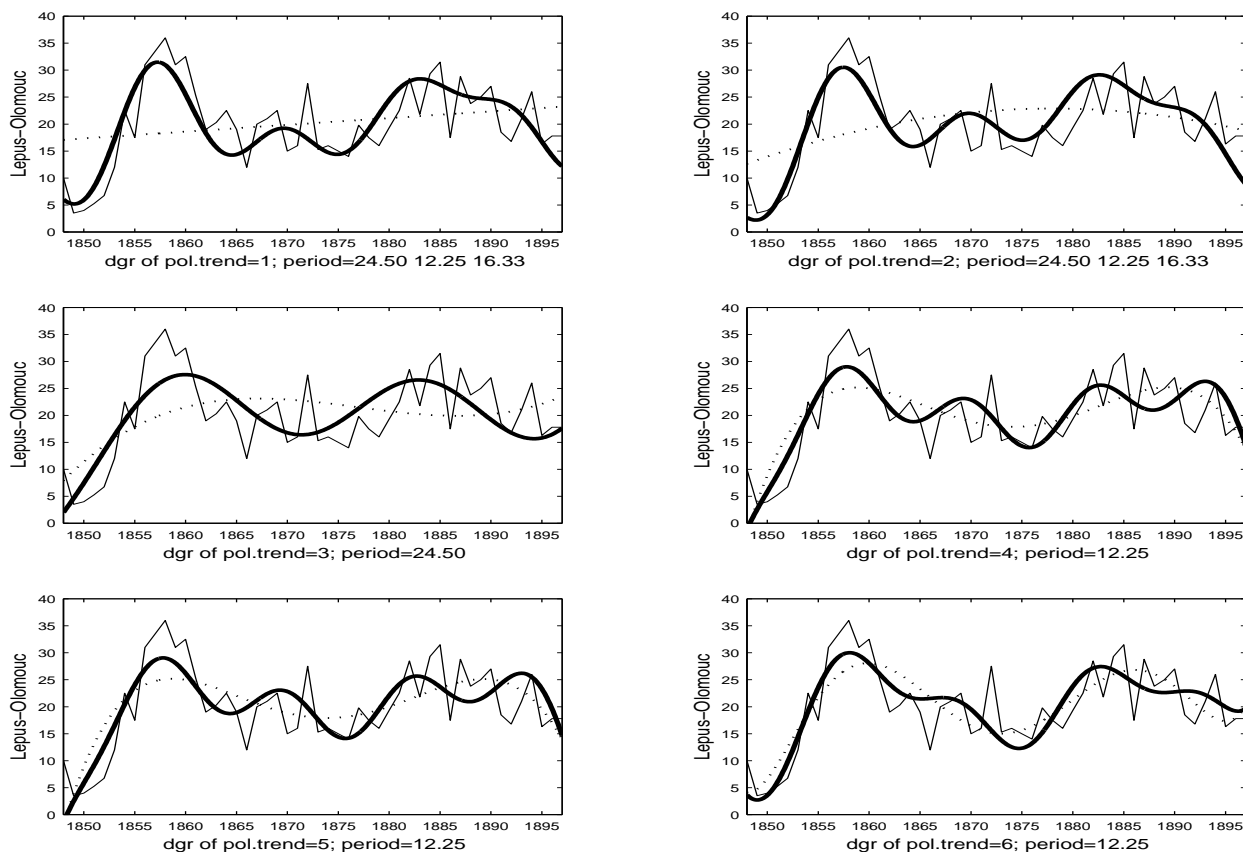
Obrázek 3.2: Intervaly spolehlivosti pro parametry β_1, \dots, β_k pro jednotlivé stupně polynomů. (Tečkovaná čára značí polohu nuly)



Obrázek 3.3: Penalizační kritéria pro odhad stupně polynomu.



Polynomial and trigonometric trends



Obrázek 3.4: Ukázka různých typů regresních modelů.

PERIODICKÝ TREND

Je-li $f(t)$ periodická funkce s periodou T , pak **frekvencí** rozumíme veličinu $\lambda = \frac{2\pi}{T}$.
Uvažujme model:

$$Y_i = f(t_i) + \varepsilon_i \quad E\varepsilon_i = 0; \quad D\varepsilon_i = \sigma^2; \quad C(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, n$$

kde (a) $f(t_i) = \mu + \sum_{j=1}^p (\alpha_j \cos \lambda_j t_i + \beta_j \sin \lambda_j t_i)$

nebo (b) $f(t_i) = \mu + \sum_{j=1}^p \gamma_j \cos(\lambda_j t_i + \omega_j) \quad \gamma_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \quad \omega_j = \arctan \frac{\beta_j}{\alpha_j}$

Jde o **nelineární regresní model** vzhledem k $(3p + 1)$ neznámých parametrů:

(a) $\alpha_1, \dots, \alpha_p \quad \beta_1, \dots, \beta_p \quad \mu \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p$

(b) $\gamma_1, \dots, \gamma_p \quad \mu \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \quad \omega_1, \dots, \omega_p$

Odhad vektoru **neznámých parametrů** pomocí *metody nejmenších čtverců* minimalizuje výraz

(a) $S(\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^n (Y_i - f(t_i))^2$

(b) $S(\mu, \gamma_1, \dots, \gamma_p, \omega_1, \dots, \omega_p, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^n (Y_i - f(t_i))^2$

Numericky lze systém nelineárních rovnic řešit např. pomocí Gauss-Newtonovy metody.

Lineární model pro známé frekvence

Situace se zjednoduší, pokud frekvence $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ jsou známé.

Pak model (a) je lineární a matice plánu je tvaru:

$$\mathbf{X}_{n \times (2p+1)} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \lambda_1 t_1 & \sin \lambda_1 t_1 & \cdots & \cos \lambda_p t_1 & \sin \lambda_p t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \lambda_1 t_n & \sin \lambda_1 t_n & \cdots & \cos \lambda_p t_n & \sin \lambda_p t_n \end{pmatrix}.$$

a

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}_{(2p+1) \times (2p+1)} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \hat{\alpha}_j &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \cos \lambda_j t_i \quad j = 1, \dots, p \\ \hat{\beta}_j &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \sin \lambda_j t_i \end{aligned}$$

Neznámé parametry modelu (b) získáme ze vztahů

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_j &= \sqrt{\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2} \\ \hat{\omega}_j &= \arctan \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\alpha}_j} \end{aligned} \quad j = 1, \dots, p$$

Pokud časová řada vykazuje (po odečtení např. lineárního trendu) přibližně periodické chování, je třeba **rozhodnout**, které frekvence se na tvorbě periodického trendu výrazně uplatňují. Pro nalezení významných period je výhodné užít metod *spektrální analýzy časových řad*.

MODELY LOKÁLNÍHO POSTUPNÉHO TRENDU

Hlavní myšlenka **lokální (vážené) metody nejmenších čtverců** spočívá v tom, že provedeme odhad trendu $\boxed{Tr_t}$ **polynomem na lokálním intervalu**

$$[t - s, t + s]$$

na rozdíl od klasické (vážené) metody nejmenších čtverců, kdy trend odhadujeme polynomem na celém intervalu možných hodnot parametru t , který označíme $[T1, T2]$.

Parametr $s > 0$ se nazývá **šířka vyhlazovacího okénka**. Interval $[t - s, t + s]$ **vyhlazovací okénko**.

I když vyhlazovací funkce, se kterou pracujeme, není polynomická funkce, může být za předpokladu, že je lokálně hladká (tj. existují její spojité derivace až do nějakého vhodně zvoleného řádu), lokálně rozvedena do **Taylorovy řady** kolem bodu t . Proto může být dobře aproximována lokálním polynomem, což lze provést metodou nejmenších čtverců, případně váženou metodou nejmenších čtverců.

Popsaná lokální (vážená) metoda nejmenších čtverců se někdy též nazývá **klouzavá polynomická metoda**, protože kolem bodu t , v němž má být trend odhadnut, je umístěno vyhlazovací okénko $[t - s, t + s]$ a odhad trendu Tr_t se „pohybuje“ spolu s t .

Zvolme tento přístup: uvnitř vyhlazovacího okénka $[t - s, t + s]$ aproximujeme neznámý trend **polynomem stupně m**

$$\boxed{\rho(x) = \sum_{j=0}^m \beta_j(t) (x - t)^j.}$$

Koeficienty $\beta_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots, m$) uvádíme jakožto funkci bodu t , (který je středem okénka $[t - s, t + s]$), abychom zdůraznili, že tyto koeficienty budou pro každé t jiné.

Neznámé koeficienty $\beta_j(t)$ polynomu $\rho(x)$ odhadneme (váženou) metodou nejmenších čtverců, kde **matice plánu \mathbf{X}** je tvořena prvky

$$x_{ij} = (t_i - t)^j,$$

přičemž $j = 0, 1, \dots, m$ a index i nabývá pouze těch hodnot, pro které platí

$$|t_i - t| \leq s.$$

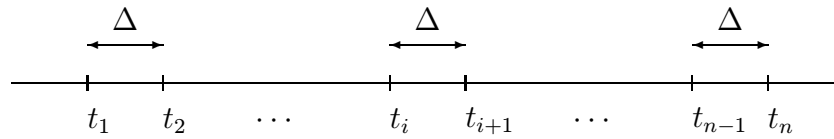
Je zřejmé, že platí

$$\boxed{\widehat{\rho}(t) = \widehat{\beta_0(t)}}.$$

Volba šířky vyhlazovacího okénka

S rostoucím \boxed{s} pracujeme s větším počtem pozorování ve vyhlazovacím okénku $[t - s, t + s]$, proto bude klesat rozptyl odhadu trendu, což však bude mít za následek nárůst jeho vychýlení od skutečné hodnoty. Vychýlení odhadu záleží na derivaci trendové funkce a projevuje se tak, že odhad \widehat{Tr}_t má tendenci podhodnocovat velikost lokálních extrémů trendové funkce, mluvíme o **přehlazení**. Pokud naopak budeme používat úzké vyhlazovací okénko, odhad trendu bude méně vychýlen, ale na úkor velké variability odhadu. V tomto případě mluvíme o **podhlazení** trendové funkce.

V dalším budeme předpokládat, že posloupnost časových okamžiků t_1, t_2, \dots, t_n



je **ekvidistantní**, tj. položíme-li pro $i = 1, \dots, n - 1$

$$\Delta = t_{i+1} - t_i,$$

pak

$$t_i = t_1 + (i - 1)\Delta$$

$$i = \frac{t_i - t_1}{\Delta} + 1$$

a položíme-li pro $i = 1, \dots, n$

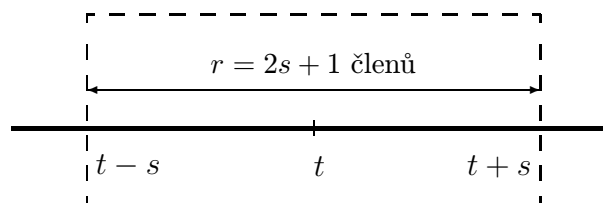
$$t_i^* = \frac{t_i - t_1}{\Delta} + 1,$$

můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat pouze o časových řadách, pro něž platí

$$t_i = i \quad i = 1, \dots, n.$$

KLOUZAVÉ PRŮMĚRY

Pokud zvolíme **symetrické vyhlazovací okénko** kolem bodu t



tak, že obsahuje úsek časové řady s lichým počtem členů r a položíme

$$s = \frac{r - 1}{2},$$

pak (pro jednoduchost místo $\beta_j(t)$ pišme β_j)

$$\rho(x) = \sum_{j=0}^m \beta_j (x - t)^j \quad \text{pro } x \in [t - s, t + s].$$

Zavedme substituci

$$\tau = x - t.$$

Potom

$$\boxed{\rho(x) = \rho(t + \tau) = \sum_{j=0}^m \beta_j \tau^j} \quad \tau \in [-s, s] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\rho}(t) = \hat{\beta}_0}.$$

Máme tedy model

$$Y_{t+\tau} = \sum_{j=0}^m \beta_j \tau^j + \varepsilon_{t+\tau} \quad \tau \in [-s, s]; \quad E\varepsilon_{t+\tau} = 0; \quad D\varepsilon_{t+\tau} = \sigma^2; \quad C(\varepsilon_{t+\tau}, \varepsilon_{t+\tau'}) = 0; \quad \tau \neq \tau'.$$

Máme-li k dispozici časovou řadu délky n , pak pro každé $t = s + 1, \dots, n - s$ zvlášť dostáváme **klasický lineární regresní model**

$$\mathbf{Y}_{(t)} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}; \quad E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad D\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 \mathbf{I}_{2s+1}$$

tj.

$$\mathbf{Y}_{(t)} = \begin{pmatrix} Y_{t-s} \\ \vdots \\ Y_t \\ \vdots \\ Y_{t+s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -s & (-s)^2 & \dots & (-s)^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}^2 & \dots & \mathbf{0}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & s & s^2 & \dots & s^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-s} \\ \vdots \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_{t+s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{s+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-s} \\ \vdots \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_{t+s} \end{pmatrix}$$

Odhad neznámých parametrů $\boldsymbol{\beta}$ provedený *metodou nejmenších čtverců* je řešením normálních rovnic

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}_{(t)} \quad \text{a platí} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}_{(t)} \Rightarrow \hat{\mathbf{Y}}_{(t)} = \underbrace{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'}_{\text{projekční matice } \mathbf{H}} \mathbf{Y}_{(t)} = \mathbf{H}\mathbf{Y}_{(t)},$$

přičemž v tomto případě

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2s+1 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^2 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^4 & \dots & \sum_{\tau=-s}^s \tau^m \\ 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^2 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^4 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^6 & \dots \\ \sum_{\tau=-s}^s \tau^2 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^4 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^6 & 0 & \dots \\ 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^4 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^6 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^8 & \dots \\ \sum_{\tau=-s}^s \tau^4 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^6 & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^8 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{\tau=-s}^s \tau^m & 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^{m+2} & 0 & \dots & \dots & \sum_{\tau=-s}^s \tau^{2m} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y}_{(t)} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-s}^s Y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-s}^s \tau Y_{t+\tau} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=-s}^s \tau^m Y_{t+\tau} \end{pmatrix} \quad \text{a tudíž odhady} \quad \hat{\mathbf{Y}}_t = \mathbf{x}'_{s+1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)} = (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_m \end{pmatrix} = \hat{\beta}_0.$$

Označme $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}'_{s+1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}'_{2s+1} \end{pmatrix}$. Prvky projekční matice se nazývají váhy. Pak odhad $\hat{\mathbf{Y}}_t = \mathbf{h}'_{s+1} \mathbf{Y}_{(t)}$.

Pro **prvních s hodnot**, tj. pro $t = 1, \dots, s$ vytváříme **společný** lineární regresní model:

$$\mathbf{Y}_{(F)} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_s \\ Y_{s+1} \\ Y_{s+2} \\ \vdots \\ Y_{2s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_s \\ \mathbf{x}'_{s+1} \\ \mathbf{x}'_{s+2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_{s+1} \\ \varepsilon_{s+2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2s+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_{(F)} &= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_{(F)} = \mathbf{H}\mathbf{Y}_{(F)} \\ \hat{Y}_1 &= \mathbf{h}'_1\mathbf{Y}_{(F)} \\ &\vdots \\ \hat{Y}_s &= \mathbf{h}'_s\mathbf{Y}_{(F)} \end{aligned}$$

Obdobně pro **posledních s hodnot**, tj. pro $t = n - s + 1, \dots, n$ vytváříme **společný** lineární regresní model:

$$\mathbf{Y}_{(L)} = \begin{pmatrix} Y_{n-2s} \\ \vdots \\ Y_{n-s-1} \\ Y_{n-s} \\ Y_{n-s+1} \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_s \\ \mathbf{x}'_{s+1} \\ \mathbf{x}'_{s+2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{n-2s} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-s-1} \\ \varepsilon_{n-s} \\ \varepsilon_{n-s+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_{(L)} &= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_{(L)} = \mathbf{H}\mathbf{Y}_{(L)} \\ \hat{Y}_{n-s+1} &= \mathbf{h}'_{s+2}\mathbf{Y}_{(L)} \\ &\vdots \\ \hat{Y}_n &= \mathbf{h}'_{2s+1}\mathbf{Y}_{(L)} \end{aligned}$$

Pak předchozí úvahy můžeme shrnout takto:

pro **prvních s hodnot**, tj. pro $t = 1, \dots, s$ dostáváme

$$\hat{Y}_t = \mathbf{h}'_t\mathbf{Y}_{(F)},$$

pro tzv. "středové" hodnoty, tj. pro $t = s + 1, \dots, n - s$

$$\hat{Y}_t = \mathbf{h}'_{s+1}\mathbf{Y}_{(t)}$$

a pro **posledních s hodnot**, tj. pro $t = n - s + 1, \dots, n$

$$\hat{Y}_t = \mathbf{h}'_{t-n+2s+1}\mathbf{Y}_{(L)}.$$

Pro ilustraci uvažujme **příklad 1**:

$$m = 2, s = 2, r = 2s + 1 = 5$$

$$\text{Matice plánu } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_3 \\ \mathbf{x}'_4 \\ \mathbf{x}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ informační matice } \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

a projekční matice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}'_1 \\ \mathbf{h}'_2 \\ \mathbf{h}'_3 \\ \mathbf{h}'_4 \\ \mathbf{h}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/35 & 9/35 & -3/35 & -1/7 & 3/35 \\ 9/35 & 13/35 & 12/35 & 6/35 & -1/7 \\ -3/35 & 12/35 & 17/35 & 12/35 & -3/35 \\ -1/7 & 6/35 & 12/35 & 13/35 & 9/35 \\ 3/35 & -1/7 & -3/35 & 9/35 & 31/35 \end{pmatrix} \begin{aligned} &\text{váhy pro první bod (asymetrické váhy)} \\ &\text{váhy pro druhý bod (asymetrické váhy)} \\ &\text{váhy pro "středové" body (symetrické váhy)} \\ &\text{váhy pro předposlední bod (asymetrické váhy)} \\ &\text{váhy pro poslední bod (asymetrické váhy)} \end{aligned}$$

Ukažme ještě další **příklad 2**:

$$m = 3, s = 2, r = 2s + 1 = 5$$

Matice plánu $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_3 \\ \mathbf{x}'_4 \\ \mathbf{x}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, informační matice $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{pmatrix}$

a projekční matice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}'_1 \\ \mathbf{h}'_2 \\ \mathbf{h}'_3 \\ \mathbf{h}'_4 \\ \mathbf{h}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69/70 & 2/35 & -3/35 & 2/35 & -1/70 \\ 2/35 & 27/35 & 12/35 & -8/35 & 2/35 \\ -3/35 & 12/35 & 17/35 & 12/35 & -3/35 \\ 2/35 & -8/35 & 12/35 & 27/35 & 2/35 \\ -1/70 & 2/35 & -3/35 & 2/35 & 69/70 \end{pmatrix}$$

váhy pro první bod (asymetrické váhy)
 váhy pro druhý bod (asymetrické váhy)
 váhy pro "středové" body (symetrické váhy)
 váhy pro předposlední bod (asymetrické váhy)
 váhy pro poslední bod (asymetrické váhy)

Vidíme, že

- Součet vah v jednom řádku je roven jedné (jde o prvky projekční matice s jednotkovou normou).
- Středové váhy jsou symetrické kolem prostřední hodnoty.
- Je-li m sudé, pak "středové" váhy řádu m a $m + 1$ pro stejnou délku $r = 2s + 1$ jsou totožné.

Jednoduché klouzavé průměry

Uvažujme nejprve:

$$m = 0, r = 2s + 1$$

Spočtíme postupně

$$\mathbf{X}_{2s+1} = (1, \dots, 1)', \quad \mathbf{X}'\mathbf{X} = 2s + 1, \quad \mathbf{X}'\mathbf{Y}_{(t)} = \sum_{\tau=-s}^s Y_{t+\tau},$$

normální rovnice:

$$(2s + 1)\hat{\beta}_0 = \sum_{\tau=-s}^s Y_{t+\tau} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{1}{2s + 1} \sum_{\tau=-s}^s Y_{t+\tau}.$$

Pro $t = s + 1, \dots, n - s$ máme

$$\hat{Y}_t = \hat{\rho}(t) = \hat{\beta}_0 = \frac{1}{2s + 1} \sum_{\tau=-s}^s Y_{t+\tau}$$

Pro prvních s hodnot, tj. pro $t = 1, \dots, s$ dostáváme

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{2s + 1} \sum_{\tau=1}^{2s+1} Y_{\tau}$$

a pro posledních s hodnot, tj. pro $t = n - s + 1, \dots, n$ jsou odhady ve tvaru

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{2s+1} \sum_{\tau=1}^{2s+1} Y_{n+1-\tau}.$$

Uvažujme příklad:

$$m = 1, s = 2, r = 2s + 1 = 5$$

Matice plánu $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_3 \\ \mathbf{x}'_4 \\ \mathbf{x}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, informační matice $\mathbf{X}'\mathbf{X} = (5)$ a projekční matice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}'_1 \\ \mathbf{h}'_2 \\ \mathbf{h}'_3 \\ \mathbf{h}'_4 \\ \mathbf{h}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{váhy pro první bod} \\ \text{váhy pro druhý bod} \\ \text{váhy pro "středové" body} \\ \text{váhy pro předposlední bod} \\ \text{váhy pro poslední bod} \end{array}$$

Dále uvažujme:

$$m = 1, r = 2s + 1$$

Spočtěme pomocný vzorec:

$$\sum_{\tau=-s}^s \tau^2 = 2 \sum_{\tau=1}^s \tau^2 = 2 \frac{1}{6} s(s+1)(2s+1) = \frac{s(s+1)(2s+1)}{3}.$$

Normální rovnice

$$\begin{pmatrix} 2s+1 & 0 \\ 0 & \sum_{\tau=-s}^s \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=-s}^s Y_{t+\tau} \\ \sum_{\tau=-s}^s \tau Y_{t+\tau} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{\beta}_0 = \frac{1}{2s+1} \sum_{\tau=-s}^s Y_{t+\tau} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{3}{s(s+1)(2s+1)} \sum_{\tau=-s}^s \tau Y_{t+\tau} \end{array}$$

Pro $t = s + 1, \dots, n - s$ máme

$$\hat{Y}_t = \hat{\rho}(t) = \hat{\beta}_0 = \frac{1}{2s+1} \sum_{\tau=-s}^s Y_{t+\tau}$$

což je stejné jako v pro $m = 0$.

Pro prvních s hodnot, tj. pro $t = 1, \dots, s$ dostáváme

$$\hat{\beta}_0^F = \frac{1}{2s+1} \sum_{\tau=1}^{2s+1} Y_{\tau}, \quad \hat{\beta}_1^F = \frac{3}{s(s+1)(2s+1)} \sum_{\tau=-s}^s \tau Y_{s+\tau+1}$$

a

$$\hat{Y}_1 = \hat{\beta}_0^F - s\hat{\beta}_1^F, \quad \hat{Y}_2 = \hat{\beta}_0^F - (s-1)\hat{\beta}_1^F, \quad \dots, \quad \hat{Y}_s = \hat{\beta}_0^F - \hat{\beta}_1^F.$$

Pro posledních s hodnot, tj. pro $t = n - s + 1, \dots, n$ jsou odhady ve tvaru

$$\hat{\beta}_0^L = \frac{1}{2s+1} \sum_{\tau=1}^{2s+1} Y_{n-\tau+1}, \quad \hat{\beta}_1^L = \frac{3}{s(s+1)(2s+1)} \sum_{\tau=-s}^s \tau Y_{n-2s+\tau-1}$$

a

$$\hat{Y}_{n-s+1} = \hat{\beta}_0^L + \hat{\beta}_1^L, \quad \hat{Y}_{n-s+2} = \hat{\beta}_0^L + 2\hat{\beta}_1^L, \quad \dots, \quad \hat{Y}_n = \hat{\beta}_0^L + s\hat{\beta}_1^L.$$

Uvažujme **příklad**:

$$m = 1, s = 2, r = 2s + 1 = 5$$

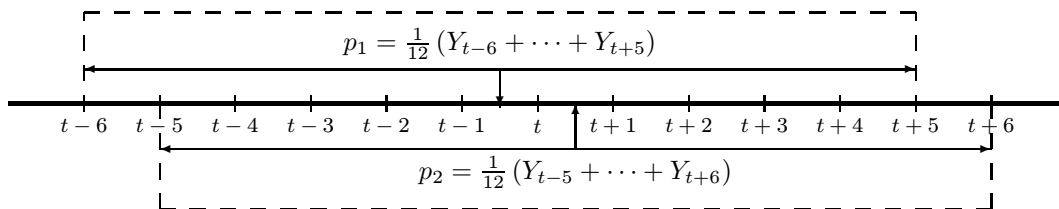
Matice plánu $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_3 \\ \mathbf{x}'_4 \\ \mathbf{x}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, informační matice $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ a projekční matice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}'_1 \\ \mathbf{h}'_2 \\ \mathbf{h}'_3 \\ \mathbf{h}'_4 \\ \mathbf{h}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & -1/5 \\ 2/5 & 3/10 & 1/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 & 3/10 & 2/5 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

váhy pro první bod (asymetrické váhy)
 váhy pro druhý bod (asymetrické váhy)
 váhy pro "středové" body (symetrické váhy)
 váhy pro předposlední bod (asymetrické váhy)
 váhy pro poslední bod (asymetrické váhy)

Centrované klouzavé průměry

Často dochází k situaci, kdy chceme průměrovat hodnoty přes sudý počet období (např. pro vyrovnávání sezónních fluktuací), např. o délce 12 při naměřených měsíčních pozorováních nebo o délce 4 při čtvrtletních pozorováních. Klouzavý průměr délky 12 by sice vyrovnal z velké části sezónní fluktuace v řadě, přitom však např. aritmetický průměr lednové až prosincové hodnoty by padl mezi body červen a červenec. Proto se zavedl jiný postup:



- V 1. kroku se vypočtou $p_1 = \frac{1}{12} (Y_{t-6} + \dots + Y_{t+5})$ a $p_2 = \frac{1}{12} (Y_{t-5} + \dots + Y_{t+6})$
- V 2. kroku $p_3 = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) = \frac{1}{2 \cdot 12} (Y_{t-6} + 2Y_{t-5} + \dots + 2Y_{t+5} + Y_{t+6})$

Obecně centrovaný jednoduchý klouzavý průměr délky $2s+1$ je tvaru

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{4s} (Y_{t-s} + 2Y_{t-s+1} + \dots + 2Y_{t+s-1} + Y_{t+s}).$$

Volba řádu klouzavých průměrů

Budeme se snažit najít nějaké objektivní kritérium. Předpokládejme, že

$$Y_t = Tr_t + \varepsilon_t = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_m t^m + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Zavedme obecně difference:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= y_t - y_{t-1} \\ \Delta^2 y_t &= \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} \\ &\vdots \\ \Delta^k y_t &= y_t - \binom{k}{1}y_{t-1} + \binom{k}{2}y_{t-2} - \cdots + (-1)^k y_{t-k}\end{aligned}$$

Polynom

$$\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_m t^m$$

bude při každé následující diferenci snižovat svůj řád o jedničku. Konečně při diferenci řádu $m + 1$ se tento polynom vynuluje. **Bílý šum** vytváří při k -té diferenci

$$\Delta^k \varepsilon_t = \varepsilon_t - \binom{k}{1}\varepsilon_{t-1} + \binom{k}{2}\varepsilon_{t-2} - \cdots + (-1)^k \varepsilon_{t-k}$$

Spočtěme střední hodnotu a rozptyl této k -té difference:

$$\begin{aligned}E\Delta^k \varepsilon_t &= E\left\{\varepsilon_t - \binom{k}{1}\varepsilon_{t-1} + \binom{k}{2}\varepsilon_{t-2} - \cdots + (-1)^k \varepsilon_{t-k}\right\} = 0 \\ D\Delta^k \varepsilon_t &= D\left\{\varepsilon_t - \binom{k}{1}\varepsilon_{t-1} + \binom{k}{2}\varepsilon_{t-2} - \cdots + (-1)^k \varepsilon_{t-k}\right\} = \sigma^2 \left\{1 + \binom{k}{1}^2 + \binom{k}{2}^2 + \cdots + 1\right\}\end{aligned}$$

Výraz ve složených závorkách je zřejmě koeficient členu x^k ve výrazu $(1+x)^k(1+x)^k$ a je tedy s využitím binomické věty roven $\binom{2k}{k}$.

Takže

$$D\Delta^k \varepsilon_t = \binom{2k}{k} \sigma^2.$$

Provedme standardizaci k -té difference bílého šumu

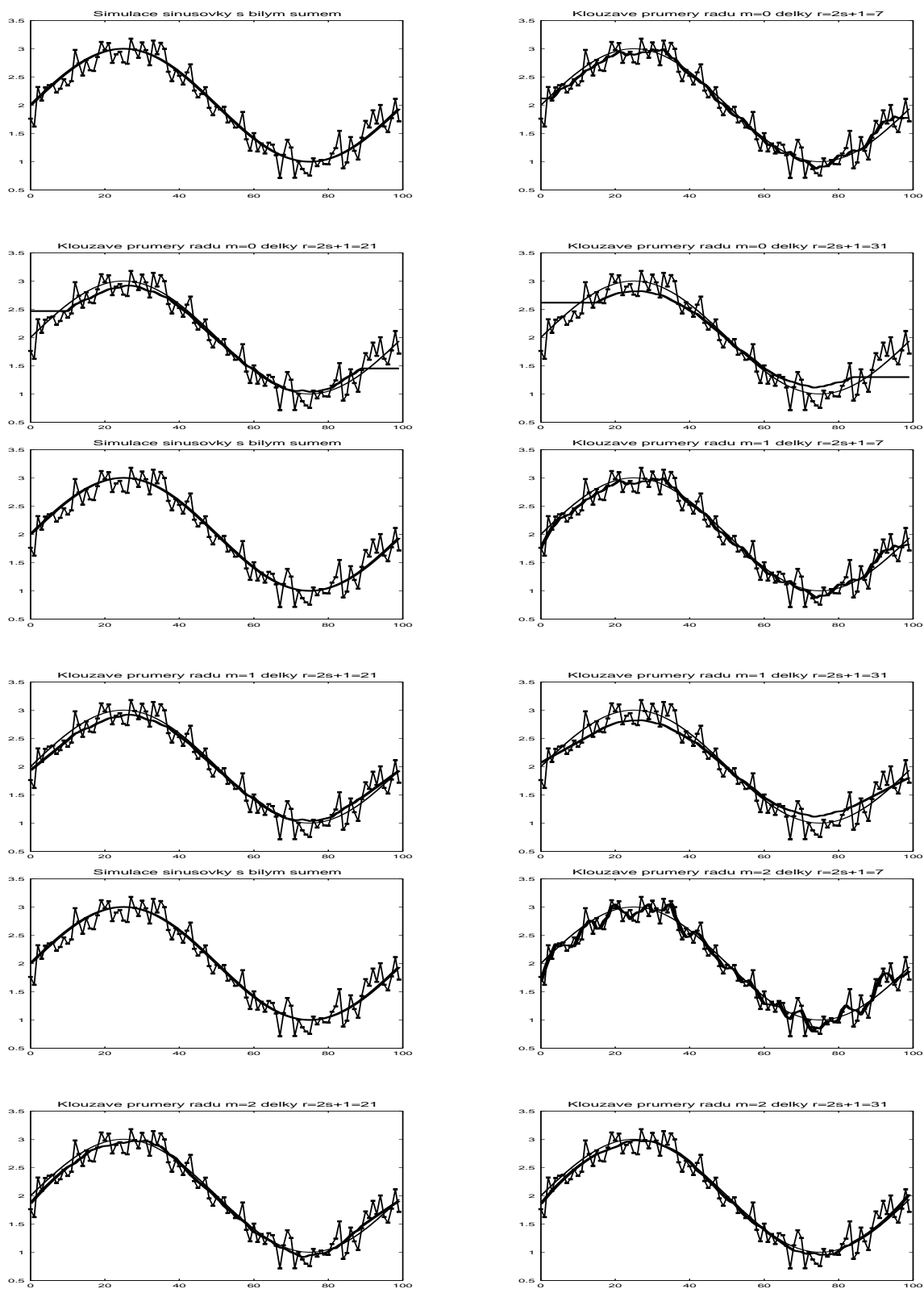
$$U_{k,t} = \frac{\Delta^k \varepsilon_t - 0}{\sqrt{\binom{2k}{k}}}.$$

Položme $S_k^2 = \sum_{t=k+1}^n U_{k,t}^2$. Pak $ES_k^2 = (n-k)\sigma^2$.

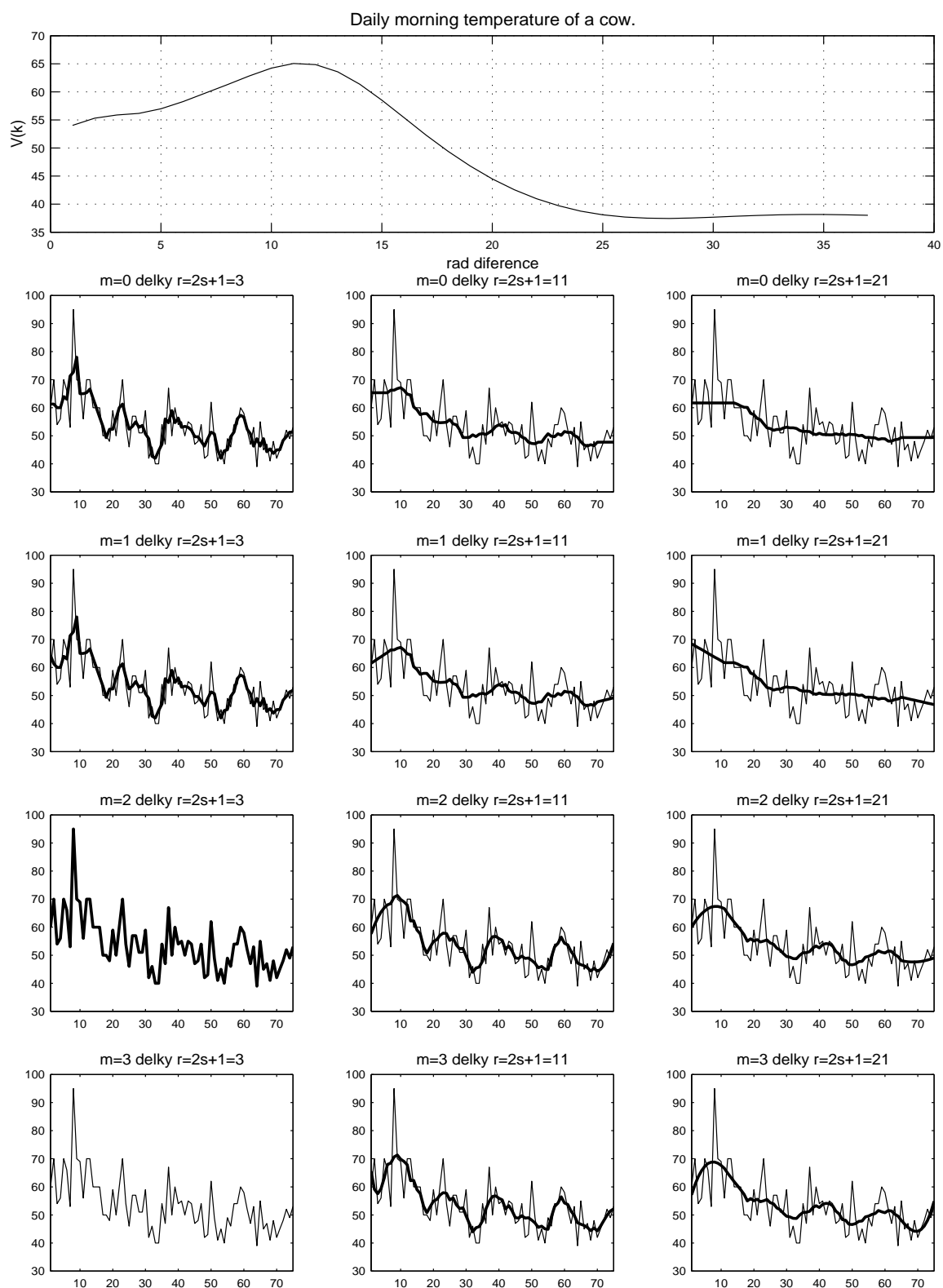
Zavedeme-li pro $k \geq m + 1$ veličinu

$$V_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (\Delta^k Y_t)^2}{\binom{2k}{k}(n-k)},$$

pak V_k je pro $k \geq m + 1$ odhadem rozptylu bílého šumu. Počítejme V_1, V_2, \dots dokud nezaznamenáme, že tyto hodnoty začínají konvergovat k nějaké konstantě.



Obrázek 3.5: Různá volba řádu a délky klouzavých průměrů pro simulovaná data



Obrázek 3.6: Různá volba řádu a délky klouzavých průměrů pro reálná data

EXPONENCIÁLNÍ VYROVNÁVÁNÍ

Základy položili **Holt** (1957) a **Brown** (1961). Na rozdíl od klouzavých průměrů vychází z polynomiální lokální **vážené** metody nejmenších čtverců, kde váhy jednotlivých čtverců se směrem do minulosti exponenciálně snižují \implies odtud název metody.

Uvažujeme-li vyhlazovací okno pouze směrem do minulosti, pak pro každé t máme následující regresní model, přičemž $\tau = 0, 1, \dots$

$$Y_{t-\tau} = \sum_{j=0}^m (-\tau)^j \beta_j + \varepsilon_{t-\tau}, \quad E\varepsilon_{t-\tau} = 0; \quad E\varepsilon_q \varepsilon_s = 0, \quad q \neq s \quad D\varepsilon_{t-\tau} = \alpha^{-\tau} \sigma^2; \quad \alpha \in (0, 1).$$

Použijeme-li maticový zápis, dostaneme

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad D\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 \mathbf{W}^{-1} \quad \alpha \in (0, 1)$$

kde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{t-0} \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (-1)^1 & (-1)^2 & \dots & (-1)^m \\ 1 & (-2)^1 & (-2)^2 & \dots & (-2)^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \alpha^0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha^1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-2} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Odhad parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou **nejmenších vážených čtverců** (neboť rozptyly nejsou konstantní) je dán vzorcem:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{Y}$$

kde

$$\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^1 \alpha^{\tau} & \dots & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^m \alpha^{\tau} \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^1 \alpha^{\tau} & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^2 \alpha^{\tau} & \dots & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^{m+1} \alpha^{\tau} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^m \alpha^{\tau} & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^{m+1} \alpha^{\tau} & \dots & \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^{2m} \alpha^{\tau} \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^1 \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} (-\tau)^m \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \end{pmatrix}.$$

JEDNODUCHÉ EXPONENCIÁLNÍ VYROVNÁVÁNÍ

Vyjádříme-li explicitně normální rovnice $\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{Y}$ pro $m = 0$, přičemž použijeme označení $\hat{\beta}_0 = b_0$, dostaneme

$$b_0 \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau}$$

Pomocné vztahy 3.3.3.

Protože platí $\alpha \in (0, 1)$, pak $\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} = \frac{1}{1-\alpha}$.

Protože $\hat{Y}_t = b_0$, dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t = b_0 &= (1 - \alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} = (1 - \alpha) Y_t + (1 - \alpha) \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \stackrel{\text{subst. } k=\tau-1}{=} \\ &= (1 - \alpha) Y_t + (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} Y_{t-1-k} = \\ &= (1 - \alpha) Y_t + \underbrace{\alpha (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k Y_{t-1-k}}_{\hat{Y}_{t-1}} = (1 - \alpha) Y_t + \alpha \hat{Y}_{t-1} \end{aligned}$$

Dostáváme tedy jednoduchý rekurentní vzorec:

$$\hat{Y}_t = (1 - \alpha) Y_t + \alpha \hat{Y}_{t-1}.$$

Lze snadno řídit **adaptivnost metody**:

1. při malém $\alpha \Rightarrow$ metoda rychle reaguje na změny v charakteru dat, neboť se prosadí vliv prvního sčítance
2. při větším $\alpha \Rightarrow$ zesílí se vyrovnávací schopnost.

Předpovídání (predikce)

Chceme-li použít metodu jednoduchého exponenciálního vyrovnávání pro předpovídání, pak klademe

$$\hat{Y}_{t+\tau}(t) = \hat{Y}_t \quad \text{pro libovolné } \tau > 0.$$

Přitom $\hat{Y}_{t+\tau}(t)$ označuje předpověď hodnoty $Y_{t+\tau}$ konstruované v čase t na základě hodnot Y_t, Y_{t-1}, \dots

Speciálně v **koncovém bodě**

$$\hat{Y}_{n+\tau}(n) = \hat{Y}_n.$$

Vysvětlení rekurentního vzorce jiným způsobem

Upravujeme postupně

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t &= (1 - \alpha)Y_t + \alpha\hat{Y}_{t-1} \\ &= (1 - \alpha)Y_t + \alpha\hat{Y}_{t-1} + \hat{Y}_{t-1} - \hat{Y}_{t-1} \\ &= \hat{Y}_{t-1} + (1 - \alpha)(Y_t - \hat{Y}_{t-1})\end{aligned}$$

Podívejme se na odhad \hat{Y}_{t-1} , kterou hodnotu předpovídá, považujeme-li $t-1$ za poslední známou hodnotu, tj.

$$\hat{Y}_{t-1} = \hat{Y}_t(t-1)$$

a odtud \hat{Y}_{t-1} je předpověď pro čas t zkonstruovaná v časovém okamžiku $t-1$ (tj. z dostupných hodnot $t-1, t-2, \dots$).

Pak

$$\hat{Y}_t = \hat{Y}_{t-1} + (1 - \alpha) \underbrace{(Y_t - \hat{Y}_{t-1})}_{\text{chyba predikce}} = \hat{Y}_{t-1} + (1 - \alpha) (Y_t - \hat{Y}_t(t-1))$$

Jinými slovy:

- pro opravu předchozí vyrovnané hodnoty použijeme (jakmile dostaneme pozorování Y_t) vhodně diskontovanou chybu předpovědi $\hat{Y}_t(t-1)$ konstruované v čase $t-1$.

Předpovědní intervaly na hladině významnosti α

Podle Bowerman, B.L., O'Connell, R.T.: Time series and forecasting. North Scituate, Massachusetts, Duxbury Press (1979) mají tvar

$$\hat{Y}_{n+\tau}(n) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} d_\tau \Delta(n), \hat{Y}_{n+\tau}(n) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} d_\tau \Delta(n)$$

kde $\Delta(n) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |Y_t - \hat{Y}_t(t-1)|$ a $d = 1.25$ pro libovolné $\tau > 0$.

Výhodou předpovědních intervalů konstruovaných v rámci exponenciálního vyrovnavání je jejich snadné přizpůsobení při dodání dalších pozorování časové řady.

Hledání optimálního parametru α

Na základě bohatých praktických zkušeností s danou metodou je možné se pro většinu aplikací omezit při výběru α na interval $[0.7, 1)$. Výběr α z tohoto intervalu lze například provést pomocí simulací: α volíme postupně rovno 0.70, 0.72, 0.74, ..., 0.98. Pak vybereme tu hodnotu α , která v dané řadě poskytuje nejlepší předpovědi.

POZNÁMKA 3.3.4.

Někdy se však neklade požadavek, aby α bylo z intervalu $[0.7, 1)$. Jakmile však optimální nalezená hodnota leží vně tohoto intervalu, je to indikací toho, že s použitou metodou není něco v pořádku, tj. např. vhodnější by byla metoda dvojitého exponenciálního vyrovňování.

Při řešení konkrétního příkladu se setkáváme s těmito problémy:

1. chceme-li použít rekurentní vzorec, potřebujeme \hat{Y}_0 .
2. potřebujeme určit α .

Proto se algoritmus rozpadá do dvou fází:

1. volba konstanty α .
 - (a) spočteme \hat{Y}_0 jako aritmetický průměr prvních n_1 členů (doporučuje se volit $n_1 = 6 < n$ nebo $n_1 = \frac{n}{2}$). Nebereme $n_1 = n$ z toho důvodu, že nejprve chceme simulačně určit hodnotu α pro 0.70, 0.72, 0.74, ..., 0.98 a pokud bychom vzali aritmetický průměr ze všech hodnot, nemohli bychom posoudit kvalitu vyrovňování v historických datech, neboť by se všechny účastnily na odhadu počátečního \hat{Y}_0 .
 - (b) Pro $\alpha_i \in [0.7, 1)$ se spočtou

$$\begin{array}{ll}
 \text{odhady} & \hat{Y}_1 = (1 - \alpha_i)Y_1 + \alpha_i\hat{Y}_0 \\
 & \vdots \\
 & \hat{Y}_n = (1 - \alpha_i)Y_n + \alpha_i\hat{Y}_{n-1} \\
 \text{předpovědi} & \hat{Y}_t(t-1) = \hat{Y}_{t-1} \\
 \text{a parametr } \alpha \text{ se určí ze vztahu} & \alpha = \arg \min_{\alpha_i} SSE = \arg \min_{\alpha_i} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_{t-1})^2
 \end{array}$$

2. Nejprve se určí $\hat{Y}_0 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$. Většinou se bere $n_2 = n$. Pro α zvolené v 1. fázi se spočtou odhady $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n$, pak předpovědi

$$\hat{Y}_{n+1}(n) = \hat{Y}_n = (1 - \alpha)Y_n + \alpha\hat{Y}_{n-1}.$$

Pokud chceme vypočítat \hat{Y}_{n+1} , musíme si počkat, až dostaneme hodnotu Y_{n+1} , jinak musíme vystačit se vzorcem $\hat{Y}_{n+\tau}(n) = \hat{Y}_n$ pro $\tau > 0$.

Adaptivní řídicí proces - tj. změna α během výpočtu

Adaptivní řídicí proces během výpočtu pomocí jistého indikátoru poruchy signalizuje, že vyrovnávání přestává být pro příslušnou vyrovnávací konstantu α adekvátní (někdy dokonce tuto hodnotu podle potřeby automaticky mění).

Jako indikátor poruchy se často používá veličina

$$I(\alpha, t) = \left| \frac{Y(\alpha, t)}{D(\alpha, t)} \right|,$$

kde označíme-li

$$e_j(\alpha) = Y_j - \hat{Y}_j(j-1),$$

pak

$$Y(\alpha, t) = \sum_{j=1}^t e_j(\alpha)$$

a

$$D(\alpha, t) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t |e_j(\alpha)|.$$

Zvedne-li se $I(\alpha, t)$ nad jistou kontrolní mez K , je to signál ke změně hodnoty α nebo dokonce přestává vyhovovat uvažovaný typ trendu (a je např. nutné přejít na dvojité exponenciální vyrovnávání). Mez K se obvykle volí mezi 4 až 6.

Další metoda:

Souběžně se provádí 3 procedury pro

$$\alpha - 0.05 \quad \alpha \quad \alpha + 0.05.$$

Pokud

- například

$$D(\alpha, t) \leq \min(D(\alpha - 0.05, t), D(\alpha + 0.05, t)),$$

pokračuje se,

- pokud

$$D(\alpha + 0.05, t) < D(\alpha, t)$$

α se změní na $\alpha + 0.05$

a pokračuje se pro

$$\alpha \quad \alpha + 0.05 \quad \alpha + 0.1.$$

DVOJITÉ EXPONENCIÁLNÍ VYROVNÁVÁNÍ

Vyjádříme-li explicitně normální rovnice

$$\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{Y}$$

pro $m = 1$, dostaneme

$$\begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} & -\sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} \\ -\sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} & \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau^2 \alpha^{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \\ -\sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \end{pmatrix}.$$

Pomocné vztahy 3.3.5.

Pro $\alpha \in (0, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} &= \frac{1}{1-\alpha} \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau^2 \alpha^{\tau} &= \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} \end{aligned}$$

DŮKAZ. Protože $\alpha \in (0, 1)$, pak

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} &= \frac{1}{1-\alpha} \\ \frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} \right) &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \\ \frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau-1} \right) &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau(\tau-1) \alpha^{\tau-2} = \frac{2}{(1-\alpha)^3} \end{aligned}$$

Díky předchozím vztahům dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} &= \alpha \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau-1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau^2 \alpha^{\tau} &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau(\tau-1) \alpha^{\tau} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} = \alpha^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau(\tau-1) \alpha^{\tau-2} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \\ &= \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^3} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}. \end{aligned}$$

□

Pokračujeme v řešení systému normálních rovnic

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & -\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \\ -\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \\ -\sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \end{pmatrix}.$$

Pokud postupně první a druhou rovnici vynásobíme výrazem $(1-\alpha)$, resp. $-(1-\alpha)^2$, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \\ (1-\alpha)^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \end{pmatrix}.$$

Pomocné vztahy 3.3.6.

Jestliže definujeme tzv. vyrovnávací statistiky 1. a 2. řádu

$$S_t = (1-\alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \quad a \quad S_t^{[2]} = (1-\alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} S_{t-\tau},$$

pak platí

$$\begin{aligned} S_t &= (1-\alpha)Y_t + \alpha S_{t-1} \\ S_t^{[2]} &= (1-\alpha)S_t + \alpha S_{t-1}^{[2]} \end{aligned}$$

a také

$$(1-\alpha)^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} = S_t^{[2]} - (1-\alpha)S_t.$$

DŮKAZ. Upravujeme postupně

$$\begin{aligned} \boxed{S_t} &= (1-\alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} = (1-\alpha)Y_t + (1-\alpha) \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} \stackrel{\text{subst. } k=\tau-1}{=} \\ &= (1-\alpha)Y_t + \alpha \underbrace{(1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k Y_{t-1-k}}_{S_{t-1}} \\ &= \boxed{(1-\alpha)Y_t + \alpha S_{t-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{S_t^{[2]}} &= (1-\alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} S_{t-\tau} = (1-\alpha)S_t + (1-\alpha) \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha^{\tau} S_{t-\tau} \stackrel{\text{subst. } k=\tau-1}{=} \\ &= (1-\alpha)S_t + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} S_{t-1-k} \\ &= (1-\alpha)S_t + \alpha \underbrace{(1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k S_{t-1-k}}_{S_{t-1}^{[2]}} \\ &= \boxed{(1-\alpha)S_t + \alpha S_{t-1}^{[2]}}. \end{aligned}$$

Všimněme si opět $S_t^{[2]}$. Protože

$$S_{t-k} = (1 - \alpha) \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-k-\tau},$$

pak

$$\begin{aligned} \boxed{S_t^{[2]}} &= (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k S_{t-k} = (1 - \alpha)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} Y_{t-k-\tau} \\ &= (1 - \alpha)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k [\alpha^0 Y_{t-k} + \alpha^1 Y_{t-k-1} + \alpha^2 Y_{t-k-2} + \dots] \\ &= (1 - \alpha)^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k Y_{t-k}}_{\text{první řada} = (1-\alpha)S_t} + (1 - \alpha)^2 \{ [\alpha^1 Y_{t-1} + \alpha^2 Y_{t-2} + \alpha^3 Y_{t-3} + \dots] + \\ &\quad [\alpha^2 Y_{t-2} + \alpha^3 Y_{t-3} + \alpha^4 Y_{t-4} + \dots] + [\alpha^3 Y_{t-3} + \alpha^4 Y_{t-4} + \alpha^5 Y_{t-5} + \dots] + \dots \} \\ &= (1 - \alpha) S_t + (1 - \alpha)^2 \{ \alpha Y_{t-1} + 2\alpha^2 Y_{t-2} + 3\alpha^3 Y_{t-3} + \dots \} \\ &= \boxed{(1 - \alpha) S_t + (1 - \alpha)^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} Y_{t-\tau}} \end{aligned}$$

A odtud plyne

$$(1 - \alpha)^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \alpha^{\tau} Y_{t-\tau} = S_t^{[2]} - (1 - \alpha) S_t.$$

□

Pokračujme opět v řešení systému normálních rovnic, přičemž použijeme označení

$$b_0 = \hat{\beta}_0 \quad \text{a} \quad b_1 = \hat{\beta}_1.$$

$$\begin{aligned} b_0 - \frac{\alpha}{1 - \alpha} b_1 &= S_t & \Rightarrow & \quad b_0 = S_t + \frac{\alpha}{1 - \alpha} b_1 \\ \alpha b_0 - \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 - \alpha} b_1 &= S_t^{[2]} - (1 - \alpha) S_t \end{aligned}$$

Dosaďme za b_0 do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} \alpha S_t + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} b_1 - \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 - \alpha} b_1 &= S_t^{[2]} - S_t - \alpha S_t \\ -\frac{\alpha}{1 - \alpha} b_1 &= S_t^{[2]} - S_t & \Rightarrow & \quad b_1 = \frac{1 - \alpha}{\alpha} (S_t - S_t^{[2]}) \end{aligned}$$

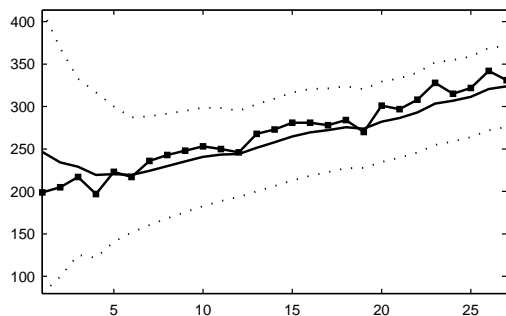
Dopočítejme b_0

$$b_0 = S_t + \frac{\alpha}{1 - \alpha} b_1 = S_t + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{1 - \alpha}{\alpha} (S_t - S_t^{[2]}) = 2S_t - S_t^{[2]}.$$

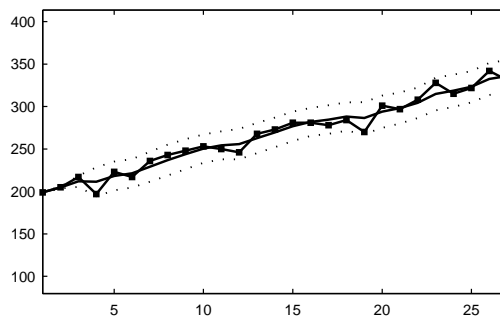
Protože $\hat{Y}_t = b_0$, dostáváme celkově

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= 2S_t - S_t^{[2]} \\ S_t &= (1 - \alpha) Y_t + \alpha S_{t-1} \\ S_t^{[2]} &= (1 - \alpha) S_t + \alpha S_{t-1}^{[2]} \end{aligned}$$

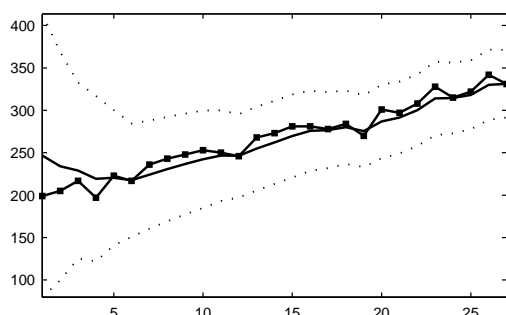
Mesíční exportní odbyt (v tisících Kc) jistého strojírenského podniku.



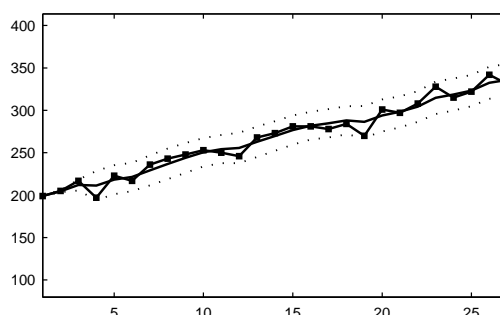
Jednoduše exponenciální vyrovnání $\alpha=0.70$



Dvojitě exponenciální vyrovnání $\alpha=0.84$

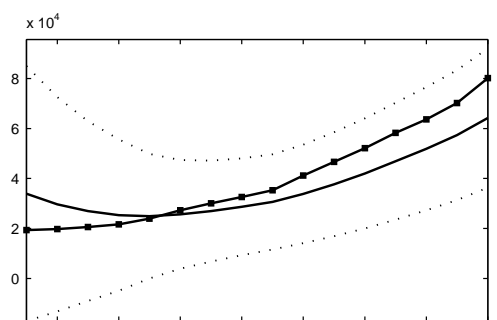


Jednoduše exponenciální vyrovnání *adaptivní procedura*

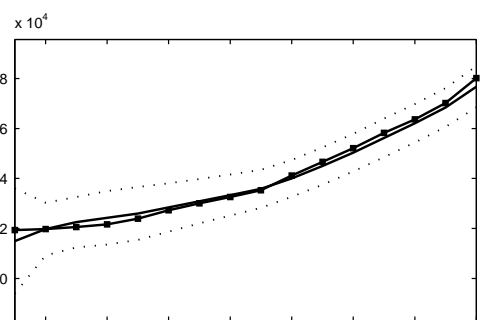


Dvojitě exponenciální vyrovnání *adaptivní procedura*

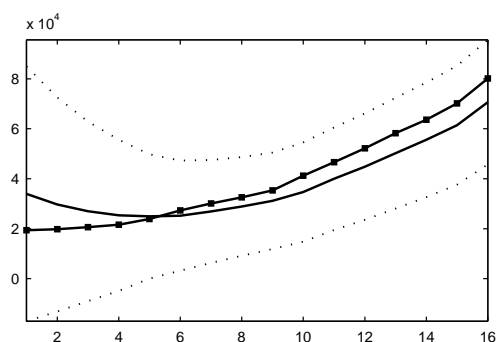
Rocní vývozy zahr. obchodu (v milionech Kčs) v CSSR v letech 1965–1980



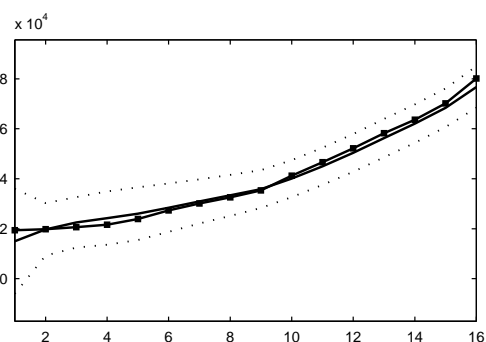
Jednoduše exponenciální vyrovnání $\alpha=0.70$



Dvojitě exponenciální vyrovnání $\alpha=0.70$

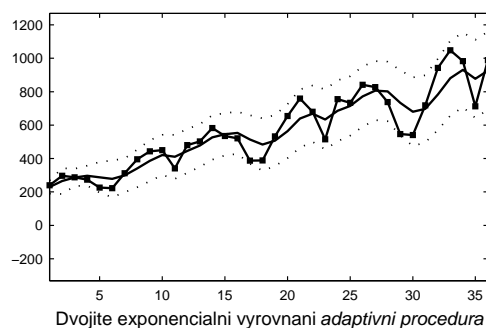
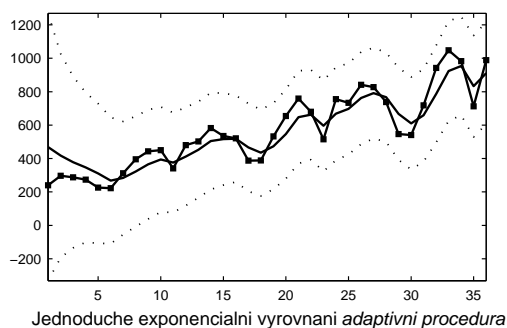
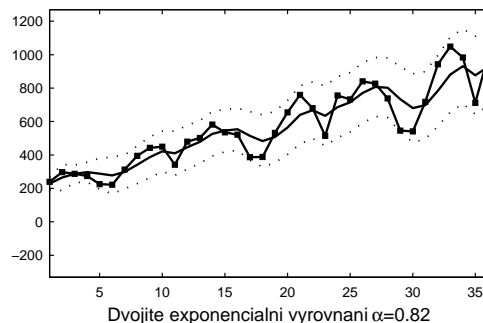
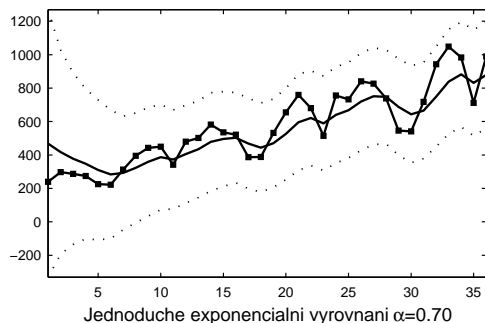


Jednoduše exponenciální vyrovnání *adaptivní procedura*

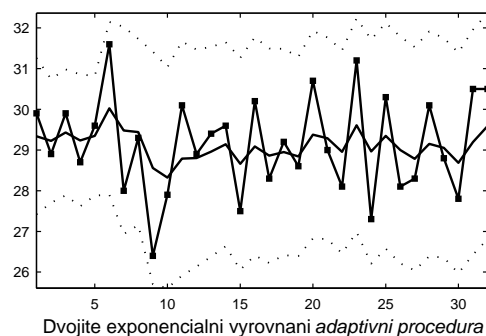
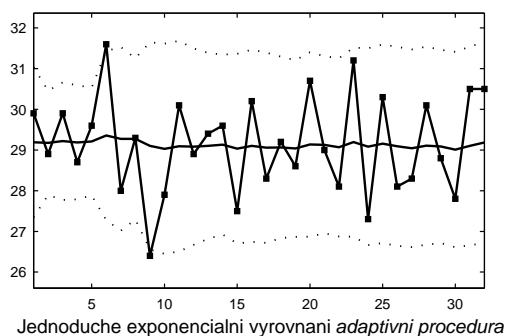
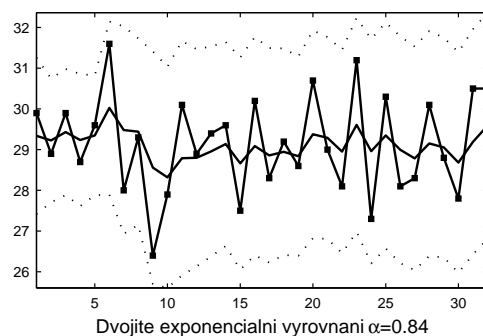
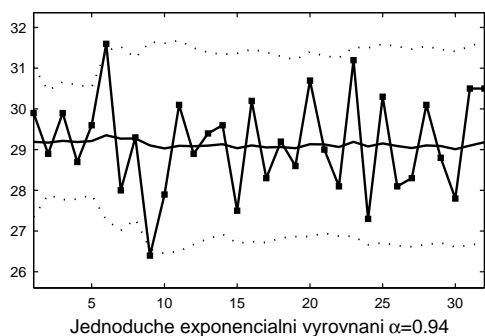


Dvojitě exponenciální vyrovnání *adaptivní procedura*

Zaznamy okr.spravy o mesicnich poctech deti ve skolach v prirode(1980–1982).



Tydenni objemy zakazek (v tisicich Kc) prijatyh jistou zakazkovou prodejnu.



3.3.4 Sezónnost

Sezónní složka je periodická složka, jejíž délka periody je kratší. Délku periody lze zpravidla rozpoznat už na základě intuitivní úvahy, neboť pravidelnost oscilací v sezónních řadách se velmi často připisuje působení sluneční soustavy na průběh těchto dějů. Vliv oběhu Země kolem Slunce se promítá buď přímo (klimatické podmínky), anebo ve zprostředkovaných, nepřímých souvislostech (např. ukazatele cestovního ruchu).

Metoda malého trendu

Uvažujme regresní model ve tvaru:

$$Y_t = Tr_t + Sz_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Přeindexujme Y_1, \dots, Y_n na Y_{jk} , $j = 1, \dots, r$ $r \dots$ počet sezón
 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ε_{jk} , $k = 1, \dots, d$ $d \dots$ délka sezóny.

Předpokládejme, že trend je konstantní pro j -tou sezónu, tj. $Tr_j = m_j$
a rovněž sezónní hodnota je konstantní pro k -tou sezónní složku, tj. $Sz_k = s_k$.

Regresní model můžeme napsat ve tvaru

$$Y_{jk} = m_j + s_k + \varepsilon_{jk} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad j = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, d.$$

Maticově, lze tento model zepsat takto

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{Y_{1d}}{Y_{21}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{Y_{2d}}{\vdots} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{Y_{r1}}{\vdots} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{rd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{\dots}{0} & \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} & \frac{0}{0} & | & \frac{0}{1} & \frac{\dots}{0} & \frac{0}{\dots} & \frac{1}{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{0}{0} & \frac{1}{0} & \frac{0}{0} & \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{0} & \frac{\dots}{1} & \frac{0}{0} & | & \frac{0}{1} & \frac{\dots}{0} & \frac{0}{\dots} & \frac{1}{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{0}{0} & \frac{0}{0} & \frac{0}{0} & \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} & \frac{1}{0} & \frac{0}{1} & | & \frac{0}{1} & \frac{\dots}{0} & \frac{0}{\dots} & \frac{1}{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & | & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \\ s_1 \\ \vdots \\ s_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon_{1d}}{\varepsilon_{21}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon_{2d}}{\vdots} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon_{r1}}{\vdots} \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_{rd} \end{pmatrix}$$

Maticové plánu však není plné hodnosti, neboť když sečteme prvních r sloupců, dostaneme vektor samých jedniček, což je rovno také součtu posledních d sloupců. Proto přidejme ještě jednu podmínku, a to

$$\sum_{k=1}^d s_k = 0.$$

Potom

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} d & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & d & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{\cdots} & \underline{0} & \underline{d} & \underline{1} & \underline{\cdots} & \underline{\cdots} & \underline{1} \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & r \end{array} \right)$$

a

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{1\cdot} \\ \vdots \\ Y_{r\cdot} \\ Y_{\cdot 1} \\ \vdots \\ Y_{\cdot d} \end{pmatrix},$$

kde využíváme tzv. tečkové notace

$$Y_{j\cdot} = \sum_{i=1}^d Y_{ji}$$

$$Y_{\cdot k} = \sum_{i=1}^r Y_{ik}.$$

Normální rovnice

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

můžeme přepsat pro

$$j = 1, \dots, r$$

$$k = 1, \dots, d$$

do tvaru

$$dm_j + \underbrace{\sum_{i=1}^d s_i}_{=0} = Y_{j\cdot} \Rightarrow \boxed{m_j = \frac{1}{d}Y_{j\cdot} = \bar{Y}_j}$$

$$\sum_{i=1}^r m_i + rs_k = Y_{\cdot k} \Rightarrow rs_k = Y_{\cdot k} - \sum_{i=1}^r m_i = \sum_{i=1}^r (Y_{ik} - m_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{s_k = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (Y_{ik} - m_i)}$$

Model: polynomický trend za celé období spolu se sezónností

Uvažujme regresní model ve tvaru:

$$Y_t = Tr_t + Sz_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Přeindexujme Y_1, \dots, Y_n na Y_{jk} , $j = 1, \dots, r$ $r \dots$ počet sezón
 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ε_{jk} , $k = 1, \dots, d$ $d \dots$ délka sezóny.

Předpokládejme, že trend je polynomický za celé období, tj. $Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_m t^m$
a sezónní hodnota je konstantní pro k -tou sezónní složku, tj. $Sz_k = s_k$.

Regresní model můžeme napsat ve tvaru:

$$Y_{jk} = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_m t^m + s_k + \varepsilon_{jk} \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, r \\ k = 1, \dots, d \\ t = (j-1)d + k \end{array}$$

Matice plánu je pak tvaru

$$\mathbf{X}^* = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \dots & 1^m & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 2^m & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \underline{1} & \underline{d} & \underline{\dots} & \underline{d^m} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\dots} & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & d+1 & \dots & (d+1)^m & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & d+2 & \dots & (d+2)^m & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \underline{1} & \underline{2d} & \underline{\dots} & \underline{(2d)^m} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\dots} & \underline{0} & \underline{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\dots} & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & (r-1)d+1 & \dots & [(r-1)d+1]^m & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (r-1)d+2 & \dots & [(r-1)d+2]^m & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & rd & \dots & (rd)^m & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Matice plánu však není plné hodnosti, neboť když sečteme posledních d sloupců, dostaneme vektor samých jedniček. Proto použijeme tzv. *metodu horního rohu* a položíme první sezónu rovnu nule

$$s_1 = 0.$$

Za těchto předpokladů lze model maticově napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{Y_{1d}} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{Y_{2d}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{Y_{r1}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{rd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1^m & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 2^m & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \underline{1} & \underline{d} & \underline{\dots} & \underline{d^m} & | & \underline{0} & \underline{\dots} & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & d+1 & \dots & (d+1)^m & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & d+2 & \dots & (d+2)^m & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \underline{1} & \underline{2d} & \underline{\dots} & \underline{(2d)^m} & | & \underline{0} & \underline{\dots} & \underline{0} & \underline{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \underline{0} & \underline{\dots} & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & (r-1)d+1 & \dots & [(r-1)d+1]^m & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (r-1)d+2 & \dots & [(r-1)d+2]^m & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & rd & \dots & (rd)^m & | & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \\ s_2 \\ \vdots \\ s_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon_{1d}} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon_{2d}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon_{r1}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_{rd} \end{pmatrix}$$

Odhad vektoru neznámých parametrů metodou nejmenších čtverců je dán vztahem

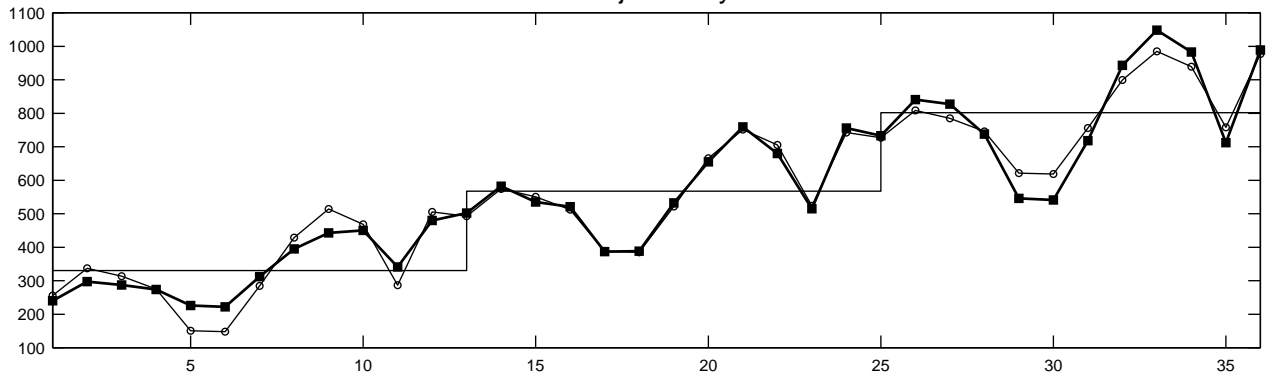
$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_m \\ \hat{s}_2 \\ \vdots \\ \hat{s}_d \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Srovnání obou modelů na konkrétních příkladech

Závěrem provedme jednoduché srovnání obou předchozích modelů. Jak je vidět z následujících obrázků i velice jednoduchý model s konstantním trendem po celou dobu sezóny dává u obou časových řad lepší výsledky než komplikovanější a výpočetně náročnější druhý model, viz např. hodnota

$$SSE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2.$$

Metoda konstantního trendu v jednotlivých sezonách–aditivní model

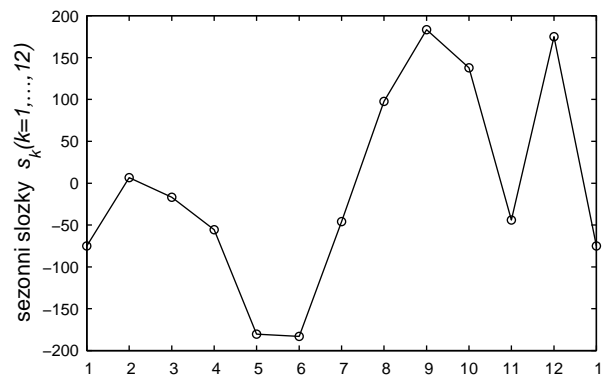


Zaznamy okr.spravy o měsíčních počtech dětí ve školách v přírodě(1980–1982).

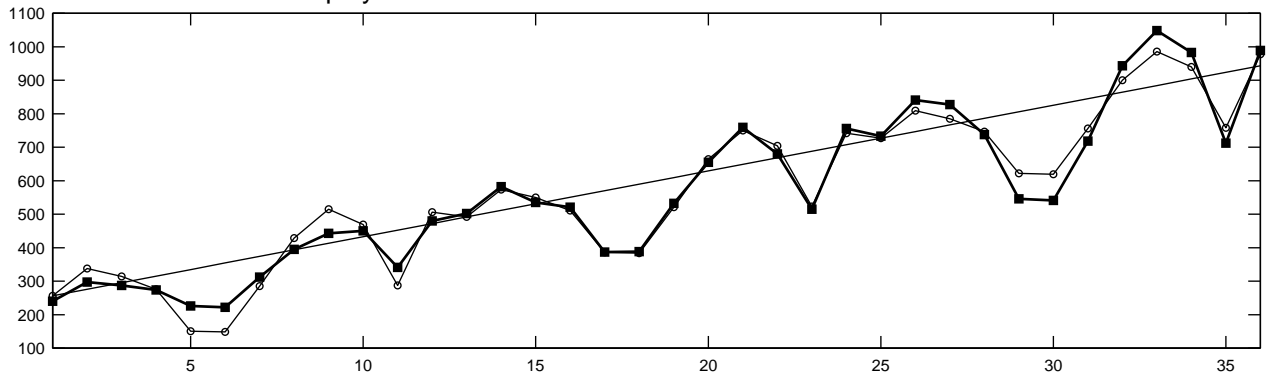
$$Y_{jk} = m_j + s_k + \epsilon_{jk} \quad j=1, \dots, 3 \quad k=1, \dots, 12$$

$s_1 = -74.9444$	$m_1 = 330.5833$
$s_2 = 6.7222$	$m_2 = 567.6667$
$s_3 = -16.9444$	$m_3 = 801.5833$
$s_4 = -55.6111$	
$s_5 = -180.2778$	
$s_6 = -182.9444$	
$s_7 = -45.9444$	
$s_8 = 97.7222$	
$s_9 = 183.3889$	
$s_{10} = 137.7222$	
$s_{11} = -43.9444$	
$s_{12} = 175.0556$	

SSE=52446.611111



Metoda polynomickeho trendu za cele obdobi+sezonnost–aditivní model

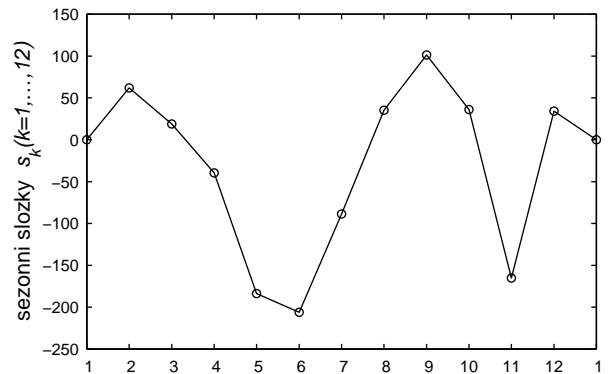


Zaznamy okr.spravy o měsíčních počtech dětí ve školách v přírodě(1980–1982).

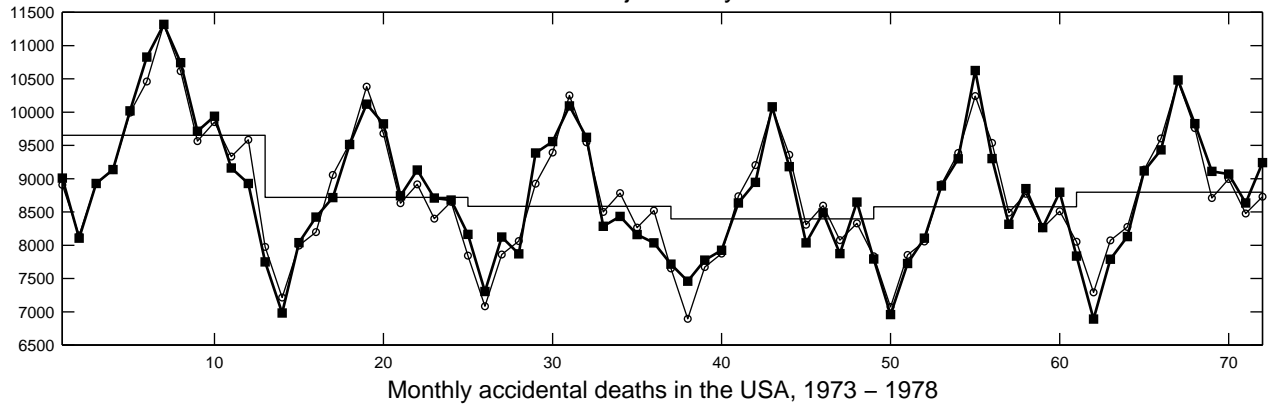
$$Y_{jk} = \beta_0 + \beta_1 t + s_2 + \dots + s_d + \epsilon_{jk} \quad j=1, \dots, 3 \quad k=1, \dots, 12 \quad t=(j-1)d+k$$

$s_2 = 62.04167$	$\beta_0 = 236.5417$
$s_3 = 18.75$	$\beta_1 = 19.6250$
$s_4 = -39.54167$	
$s_5 = -183.8333$	
$s_6 = -206.125$	
$s_7 = -88.75$	
$s_8 = 35.29167$	
$s_9 = 101.3333$	
$s_{10} = 36.04167$	
$s_{11} = -165.25$	
$s_{12} = 34.125$	

SSE=52466.666667



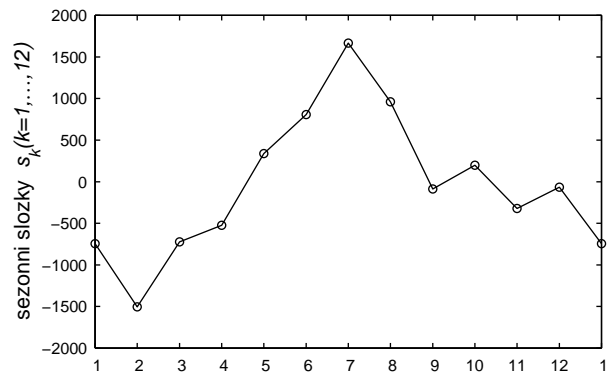
Metoda konstantního trendu v jednotlivých sezonách–aditivní model



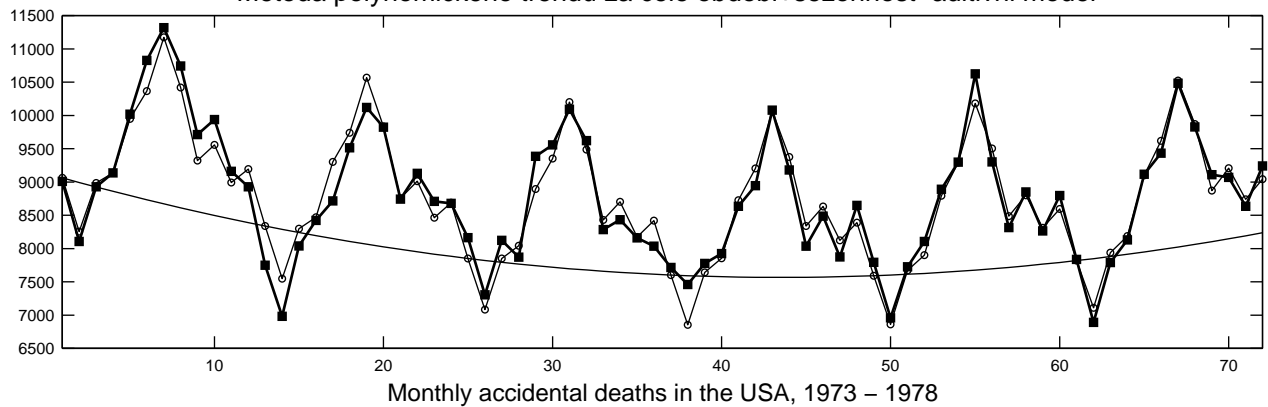
$$Y_{jk} = m_j + s_k + \epsilon_{jk} \quad j=1, \dots, 6 \quad k=1, \dots, 12$$

$s_1 = -743.7361$	$m_1 = 9651.7500$
$s_2 = -1503.9028$	$m_2 = 8718.5000$
$s_3 = -723.9028$	$m_3 = 8585.8333$
$s_4 = -522.9028$	$m_4 = 8396.7500$
$s_5 = 338.4306$	$m_5 = 8576.8333$
$s_6 = 807.5972$	$m_6 = 8796.7500$
$s_7 = 1665.0972$	
$s_8 = 961.4306$	
$s_9 = -87.4028$	
$s_{10} = 196.9306$	
$s_{11} = -320.5694$	
$s_{12} = -67.0694$	

SSE=3955160.263889



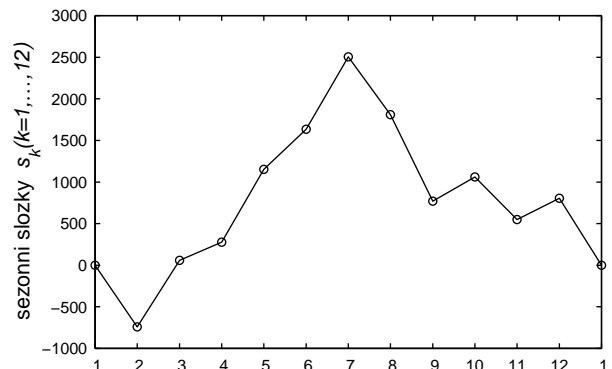
Metoda polynomickeho trendu za cele obdobi+sezonnost–aditivní model



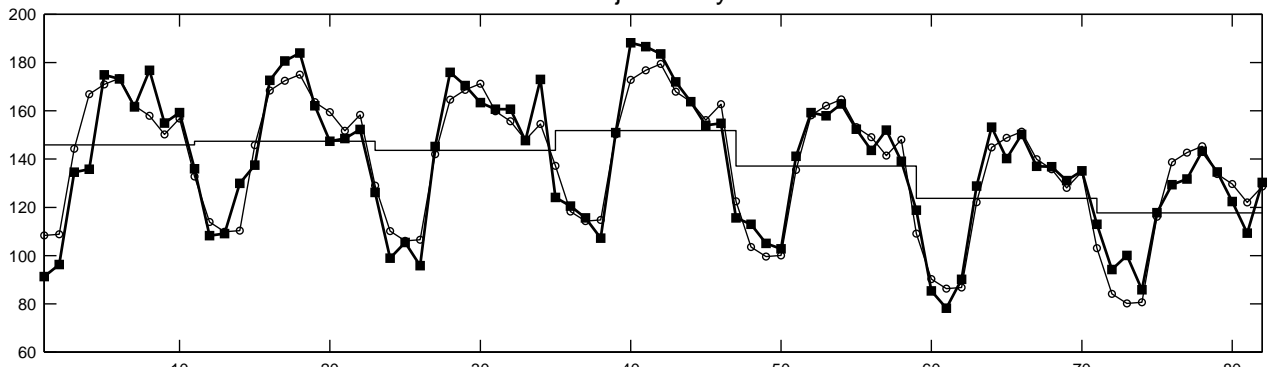
$$Y_{jk} = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + s_k + \epsilon_{jk} \quad j=1, \dots, 6 \quad k=1, \dots, 12 \quad t=(j-1)d+k$$

$s_2 = -740.26057$	$\beta_0 = 9133.8707$
$s_3 = 57.992433$	$\beta_1 = -71.9782$
$s_4 = 275.59236$	$\beta_2 = 0.8265$
$s_5 = 1151.8725$	
$s_6 = 1634.333$	
$s_7 = 2503.4736$	
$s_8 = 1809.7946$	
$s_9 = 769.29573$	
$s_{10} = 1060.3105$	
$s_{11} = 547.83883$	
$s_{12} = 804.71409$	

SSE=4400371.750159



Metoda konstantního trendu v jednotlivých sezonách–aditivní model

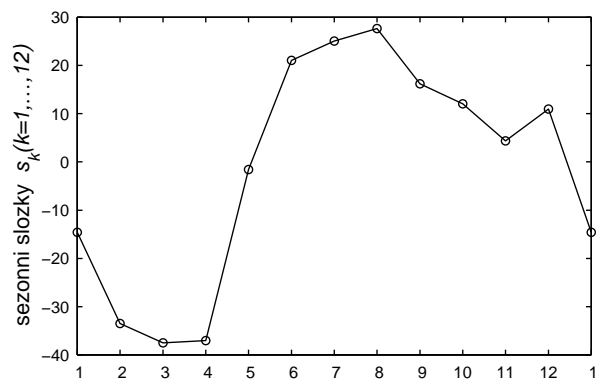


Monthly housing starts, construction contracts and average new home mortgage rates. Jan 83 – Oct 89.

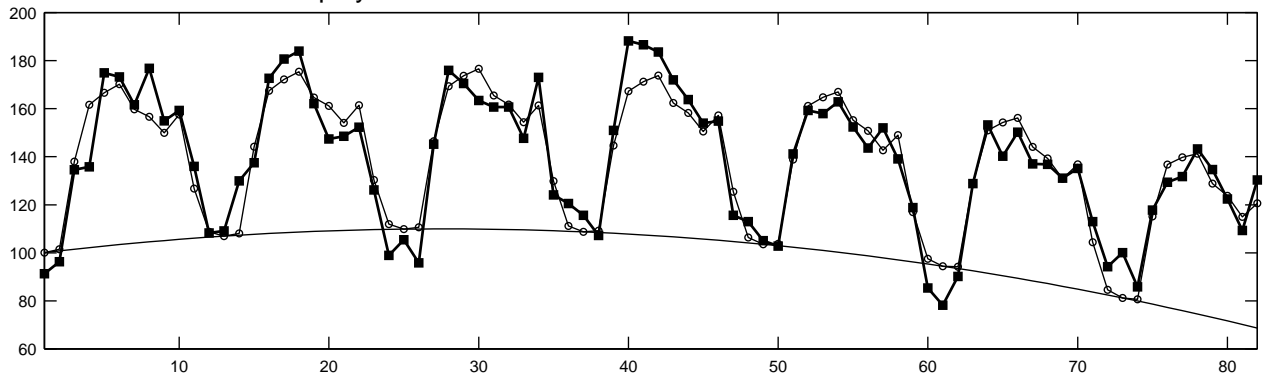
$$Y_{jk} = m_j + s_k + \epsilon_{jk} \quad j=1, \dots, 7 \quad k=1, \dots, 12$$

$s_1 = -14.5972$	$m_1 = 145.8700$
$s_2 = -33.4972$	$m_2 = 147.3833$
$s_3 = -37.4790$	$m_3 = 143.6250$
$s_4 = -37.0076$	$m_4 = 151.7833$
$s_5 = -1.5790$	$m_5 = 137.0833$
$s_6 = 21.0638$	$m_6 = 123.7500$
$s_7 = 25.0638$	$m_7 = 117.6583$
$s_8 = 27.6210$	
$s_9 = 16.1924$	
$s_{10} = 12.0495$	
$s_{11} = 4.3352$	
$s_{12} = 10.9638$	

SSE=6168.987177



Metoda polynomickeho trendu za cele období+sezonnost–aditivní model

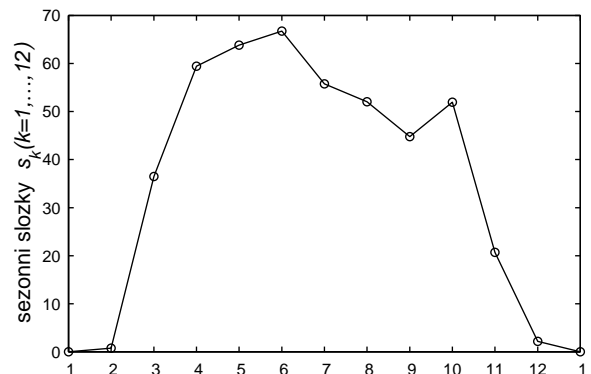


Monthly housing starts, construction contracts and average new home mortgage rates. Jan 83 – Oct 89.

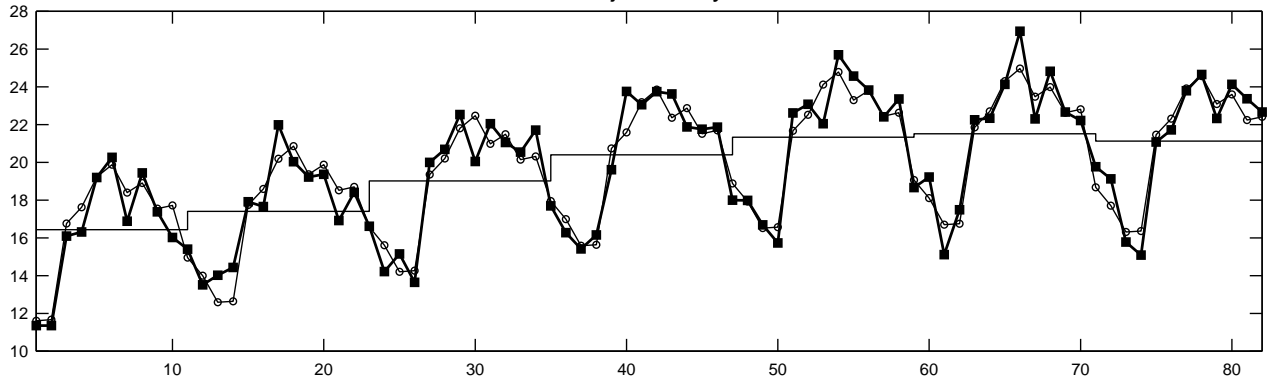
$$Y_{jk} = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + s_k + \epsilon_{jk} \quad j=1, \dots, 7 \quad k=1, \dots, 12 \quad t=(j-1) \cdot d + k$$

$s_2 = 0.746834$	$\beta_0 = 99.2911$
$s_3 = 36.4787$	$\beta_1 = 0.7714$
$s_4 = 59.4528$	$\beta_2 = -0.0140$
$s_5 = 63.812$	
$s_6 = 66.7562$	
$s_7 = 55.7426$	
$s_8 = 52.0426$	
$s_9 = 44.7991$	
$s_{10} = 51.9264$	
$s_{11} = 20.6894$	
$s_{12} = 2.17645$	

SSE=6407.767450



Metoda konstantního trendu v jednotlivých sezonach–aditivní model

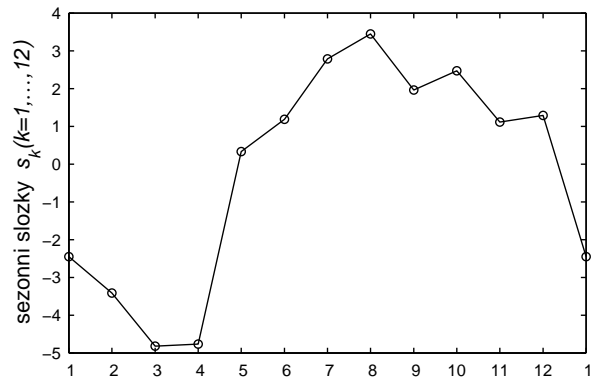


Monthly housing starts, construction contracts and average new home mortgage rates. Jan 83 – Oct 89.

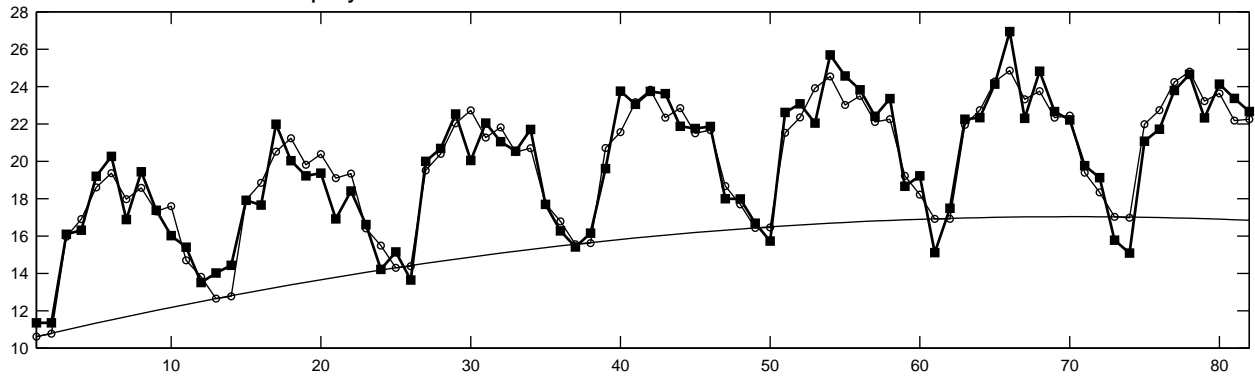
$$Y_{jk} = m_j + s_k + \epsilon_{jk} \quad j=1, \dots, 7 \quad k=1, \dots, 12$$

$s_1 = -2.4461$	$m_1 = 16.4329$
$s_2 = -3.4113$	$m_2 = 17.4090$
$s_3 = -4.8158$	$m_3 = 19.0226$
$s_4 = -4.7619$	$m_4 = 20.4023$
$s_5 = 0.3358$	$m_5 = 21.3367$
$s_6 = 1.1881$	$m_6 = 21.5169$
$s_7 = 2.7885$	$m_7 = 21.1252$
$s_8 = 3.4471$	
$s_9 = 1.9625$	
$s_{10} = 2.4702$	
$s_{11} = 1.1171$	
$s_{12} = 1.2892$	

SSE=73.522167



Metoda polynomickeho trendu za cele obdobi+sezonnost–aditivní model

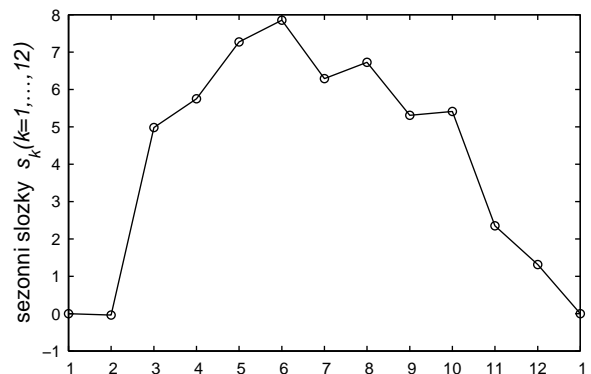


Monthly housing starts, construction contracts and average new home mortgage rates. Jan 83 – Oct 89.

$$Y_{jk} = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + s_j + \dots + s_d + \epsilon_{jk} \quad j=1, \dots, 7 \quad k=1, \dots, 12 \quad t=(j-1) \cdot d + k$$

$s_2 = -0.033788$	$\beta_0 = 10.4319$
$s_3 = 4.979$	$\beta_1 = 0.1885$
$s_4 = 5.749$	$\beta_2 = -0.0013$
$s_5 = 7.2698$	
$s_6 = 7.8515$	
$s_7 = 6.2928$	
$s_8 = 6.729$	
$s_9 = 5.307$	
$s_{10} = 5.413$	
$s_{11} = 2.3544$	
$s_{12} = 1.3124$	

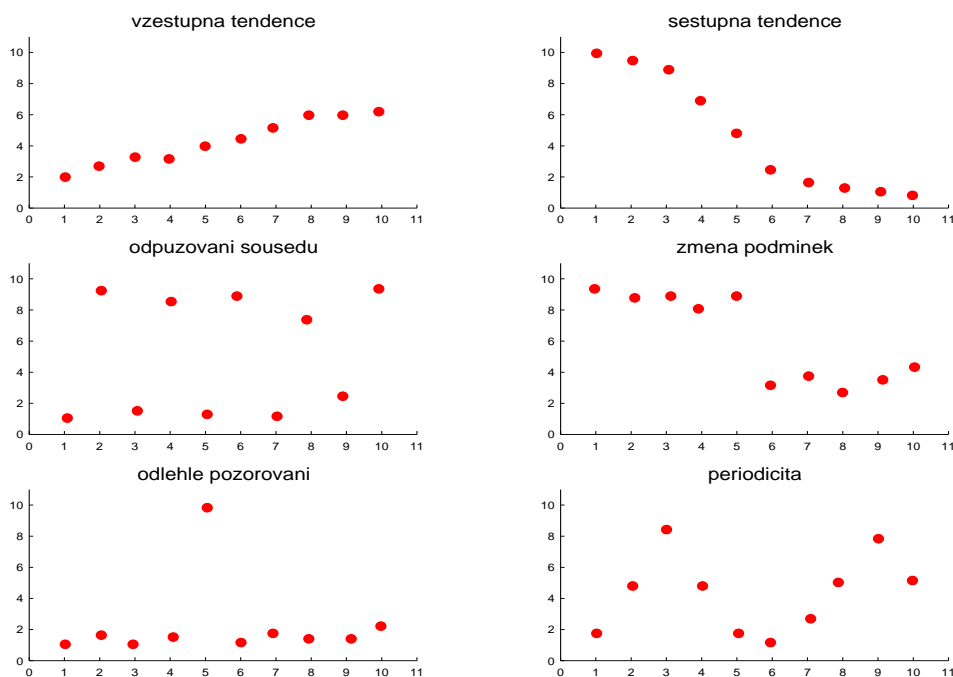
SSE=80.231739



3.3.5 Analýza reziduální (náhodné) složky

Někdy se stane, že časová řada předložená k analýze nevykazuje při zběžné prohlídce nebo grafickém znázornění výskyt žádné systematické složky, takže se zdá, že je **tvořena pouze bílým šumem**. Pro jistotu však je vhodné provést nějaký objektivní statistický test, který by tuto hypotézu potvrdil.

Testy náhodnosti se také někdy používají v situaci, kdy je nutné po provedení dekompozice určité řady ověřit, zda jsme skutečně všechny systematické složky z řady eliminovali tak, že zbytek po eliminaci jsou opravdu už jen náhodné fluktuace ve tvaru bílého šumu. Takové použití testů z této kapitoly však není z čistě teoretického hlediska korektní, neboť testované časové řady jsou pak již zatíženy určitými odhadovými chybami a často ani nejsou tvořeny nekorelovanými veličinami.



Obrázek 3.7: Typy porušení náhodnosti.

TESTY NÁHODNOSTI

Testy náhodnosti jsou testy statistické hypotézy, že Y_1, \dots, Y_n jsou **náhodným výběrem** z nějakého rozdělení s distribuční funkcí F . Jinými slovy test náhodnosti je test nulové hypotézy, která tvrdí, že sdružená distribuční funkce je součinem marginálních, tj. platí

$$P(Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n) = \prod_{i=1}^n F(y_i).$$

Ve všech testech budeme testovat tuto nulovou hypotézu:

H_0 : časová řada je realizací vzájemně nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin

Jestliže časová řada má nenulovou střední hodnotu μ , budeme vyšetřovat **centrovanou časovou řadu** $Z_t = Y_t - \mu$.

TEST ZALOŽENÝ NA ZNAMÉNKÁCH PRVNÍCH DIFERENCÍ (The Difference-Sign Test)

Označme S_Δ počet kladných prvních diferencí posloupnosti Y_1, \dots, Y_n . Jsou-li některé sousední hodnoty stejné, vyškrtněme je kromě té první.

Věta 3.3.7.

Za platnosti H_0 má statistika S_Δ tyto vlastnosti:

$$ES_\Delta = \frac{n-1}{2} \quad DS_\Delta = \frac{n+1}{12} \quad \Rightarrow \quad U_\Delta = \frac{S_\Delta - ES_\Delta}{\sqrt{DS_\Delta}} \overset{\Delta}{\sim} N(0, 1)$$

DŮKAZ. Tento test poprvé zavedli Moore, G.H., Wallis, W.A.: *Time Series Significance Tests Based on Signs of Differences*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 38, Issue 222, (Jun., 1943), 153-164.

Položme
$$V_t = \begin{cases} 1 & Y_{t+1} > Y_t \\ 0 & Y_{t+1} < Y_t \end{cases} \Rightarrow V_t \sim A\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{aligned} EV_t &= \frac{1}{2} \\ DV_t &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Pomocí V_t vyjádříme $S_\Delta = \sum_{t=1}^{n-1} V_t \Rightarrow ES_\Delta = (n-1)\frac{1}{2}$ a $DS_\Delta = \sum_{t=1}^{n-1} DV_t + 2 \sum_{t,s=1, t < s}^{n-1} C(V_t, V_s)$.

Kovariance $C(V_t, V_s)$ jsou nenulové pouze pro sousední difference, proto počítejme

$$C(V_{i-1}, V_i) = E(V_{i-1} \cdot V_i) - EV_{i-1} \cdot EV_i.$$

Abychom mohli spočítat

$$E(V_{i-1} \cdot V_i) = \sum_{(v_{i-1}, v_i) \in \{0,1\}^2} v_{i-1} \cdot v_i \cdot P(V_{i-1} = v_{i-1}, V_i = v_i) = \sum_{(v_{i-1}, v_i) \in \{0,1\}^2} v_{i-1} \cdot v_i \cdot p(v_{i-1}, v_i)$$

musíme odvodit sdruženou pravděpodobnostní funkci $p(v_{i-1}, v_i)$.

Víme, že pouze kovariance $C(V_{i-1}, V_i)$ spočítané pro $n-2$ trojic (Y_{i-1}, Y_i, Y_{i+1}) jsou nenulové. Pokud platí $Y_{i-1} < Y_i < Y_{i+1}$, označme si tuto skutečnost trojicí (1 2 3). Následující tabulka uvádí pro všechny možné případy uspořádání (kterých je $3! = 6$) odpovídající hodnoty proměnných V_{i-1}, V_i .

Y_{i-1}	Y_i	Y_{i+1}	V_{i-1}	V_i
1	2	3	0	0
1	3	2	0	1
2	1	3	1	0
3	1	2	1	0
2	3	1	0	1
3	2	1	1	1

Platí-li nulová hypotéza, pak všech 6 možností je stejně pravděpodobných, tj. platí $P(V_{i-1} = v_{i-1}, V_i = v_i) = \frac{1}{6}$ a odtud dostaneme

$$\begin{aligned} E(V_{i-1} \cdot V_i) &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \\ C(V_{i-1}, V_i) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{12} \\ DS_\Delta &= \sum_{t=1}^{n-1} DV_t + 2 \sum_{t=2}^{n-1} C(V_{t-1}, V_t) = (n-1)\frac{1}{4} - 2(n-2)\frac{1}{12} = \frac{n+1}{12}. \end{aligned}$$

K odvození asymptotického rozdělení se využije centrální limitní věta pro korelované posloupnosti (viz Stuart, A.: *The Power of Two Difference-Sign Tests*, Vol. 47, Issue 259, Sep. 1952, 416-424). \square

Hypotézu H_0 **zamítáme**, pokud počet kladných prvních diferencí je příliš velký nebo malý, tj. pokud $|U_\Delta| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

TEST ZALOŽENÝ NA BODECH ZVRATU (The Turning Point Test)

Označme S_Z ... počet horních a dolních bodů zvratu

tj. Y_t je **horní bod zvratu**, pokud $Y_{t-1} < Y_t > Y_{t+1}$

a Y_t je **dolní bod zvratu**, pokud $Y_{t-1} > Y_t < Y_{t+1}$

jsou-li některé sousední hodnoty stejné \Rightarrow vyškrtnout až na první.

Věta 3.3.8.

Za platnosti H_0 má statistika S_Z tyto vlastnosti:

$$ES_Z = \frac{2(n-2)}{3} \quad DS_Z = \frac{16n-29}{90} \quad \Rightarrow \quad U_Z = \frac{S_Z - ES_Z}{\sqrt{DS_Z}} \stackrel{A}{\sim} N(0, 1)$$

DŮKAZ. viz Moore, G.H., Wallis, W.A.: *A Significance Test for Time Series Analysis*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 36, Issue 215, (Sep., 1941), 401-409 \square

Hypotézu H_0 **zamítáme**, pokud počet bodů zvratu je příliš velký nebo malý, tj. pokud $|U_Z| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

TEST ZALOŽENÝ NA KENDALOVĚ KOEFICIENTU τ

Označme S_τ ... počet takových dvojic Y_t a Y_s , že $Y_t < Y_s$ pro $t < s$.

jsou-li některé hodnoty stejné \Rightarrow vyškrtnou se až na první.

Protože dvojic (Y_t, Y_s) , kde $t \neq s$, je $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ a možnosti $Y_t < Y_s$ a $Y_t > Y_s$ mají za platnosti nulové hypotézy stejnou pravděpodobnost, pak

$$ES_\tau = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4},$$

proto častěji se používá tzv. **Kendalův koeficient pořadové korelace** τ definovaný

$$\tau = \frac{4S_\tau}{n(n-1)} - 1.$$

Věta 3.3.9.

Za platnosti H_0 má statistika τ tyto vlastnosti:

$$E\tau = 0 \quad D\tau = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)} \quad \Rightarrow \quad U_\tau = \frac{\tau - E\tau}{\sqrt{D\tau}} \stackrel{A}{\sim} N(0, 1)$$

DŮKAZ. viz Mann, H.B.: *Non-parametric tests against trend*, Econometrica, 13, (1945), 245-259. \square

Hypotézu H_0 **zamítáme**, pokud počet definovaných dvojic je příliš velký nebo malý, tj. pokud $|U_\tau| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

TEST ZALOŽENÝ NA SPEARMANOVĚ KOEFICIENTU ρ

Nechť náhodné veličiny R_1, \dots, R_n označují **pořadí hodnot** náhodných veličin ve výběru Y_1, \dots, Y_n . **Spearmanův koeficient pořadové korelace** ρ je definovaný takto:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (i - R_i)^2.$$

Věta 3.3.10.

Za platnosti H_0 má statistika τ tyto vlastnosti:

$$E\rho = 0 \quad D\rho = \frac{1}{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad U_\rho = \frac{\rho - E\rho}{\sqrt{D\rho}} \stackrel{\Delta}{\approx} N(0, 1)$$

DŮKAZ. viz Daniels, H.E.: *Rank correlation and population models*, J. R. Statist. Soc., B, 12 (1950), 171-181. \square

Hypotézu H_0 **zamítáme**, pokud $|U_\rho| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

TEST ZALOŽENÝ NA POČTU ITERACÍ DVOU PRVKŮ

Mějme posloupnost n prvků, kde je $\boxed{n_1}$ prvků prvního druhu a $\boxed{n_2}$ prvků druhého druhu: $n = n_1 + n_2$. Vybírejme náhodně z tohoto souboru postupně prvky (bez vracení) až do úplného vybrání. Všech takto vybíraných n -tic je $\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$ a všechny mají stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{\binom{n}{n_1}} = \frac{1}{\binom{n}{n_2}}$. **Iterací** (sérií) rozumíme každou částečnou posloupnost této posloupnosti obsahující pouze prvky jednoho druhu a ohraničenou z každé strany prvkem druhého druhu, nebo začátkem, nebo koncem posloupnosti.

Příklad iterace (série):

$$\left(\underbrace{aa}_1 \underbrace{bb}_2 \underbrace{a}_3 \underbrace{bbb}_4 \underbrace{aa}_5 \underbrace{bb}_6 \underbrace{aaaa}_7 \right)$$

Nechť $\boxed{S_I}$ je **počet iterací**.

Pak platí

$$ES_I = \frac{2n_1n_2}{n} + 1 \quad \text{a} \quad DS_I = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{n^2(n-1)}.$$

Pokud

$$n_1 \rightarrow \infty, \quad n_2 \rightarrow \infty \quad \text{a} \quad \frac{n_1}{n_2} \rightarrow c \in (0, 1),$$

pak

$$U_I = \frac{S_I - ES_I}{\sqrt{DS_I}} \stackrel{\Delta}{\approx} N(0, 1).$$

Iterace se používají právě k ověřování hypotézy, že daná posloupnost prvků dvojího druhu je uspořádána náhodně, tj. že při jejím vzniku mělo každé z možných uspořádání stejnou pravděpodobnost. Jako alternativní hypotézy přicházejí v úvahu 3 možnosti:

H_1 prvky stejného druhu mají tendenci sdružovat se ve skupiny, takže posloupnosti s malým počtem iterací mají větší pravděpodobnost, než ostatní. **Hypotézu H_0 zamítáme proti alternativě H_1 , jestliže**

$$U_I \leq u_\alpha.$$

H_2 prvky stejného druhu tvoří zřídka větší skupiny, takže posloupnosti s větším počtem iterací mají větší pravděpodobnost, než ostatní. **Hypotézu H_0 zamítáme proti alternativě H_2 , jestliže**

$$U_I \geq u_{1-\alpha}.$$

H_3 spojuje obě předchozí. **Hypotézu H_0 zamítáme proti alternativě H_3 , jestliže**

$$|U_I| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

MEDIÁNOVÝ TEST

Mediánový test pro testování hypotézy, že Y_1, \dots, Y_n je posloupnost nezávislých pozorování, volí **výběrový medián**

$$\tilde{Y} = \begin{cases} Y_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ liché} \\ \frac{1}{2} \left(Y_{(\frac{n}{2})} + Y_{(\frac{n}{2}+1)} \right) & n \text{ sudé} \end{cases},$$

kde $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ je uspořádáním Y_1, \dots, Y_n .

Je-li $Y_i > \tilde{Y}$ nahradíme jej prvkem a ,
 $Y_i < \tilde{Y}$ nahradíme jej prvkem b , pro $i = 1, \dots, n$.

Medián rozdělí n prvků přesně na dvě skupiny $n = 2m$.

Označme S_m počet iterací (sérií) v posloupnosti vytvořené podle předchozího pravidla.

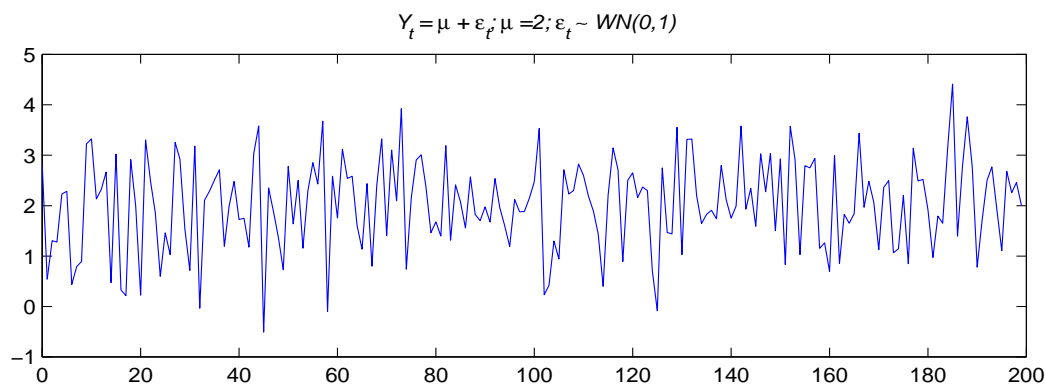
Věta 3.3.11.

Za platnosti H_0 má statistika S_m tyto vlastnosti:

$$ES_m = m + 1 \quad DS_m = \frac{m(m-1)}{(2m-1)} \quad \Rightarrow \quad U_{S_m} = \frac{S_m - ES_m}{\sqrt{DS_m}} \overset{\Delta}{\sim} N(0, 1).$$

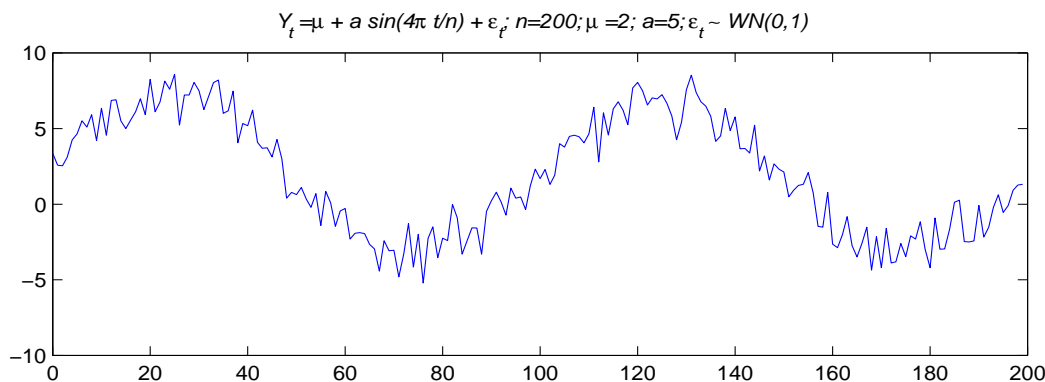
Alternativa H_1 je citlivá vůči vzestupné či sestupné tendenci, dlouhým periodám, náhlé změně podmínek.

Alternativa H_2 je citlivá vůči krátké periodě, odpuzování sousedů.



H₀: Test hypothesis of data being white noise (1=not rejected; 0=rejected):

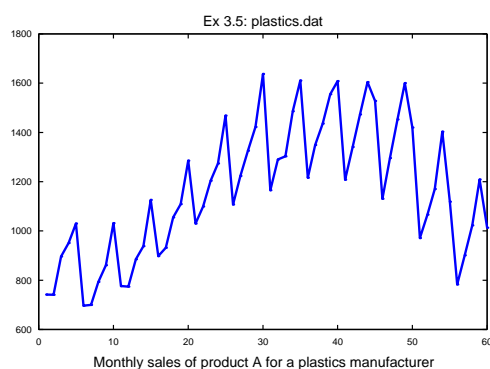
Test based on sign differences:	1	0.122169444	100
Test based on runs up and down:	1	1.0108213	138
Test based on Kendall coefficient:	1	1.20890794	10522
Test based on Spearman coefficient:	1	1.204696	0.085398635
Median test:	1	0.141778031	102



H₀: Test hypothesis of data being white noise (1=not rejected; 0=rejected):

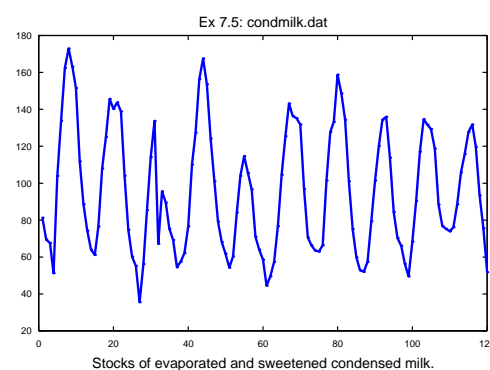
Test based on sign differences:	1	1.3438639	105
Test based on runs up and down:	1	0.84235108	127
Test based on Kendall coefficient:	0	5.499263	7348
Test based on Spearman coefficient:	0	5.6226341	-0.39857796
Median test:	0	13.185357	8

Obrázek 3.8: Demonstrace citlivosti testů náhodnosti na simulovaných datech.



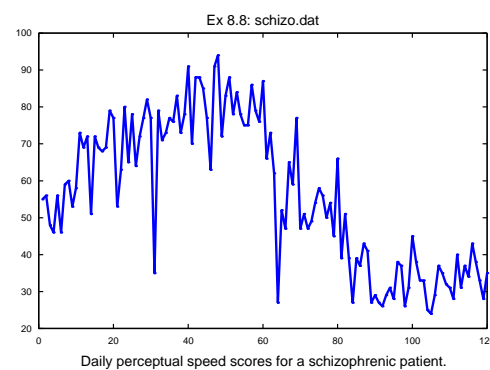
H_0 : Test hypothesis of data being white noise (1=not rejected; 0=rejected):

Test based on sign differences:	0	5.5441595	42
Test based on runs up and down:	0	4.5601364	24
Test based on Kendall coefficient:	0	4.2221884	1216
Test based on Spearman coefficient:	0	3.8574334	0.50219505
Median test:	0	4.6874741	13



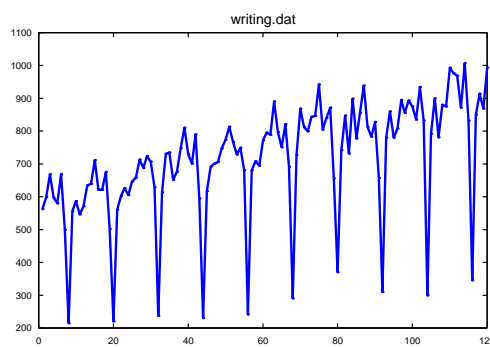
H_0 : Test hypothesis of data being white noise (1=not rejected; 0=rejected):

Test based on sign differences:	0	2.3618875	52
Test based on runs up and down:	0	11.92609	24
Test based on Kendall coefficient:	1	0.31755367	3500
Test based on Spearman coefficient:	1	0.24887228	-0.022814084
Median test:	0	6.9671546	23



H_0 : Test hypothesis of data being white noise (1=not rejected; 0=rejected):

Test based on sign differences:	1	0.95668921	55
Test based on runs up and down:	1	0.29464381	78
Test based on Kendall coefficient:	0	7.1177388	2001
Test based on Spearman coefficient:	0	7.0656999	-0.64771165
Median test:	0	7.211366	21



H_0 : Test hypothesis of data being white noise (1=not rejected; 0=rejected):

Test based on sign differences:	1	1.7320508	65
Test based on runs up and down:	0	2.7633623	66
Test based on Kendall coefficient:	0	9.0275973	5560
Test based on Spearman coefficient:	0	7.814135	0.71632058
Median test:	0	6.7838084	24

Obrázek 3.9: Demonstrace citlivosti testů náhodnosti na reálných datech.

Kapitola 4

Spektrální analýza jednorozměrných časových řad

4.1 Úvod

Pojem spektra se vyskytuje nejen v teorii náhodných procesů, ale také v matematice, fyzice a technice. Jestliže nějaký proces vlnění je součtem harmonických vlnění (tzv. *harmonik*), tak spektrum procesu vlnění se nazývá funkce, která popisuje rozdělení amplitud podle jednotlivých frekvencí. Spektrum ukazuje, která vlnění převládají v daném procesu a jaká je jeho vnitřní struktura. Spektrum v případě stacionárního náhodného procesu dává rozdělení rozptylů náhodných amplitud podle různých frekvencí vlnění.

V celém tomto odstavci proto budeme předpokládat, že náhodný proces $\{Y_t, t \in T\}$ je **stacionární, centrovaný a druhého řádu** (tj. s konečnými druhými momenty).

Významnou vlastností stacionárních náhodných procesů je vlastnost, že jeho autokovarianční funkci lze vyjádřit jako (nespočetný) součet harmonických funkcí s různými frekvencemi a amplitudami.

- Podle **Herglotzovy věty** platí:

Je-li $\{Y_t, t \in Z\}$ stacionární posloupnost, pak se její autokovarianční funkce $\gamma(t)$ dá vyjádřit ve tvaru

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda),$$

kde $F(\lambda)$ je taková neklesající, zprava spojitá funkce, že

$$F(-\pi) = 0 \quad \text{a} \quad F(\pi) = \gamma(0).$$

Přitom $F(\lambda)$ je jediná.

- Podle **Bochnerovy věty** platí:

Je-li $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ stacionární proces spojitý podle středu, pak se jeho autokovarianční funkce $\gamma(t)$ dá vyjádřit ve tvaru

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda),$$

kde $F(\lambda)$ je taková neklesající, zprava spojitá funkce, že

$$F(-\infty) = 0 \quad \text{a} \quad F(\infty) = \gamma(0).$$

Přitom $F(\lambda)$ je jediná.

Vzorci

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

resp.

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

se říká **spektrální rozklad kovarianční funkce**. Funkce $F(\lambda)$ se nazývá **spektrální distribuční funkce**.

- Je-li $F(\lambda)$ absolutně spojitá, pak existuje taková funkce $f(\lambda)$, že pro náhodné stacionární posloupnosti, resp. pro stacionární náhodné procesy platí

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(x) dx \quad \text{resp.} \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(x) dx. \quad (4.1)$$

- K existenci spektrální hustoty stacionární náhodné posloupnosti, resp. spojitého stacionární náhodného procesu, stačí, aby pro její kovarianční funkci platilo

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |\gamma(t)| < \infty \quad \text{resp.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(t)| dt < \infty.$$

- Existuje-li spektrální hustota $f(\lambda)$ stacionární posloupnosti a má-li variaci konečnou na $\langle -\pi, \pi \rangle$, pak platí

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \gamma(t) \quad (4.2)$$

ve všech bodech spojitosti funkce $f(\lambda)$, což je skoro všude vzhledem k Lebesqueově míře.

- Existuje-li spektrální hustota $f(\lambda)$ spojitého stacionárního procesu a je-li autokovarianční funkce absolutně integrovatelná, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(t)| dt < \infty,$$

pak

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \gamma(t) dt. \quad (4.3)$$

- Spektrální hustota $f(\lambda)$ reálného spojitého stacionárního procesu nebo reálné stacionární posloupnosti je **sudá funkce** v tom smyslu, že pro ni platí

$$f(\lambda) = f(-\lambda) \quad (4.4)$$

skoro všude vzhledem k Lebesqueově míře.

4.2 PERIODOGRAM

V dalším budeme předpokládat, že $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **centrovaná stacionární náhodná posloupnost**.

Definice 4.2.1.

Nechť Y_1, \dots, Y_n jsou pozorování náhodné posloupnosti $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Pak **periodogram** definujeme vztahem

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t e^{-it\omega} \right|^2 \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

Lemma 4.2.2.

Položme

$$A_n(\omega) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^n Y_t \cos t\omega \quad B_n(\omega) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^n Y_t \sin t\omega,$$

pak platí

$$I_n(\omega) = \frac{1}{4\pi} [A_n^2(\omega) + B_n^2(\omega)]$$

DŮKAZ.

$$\begin{aligned} I_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t e^{-it\omega} \right|^2 = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t \cos t\omega - i \sum_{t=1}^n Y_t \sin t\omega \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi n} \left[\left(\sum_{t=1}^n Y_t \cos t\omega \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n Y_t \sin t\omega \right)^2 \right] = \frac{1}{4\pi} [A_n^2(\omega) + B_n^2(\omega)]. \quad \square \end{aligned}$$

POZNÁMKA 4.2.3.

Někteří autoři definují periodogram poněkud jinak:

$$I_n^*(\omega) = \frac{2}{n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t e^{-it\omega} \right|^2 = [A_n^2(\omega) + B_n^2(\omega)] = 4\pi I_n(\omega).$$

Lemma 4.2.4.

Pokud označíme pro $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$C_k = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}$$

$$C_k^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}$$

pak platí

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[C_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) C_k \cos k\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \left[C_0^* + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* \cos k\omega \right]$$

DŮKAZ.

$$\begin{aligned}
I_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi n} \left[\left(\sum_{t=1}^n Y_t \cos t\omega \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n Y_t \sin t\omega \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2\pi n} \left[\left(\sum_{t=1}^n Y_t \cos t\omega \right) \left(\sum_{s=1}^n Y_s \cos s\omega \right) + \left(\sum_{t=1}^n Y_t \sin t\omega \right) \left(\sum_{s=1}^n Y_s \sin s\omega \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n Y_t Y_s (\cos t\omega \cos s\omega + \sin t\omega \sin s\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n Y_t Y_s \cos \omega(s-t)
\end{aligned}$$

Zavedeme-li dále substituci $k = s - t$, pak

$$-n + 1 \leq k \leq n - 1$$

a

$$\begin{array}{rcl}
1 & \leq & t \leq n \\
1 & \leq & s = t + k \leq n \\
1 - k & \leq & t \leq n - k
\end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}
\text{týká se kladných } k \\
\max(1, 1 - k) \leq t \leq \min(n, n - k). \\
\text{týká se záporných } k
\end{array}$$

a pak platí

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=-n+1}^{n-1} \cos k\omega \sum_{t=\max(1, 1-k)}^{\min(n, n-k)} Y_t Y_{t+k}.$$

Nyní vezměme zvlášť případy, kdy $k = 0$ a ostatní, přičemž využijme faktu, že funkce \cos je sudou funkcí. Dostaneme proto

$$\begin{aligned}
I_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t^2}_{C_0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n+1}^{-1} \frac{n-|k|}{n} \cos k\omega \underbrace{\frac{1}{n-|k|} \sum_{t=1-k}^n Y_t Y_{t+k}}_{C_{-k}=C_k} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \cos k\omega \underbrace{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}}_{C_k} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) C_k \cos k\omega = \frac{1}{2\pi} \left[C_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) C_k \cos k\omega \right] \\
I_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t^2}_{C_0^*} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n+1}^{-1} \cos k\omega \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{t=1-k}^n Y_t Y_{t+k}}_{C_{-k}^*=C_k^*} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\omega \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}}_{C_k^*} = \frac{1}{2\pi} \left(C_0^* + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* \cos k\omega \right)
\end{aligned}$$

□

POZNÁMKA 4.2.5.

K **numerickému výpočtu** hodnot periodogramu se často používají právě předchozí vzorce.

POZNÁMKA 4.2.6.

Pro **teoretické účely** bývá výhodnější tato varianta

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) C_k \cos k\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* \cos k\omega.$$

Pro **náhodnou posloupnost** $\{Y_t, t \in T \subseteq \mathbb{Z}\}$ platí

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma(t) \cos t\omega.$$

Veličiny $\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) C_k$, (resp. C_k^*) můžeme považovat za jakýsi odhad $\gamma(k)$ a **periodogram** se tudíž dá považovat za **empirický odhad spektrální hustoty**.

Vlastnosti tohoto odhadu udává následující věta.

Věta 4.2.7.

Jestliže $\{Y_t, t \in T \subseteq \mathbb{Z}\}$ je stacionární náhodná posloupnost s nulovou střední hodnotou a se spojitou spektrální hustotou $f(\omega)$, pak má periodogram $I_n(\omega)$ následující vlastnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EI_n(\omega) = f(\omega) \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} DI_n(\omega) = \begin{cases} f^2(\omega) & \omega \neq 0, \omega \in (-\pi, \pi), \\ 2f^2(\omega) & \omega = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

DŮKAZ. Nejprve připomenme následující vztahy:

(1)

$$\sum_{t=1}^n e^{it\omega} = e^{i\omega} \frac{e^{in\omega} - 1}{e^{i\omega} - 1} = e^{i\frac{n}{2}\omega} \frac{1}{2i} \frac{(e^{i\frac{n}{2}\omega} - e^{-i\frac{n}{2}\omega})}{(e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega})} = \boxed{e^{i\frac{n+1}{2}\omega} \frac{\sin \frac{n}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega}} \quad \text{pro } \omega \neq 2k\pi$$

$$\sum_{t=1}^n e^{it\omega} = n \quad \text{pro } \omega = 2k\pi$$

(2)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=1}^n e^{it\omega} \right|^2 &= \left(\sum_{t=1}^n e^{it\omega} \right) \left(\sum_{s=1}^n e^{-is\omega} \right) = \boxed{\sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{i(t-s)\omega}} \\ &= \left| e^{i\frac{n+1}{2}\omega} \frac{\sin \frac{n}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} \right|^2 = \boxed{\frac{\sin^2 \frac{n}{2}\omega}{\sin^2 \frac{1}{2}\omega}} \dots \text{tzv. Fejérovovo jádro} \quad \text{pro } \omega \neq 2k\pi \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{t=1}^n e^{it\omega} \right|^2 = n^2 \quad \text{pro } \omega = 2k\pi$$

(3) Nechť funkce $g(\omega)$ je integrovatelná na $\langle -\pi, \pi \rangle$, pak pro každý bod $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$, v němž je $g(\omega)$ spojitá, platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(\lambda - \omega)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\lambda - \omega)} g(\lambda) d\lambda = g(\omega)$$

Jde o známou vlastnost Fejérova jádra (viz např. Anděl, J.: *Statistická analýza časových řad*, Praha 1976, str. 97).

Nyní počítejme střední hodnotu

$$\begin{aligned} EI_n(\omega) &= E \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t e^{-it\omega} \right|^2 = E \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n Y_t Y_s e^{-i(t-s)\omega} = \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-i(t-s)\omega} \underbrace{E(Y_t Y_s)}_{\gamma(t,s)=\gamma(t-s)} \\ &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-i(t-s)\omega} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-s)\lambda} f(\lambda) d\lambda}_{=\gamma(t-s)} = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-i(t-s)\omega} e^{i(t-s)\lambda} f(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{it(\lambda-\omega)} e^{-is(\lambda-\omega)} f(\lambda) d\lambda}_{=|\sum_{t=1}^n e^{it(\lambda-\omega)}|^2} = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(\lambda - \omega)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\lambda - \omega)} f(\lambda) d\lambda \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{viz (3)}} f(\omega) \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali první vlastnost. Důkaz druhé vlastnosti provedeme pouze pro $Y_t \sim IID(0, \sigma^2)$, přičemž budeme předpokládat, že pro $\forall t \in \mathbb{Z}$ navíc platí

$$EY_t^4 = \mu_4 < \infty.$$

Více lze najít např. v knize Anděl, J.: *Statistická analýza časových řad*, Praha 1976, str. 100-110. Pro bílý šum platí

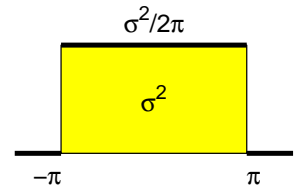
$$E(Y_t Y_s) = \gamma(t-s) = \begin{cases} \sigma^2 & s = t, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & h = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Proto

$$\boxed{EI_n(\omega)} = \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-i(t-s)\omega} E(Y_t Y_s) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n EY_t^2 = \frac{1}{2\pi n} n\sigma^2 = \boxed{\frac{\sigma^2}{2\pi}}.$$

Dále pomocí autokovarianční funkce počítejme spektrální hustotu

$$\boxed{f(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \gamma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2\pi} & \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



Než budeme pokračovat dále, poznamenejme, že pro $Y_t \sim IID(0, \sigma^2)$ platí

$$E(Y_t Y_s Y_u Y_v) = \begin{cases} \mu_4 & t = s = u = v, \\ \sigma^4 & t = s \neq u = v, \\ \sigma^4 & t = u \neq s = v, \\ \sigma^4 & t = v \neq s = u, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak pro $\omega_1, \omega_2 \in \langle -\pi, \pi \rangle$ počítejme

$$\begin{aligned}
E[I_n(\omega_1)I_n(\omega_2)] &= E \left[\frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t e^{-it\omega_1} \right|^2 \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t e^{-it\omega_2} \right|^2 \right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2 n^2} E \left\{ \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-it\omega_1} e^{is\omega_1} Y_t Y_s \sum_{u=1}^n \sum_{v=1}^n e^{-iu\omega_2} e^{iv\omega_2} Y_u Y_v \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{u=1}^n \sum_{v=1}^n e^{i(s-t)\omega_1} e^{i(v-u)\omega_2} E(Y_t Y_s Y_u Y_v) \\
&= \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left\{ \sum_{t=1}^n E Y_t^4 + \sum_{t=1}^n \sum_{u=1, t \neq u}^n E Y_t^2 Y_u^2 + \sum_{t=1}^n \sum_{s=1, s \neq t}^n e^{i(s-t)\omega_1} e^{i(s-t)\omega_2} E Y_t^2 Y_s^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t=1}^n \sum_{u=1, u \neq t}^n e^{i(u-t)\omega_1} e^{i(t-u)\omega_2} E Y_t^2 Y_u^2 \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left\{ n\mu_4 + n(n-1)\sigma^4 + \sigma^4 \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{i(s-t)(\omega_1+\omega_2)} - n\sigma^4 + \sigma^4 \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{i(s-t)(\omega_1-\omega_2)} - n\sigma^4 \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sigma^4 + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n} + \frac{\sigma^4}{n^2} \left[\left| \sum_{t=1}^n e^{it(\omega_1+\omega_2)} \right|^2 + \left| \sum_{t=1}^n e^{it(\omega_1-\omega_2)} \right|^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

Pro $\omega_1 \neq \omega_2$ a $\omega_1 \pm \omega_2 \neq 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1$) platí

$$E[I_n(\omega_1)I_n(\omega_2)] = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sigma^4 + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n} + \frac{\sigma^4}{n^2} \left[\frac{\sin^2 \frac{n}{2}(\omega_1 + \omega_2)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)} + \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(\omega_1 - \omega_2)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)} \right] \right\}$$

Pro $\omega_1 = \omega_2 = \omega \neq 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1$) platí

$$EI_n^2(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sigma^4 + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n} + \frac{\sigma^4}{n^2} \left[\frac{\sin^2 n\omega}{\sin^2 \omega} + n^2 \right] \right\} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ 2\sigma^4 + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n} + \frac{\sigma^4 \sin^2 n\omega}{n^2 \sin^2 \omega} \right\}$$

Pro $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1$) platí

$$EI_n^2(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sigma^4 + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n} + \frac{\sigma^4}{n^2} [n^2 + n^2] \right\} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ 3\sigma^4 + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n} \right\}$$

Odtud díky vztahu

$$DI_n(\omega) = EI_n^2(\omega) - (EI_n(\omega))^2, \quad \text{kde} \quad EI_n(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

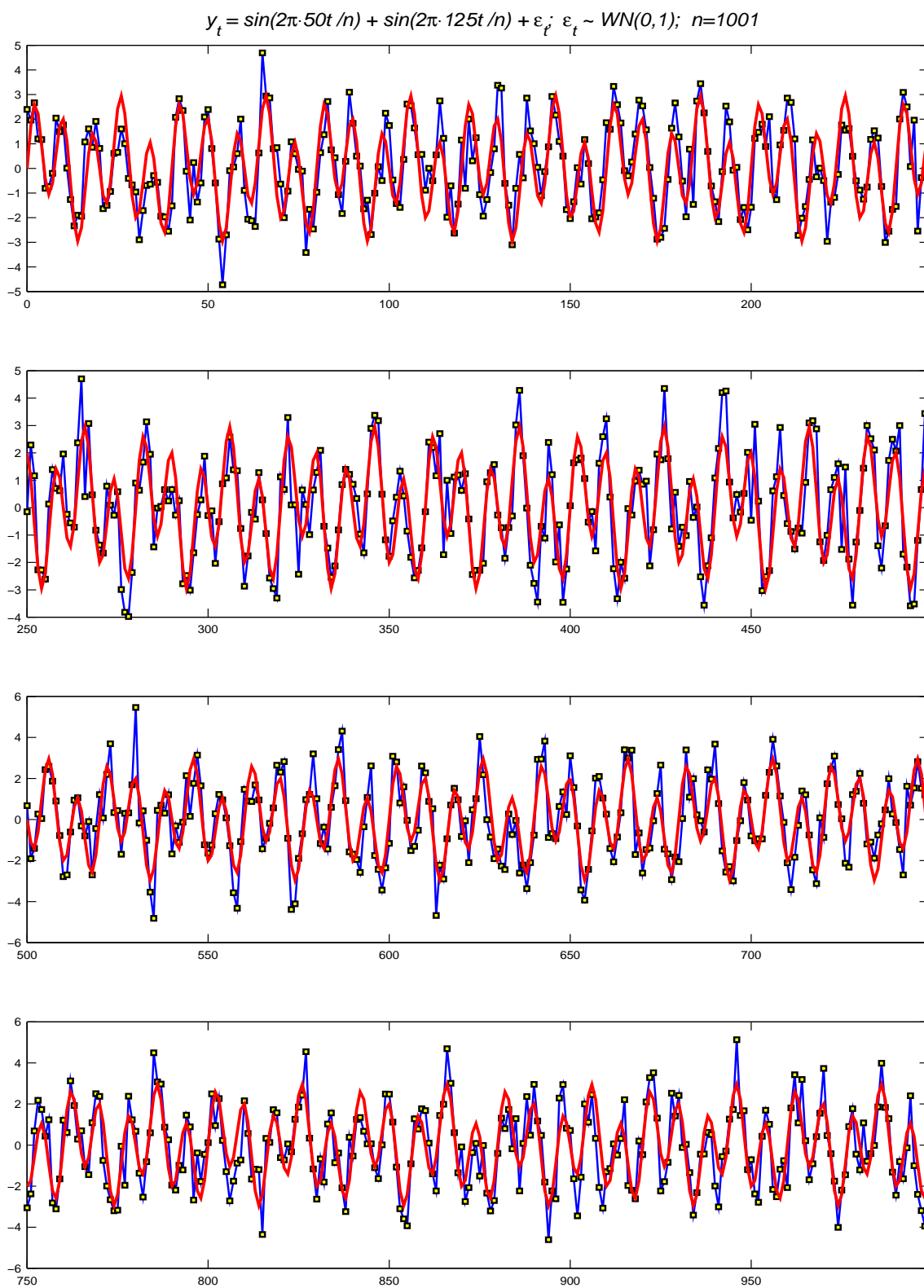
dostaneme

$$DI_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sigma^4 + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n} + \frac{\sigma^4 \sin^2 n\omega}{n^2 \sin^2 \omega} \right\} & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^4}{4\pi^2} = f^2(\omega) \text{ pro } \omega \neq 0, \omega \in (-\pi, \pi), \\ \frac{1}{4\pi^2} \left\{ 2\sigma^4 + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n} \right\} & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\frac{\sigma^4}{4\pi^2} = 2f^2(\omega) \text{ pro } \omega = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

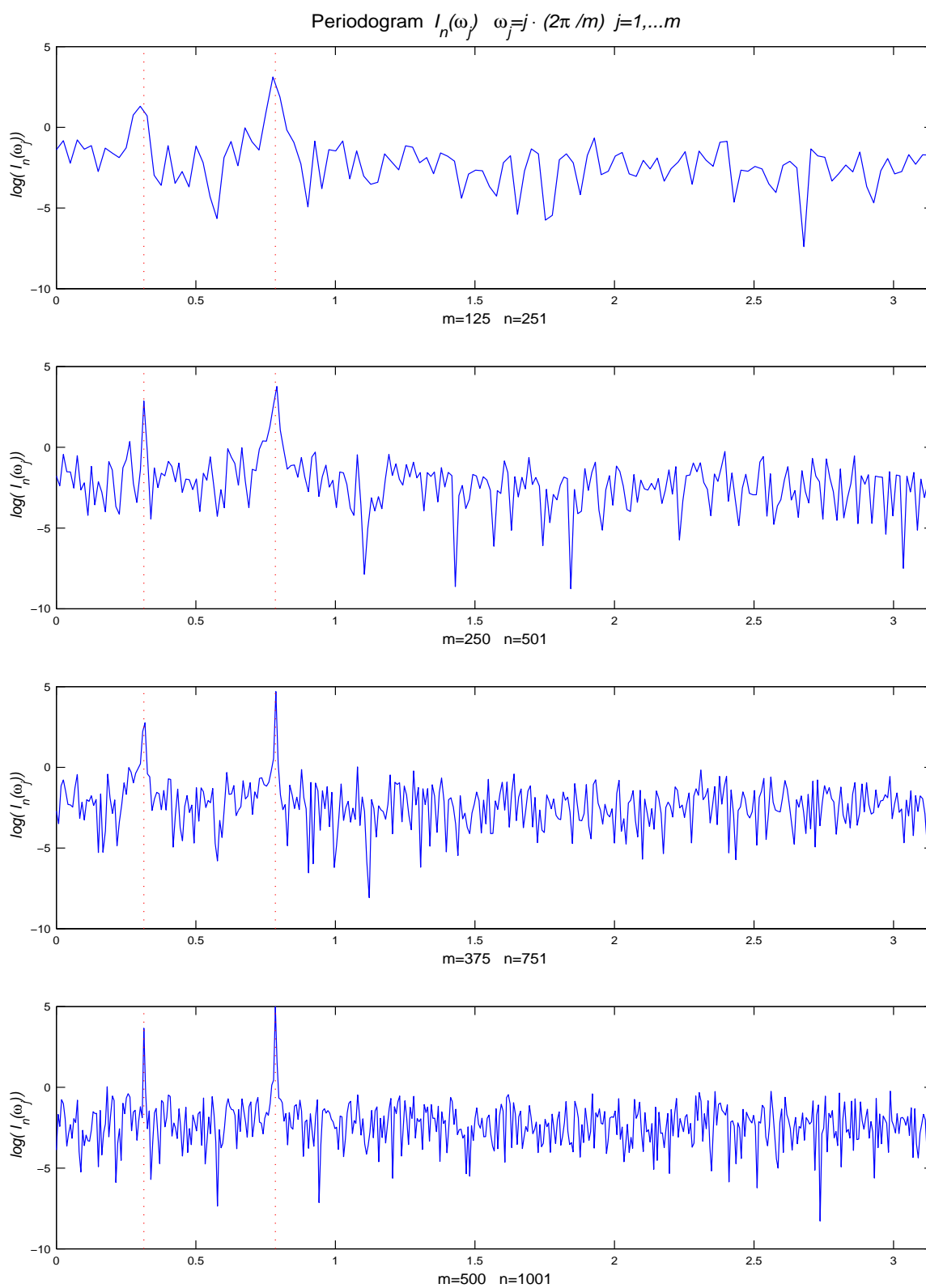
POZNÁMKA 4.2.8.

Z předchozí věty vyplývá

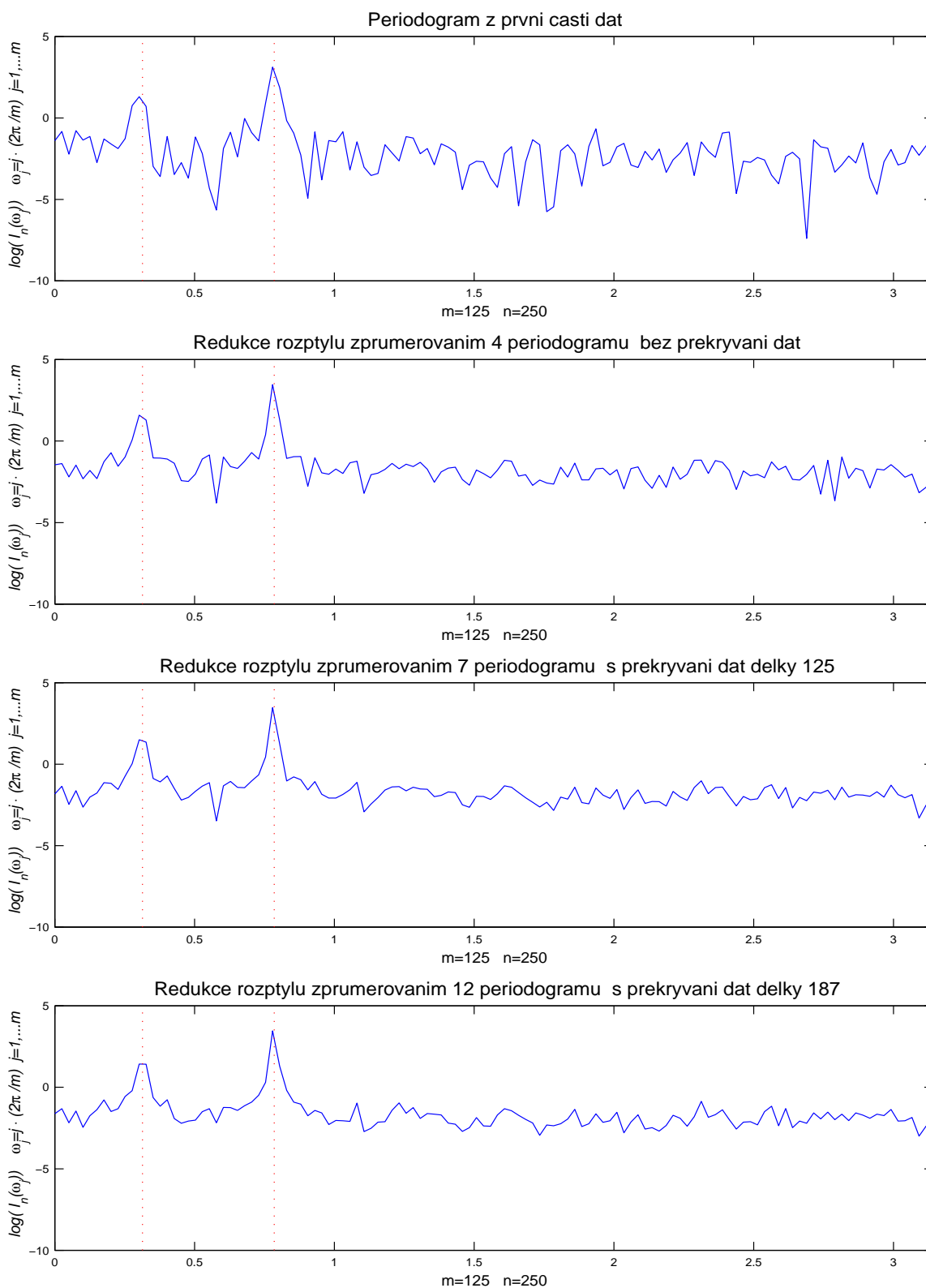
1. Periodogram $I_n(\omega)$ je asymptoticky nestranným odhadem spektrální hustoty.
2. Periodogram $I_n(\omega)$ není konzistentním odhadem spektrální hustoty, neboť jeho rozptyl nekonzverguje k nule, vzrůstá-li neomezeně délka posloupnosti n .



Obrázek 4.1: Simulovaná časová řada.



Obrázek 4.2: Ukázka nekonzistentnosti periodogramu, neboť jeho variabilita se ne-snižuje se vzrůstajícím počtem pozorování.



Obrázek 4.3: Na obrázku je demonstrován tzv. Welchův přístup, který vychází ze zmenšování variability průměrováním periodogramu přes nepřekrývající, resp. překrývající podúseky dat. Periodogram lze ještě více vyhladit použitím různých vah (viz. Neparametrické odhady spektrální hustoty)

PŘÍKLAD 4.2.9.METODA SKRYTÝCH PERIOD.

Uvažujme nyní takové časové řady, které můžeme rozložit na **součet harmonických frekvencí**, jejichž **délky period** lze vyjádřit jako podíl $\boxed{T_k = \frac{n}{k}}$, kde n je počet naměřených hodnot a $0 < k \leq n$.

Označme dále $\boxed{f_k} = \frac{1}{T_k} = \frac{k}{n}$ k -tá frekvence
 $\boxed{\omega_k} = 2\pi f_k = 2\pi \frac{k}{n}$ k -tá úhlová frekvence

Maximální délka periody, kterou jsme schopni určit, je rovna počtu pozorování, tj. $\boxed{T_{\max} = n}$, tedy $k = 1$ a **minimální frekvence** má velikost $\boxed{\omega_{\min} = \frac{2\pi}{n}}$.

Nejkratší zjistitelná perioda je $\boxed{T_{\min} = 2}$. Této délce odpovídá frekvence $\boxed{\omega_{\max} = \pi}$, tzv. **Nyquistova frekvence**.

Z předchozích úvah vyplývá, že k může nabývat hodnot: $k = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n}{2} & \text{pro } n \text{ sudé} \\ 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$

Model časové řady pak můžeme zapsat ve tvaru $\boxed{Y_t = s_t + \varepsilon_t}$,

kde t označuje ekvidistatní **časové okamžiky** měření (pro jednoduchost předpokládáme, že intervaly mají jednotkovou velikost),

n je **počet naměřených hodnot**,

ε_t je **bílý šum**: $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, tj. $E\varepsilon_t = 0$; $D\varepsilon_t = \sigma^2$; $C(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$; $t \neq s$,

s_t je **periodická funkce** tvaru

$$s_t = \begin{cases} \sum_{j=1}^p (\alpha_j \cos t\omega_j + \beta_j \sin t\omega_j) & \text{pro } n \text{ liché} \\ \sum_{j=1}^p (\alpha_j \cos t\omega_j + \beta_j \sin t\omega_j) + \alpha_{\frac{n}{2}} (-1)^t & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

kde $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ jsou daná čísla a nazýváme je **parametry** modelu.

Pokud \boxed{n} je **sudé číslo**,

může být mezi vybranými periodami i perioda délky $\boxed{T_{\min} = 2}$, což odpovídá frekvenci $\boxed{\omega_{\max} = \pi}$. Vzhledem k tomu, že platí

$$\sin n\pi = 0 \quad \text{a} \quad \cos n\pi = (-1)^n,$$

proto zapisujeme koeficient odpovídající této frekvenci zvlášť.

Ekvivalentně můžeme s_t napsat ve tvaru:

$$s_t = \begin{cases} \sum_{j=1}^p \rho_j \cos(t\omega_j - \theta_j) & \text{pro } n \text{ liché} \\ \sum_{j=1}^p \rho_j \cos(t\omega_j - \theta_j) + \alpha_{\frac{n}{2}} (-1)^t & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

kde $\rho_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ je **amplituda** k -té harmonické složky

$$\theta_k = \begin{cases} \arctan \frac{\beta_k}{\alpha_k} & \alpha_k > 0 \\ \arctan \frac{\beta_k}{\alpha_k} + \pi & \alpha_k < 0 \end{cases} \text{ je } \mathbf{\textit{fázový posun}} \text{ } k\text{-té harmon. složky}$$

Pokud zahrneme do počtu frekvencí i frekvenci nulovou (kdy $k = 0$), pak přibude člen, který označíme $\frac{\alpha_0}{2}$, přitom $\beta_0 = 0$.

V dalším pro jednoduchost předpokládejme, že n je **liché číslo**. Použijeme-li trigonometrické vyjádření komplexního čísla:

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

a vztahů

$$\begin{aligned}\cos kx &= \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ \sin kx &= \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx})\end{aligned}$$

pak dostaneme **Fourierovu řadu** konečné délky

$$\begin{aligned}s_t &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^p (\alpha_k \cos t\omega_k + \beta_k \sin t\omega_k) \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^p \left[\frac{1}{2} (e^{it\omega_k} + e^{-it\omega_k}) \alpha_k + \frac{1}{2i} (e^{it\omega_k} - e^{-it\omega_k}) \beta_k \right] \\ &= \underbrace{\frac{\alpha_0}{2}}_{c_0} + \sum_{k=1}^p \left[\underbrace{\frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k)}_{c_k} e^{it\omega_k} + \underbrace{\frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k)}_{\bar{c}_k} e^{-it\omega_k} \right] \\ &= \sum_{k=-p}^p c_k e^{it\omega_k},\end{aligned}$$

přičemž pro $k = 1, \dots, p$ platí

$$\begin{aligned}\alpha_k &= c_k + \bar{c}_k = 2\operatorname{Re}(c_k) \\ \beta_k &= i(c_k - \bar{c}_k) = -2\operatorname{Im}(c_k).\end{aligned}$$

Vypočítejme **střední hodnotu** tohoto modelu

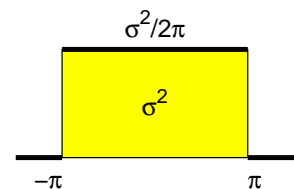
$$EY_t = s_t,$$

autokovarianční funkce je tvaru

$$\gamma(k) = C(Y_t, Y_{t+k}) = \begin{cases} 0 & k > 0, t \in \mathbb{R} \\ \sigma^2 & k = 0, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a **spektrální hustota**

$$\boxed{f(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \gamma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2\pi} & \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



Všimněme si **periodogramu** této náhodné posloupnosti

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n \left(\sum_{j=-p}^p c_j e^{it\omega_j} + \varepsilon_t \right) e^{-it\omega} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \sum_{j=-p}^p c_j e^{it(\omega_j - \omega)}}_{I_n^{(1)}(\omega)} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t e^{-it\omega}}_{I_n^{(2)}(\omega)} \right|^2$$

Upravujme dále

$$I_n^{(1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-p}^p c_j \underbrace{\sum_{t=1}^n e^{it(\omega_j - \omega)}}_{\text{součet geom.řady}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-p}^p c_j e^{i(\omega_j - \omega)} \underbrace{\frac{e^{in(\omega_j - \omega)} - 1}{e^{i(\omega_j - \omega)} - 1}}_{g_n(\omega_j - \omega)}$$

Je-li ω různé od všech $\omega_1, \dots, \omega_p$, pak platí zřejmě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(1)}(\omega) = 0.$$

Existuje-li takové k , že platí $\omega = \omega_k$, pak

$$I_n^{(1)}(\omega_k) = n \frac{c_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-p, j \neq k}^p g_j(\omega_j - \omega) = \underbrace{\sqrt{n} c_k}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-p, j \neq k}^p g_n(\omega_j - \omega)}_{\rightarrow 0}$$

a pro $n \rightarrow \infty$ vzrůstá jeho absolutní hodnota nade všechny meze.

Druhý člen $I_n^{(2)}(\omega)$ je náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a s rozptylem

$$\begin{aligned} DI_n^{(2)}(\omega) &= E |I_n^{(2)}(\omega)|^2 = E \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t e^{-it\omega} \right|^2 = \frac{1}{n} E \left(\sum_{t=1}^n \varepsilon_t e^{-it\omega} \right) \left(\sum_{s=1}^n \varepsilon_s e^{is\omega} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-i(t-s)\omega} \underbrace{E \varepsilon_t \varepsilon_s}_{\text{nekorel.}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \varepsilon_t^2 = \frac{1}{n} n \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Pokud bude platit, že náhodná posloupnost splňuje model

$$\boxed{Y_t = s_t + \varepsilon_t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^p (\alpha_j \cos t\omega_j + \beta_j \sin t\omega_j) + \varepsilon_t} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

bude mít **periodogram** pro velká n v **bodech**

$$\omega = \lambda_1, \dots, \lambda_p \quad \text{výrazně velké hodnoty (řádu } n),$$

jinde jeho hodnoty budou relativně malé,

$$\text{budou kolísat kolem hodnoty } \boxed{\frac{\sigma^2}{2\pi}}.$$

Periodogram je tedy dobrým ukazatelem periodicit.

Z uvedeného příkladu vyplývá, že významná lokální maxima v průběhu periodogramu by měla identifikovat periodickou strukturu uvažovaného modelu tak, že vyznačí neznámé frekvence $\omega_1, \dots, \omega_p$.

Nějaký vhodný statistický test by pak měl rozhodnout, jaké hodnoty periodogramu můžeme opravdu považovat za významně velké ve srovnání s hodnotami ostatními.

4.2.1 Test R. A. Fishera

R. A. Fisher odvodil test, kterým se dá zjistit významnost nejvyšších hodnot periodogramu. Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných veličin Y_1, \dots, Y_n .

Budeme **testovat hypotézu**:

$$H_0 : Y_t = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Předpokládejme, že $n = 2m + 1$ je liché číslo. (Je-li n sudé, obvykle se vynechá první člen jakožto časově nejvzdálenější od současnosti).

Uvažujme hodnoty periodogramu v bodech

$$\omega_k = \frac{2\pi}{n}k \quad k = 1, \dots, m.$$

Vypočítejme hodnoty periodogramu

$$I_n(\omega_k) \quad k = 1, \dots, m,$$

srovnáme je podle velikosti a označme

$$V_1, \dots, V_m.$$

Položme (tzv. **Fisherova statistika**)

$$W = \frac{V_1}{V_1 + \dots + V_m},$$

která nabývá hodnot mezi nulou a jedničkou.

Budou-li všechny veličiny **téměř stejné**,

$$\text{bude hodnota } W \text{ blízká číslu } \boxed{\frac{1}{m}}.$$

Bude-li naopak veličina $\boxed{V_1}$ nabývat **velmi vysokých hodnot ve srovnání s ostatními veličinami** V_2, \dots, V_m ,

$$\text{bude hodnota } W \text{ blízká číslu } \boxed{1}.$$

Je tedy vidět, že velké hodnoty (které jsou blízké 1) budou tvořit kritický obor naší hypotézy proti alternativě

$$H_1 : Y_t = \sum_{j=1}^p \rho_j \cos(t\omega_j - \theta_j) + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

R. A. Fisher odvodil (viz Anděl, J.: *Statistická analýza časových řad*, Praha 1976, str. 79-86) distribuční funkci statistiky W za platnosti hypotézy H_0 : (za předpokladu, že uvažujeme gaussovský bílý šum)

$$1 - F_{W|H_0}(x) = P(W > x|H_0) = m(1-x)^{m-1} - \binom{m}{2}(1-2x)^{m-1} + \dots,$$

kde $0 < x < 1$ a na pravé straně sčítáme tak dlouho, dokud jsou členy $(1-kx)$ kladné, což lze také zapsat takto

$$P(W > x|H_0) = \sum_{k=1,2,\dots} \binom{m}{k} [\max(0, 1-kx)]^{m-1} = \sum_{k=1,2,\dots} \binom{m}{k} [(1-kx)_+]^{m-1}.$$

Pak **hypotézu** H_0 **zamítáme** (na hladině významnosti α), pokud

$$1 - F_{W|H_0}(w) = P(W > w|H_0) = \alpha_{W|H_0} \leq \alpha,$$

kde w je skutečná hodnota Fisherovy statistiky při daných hodnotách konkrétní časové řady a $\alpha_{W|H_0}$ je tzv *p-value*.

V případě, že pomocí Fisherova testu zjistíme signifikantní periodicitu určité frekvence, je na místě otázka, jak statisticky testovat případné další periodicity o jiných frekvencích.

Whittle doporučil, aby se v případě významnosti největší hodnoty periodogramu V_1 tato hodnota vynechala. Dále pak na základě veličin V_2, \dots, V_m položíme

$$W^{(2)} = \frac{V_2}{V_2 + \dots + V_m}$$

a stanovíme $P(W^{(2)} > w^{(2)})$ podle stejného vzorce, kde místo m dosadíme $m - 1$.

Vyjde-li i tato druhá největší hodnota významná, opět se vynechá a m se zmenší o další jedničku.

Když takto stanovíme frekvence $\omega_1, \dots, \omega_p$, získáme model se známými frekvencemi a zbylé neznámé koeficienty odhadneme metodou nejmenších čtverců.

4.2.2 Siegelův test

V praxi se ukázalo, že při platnosti alternativní hypotézy s $p > 1$ (tzn., že se uplatňuje více než jedna periodicitu) nezamítá Fisherův test nulovou hypotézu s příliš velkou pravděpodobností.

Jinými slovy lze říci, že Fisherův test nemá při alternativní hypotéze pro $p > 1$ takovou sílu jako v případě, kdy $p = 1$. (Tehdy je jeho síla přijatelná a dokonce v jistém smyslu optimální).

Proto byly hledány modifikace, které tento nedostatek odstraňují. Uvedeme tzv. **Siegelův test**. Zde se místo statistiky W používá statistika T_λ tvaru

$$T_\lambda = \sum_{j=1}^m \left(\frac{I_n(\omega_j)}{\sum_{i=1}^m I_n(\omega_i)} - \lambda g_F \right)_+,$$

kde

$$(x)_+ = \max(x, 0),$$

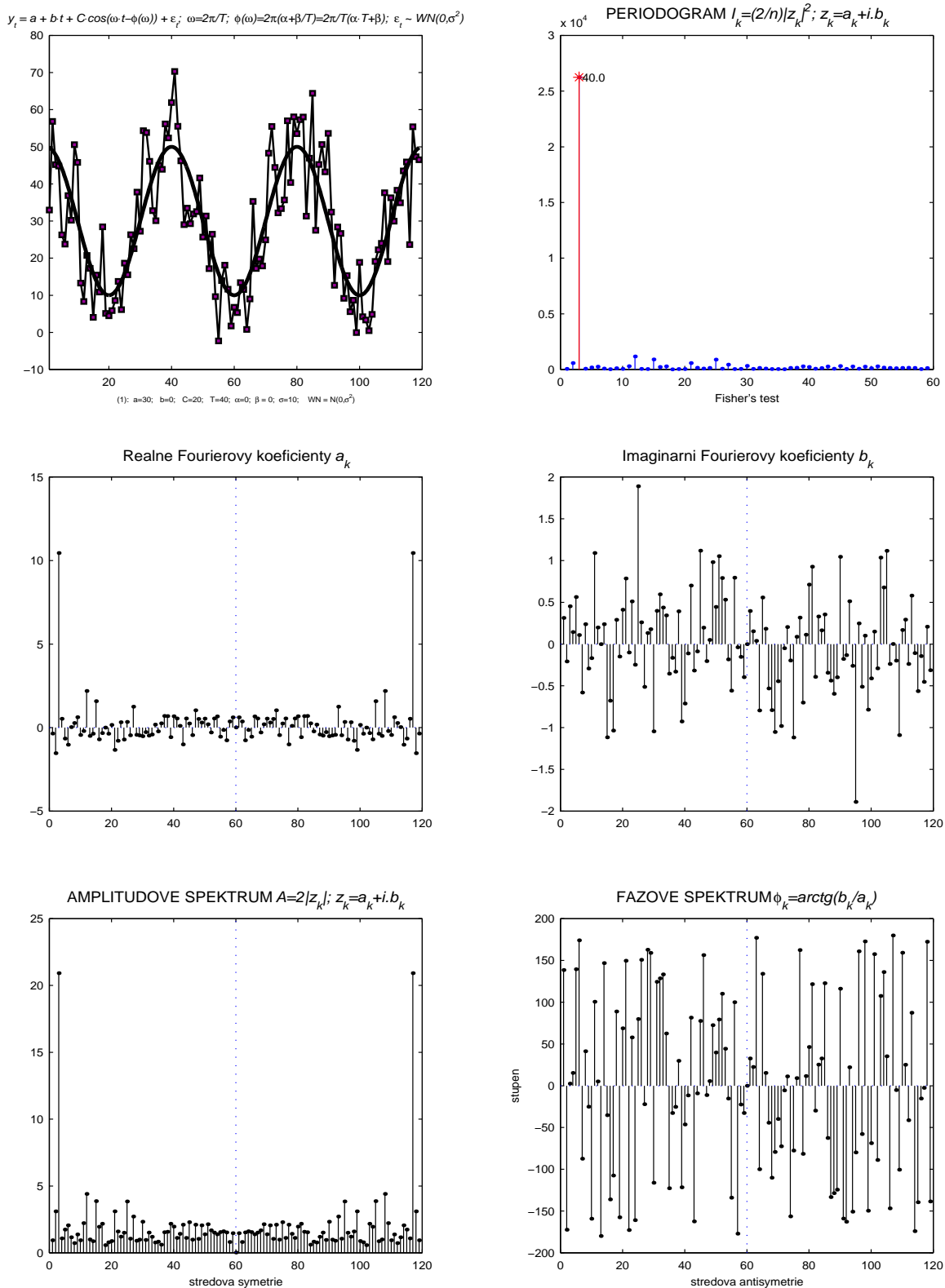
g_F je $100(1 - \alpha)\%$ kritická hodnota Fisherova testu (tj. $P(W > g_F|H_0) = \alpha$) a $0 < \lambda < 1$ je předem zvolená konstanta (doporučuje se volit $\lambda = 0.6$).

Nulovou hypotézu pak zamítáme, pokud

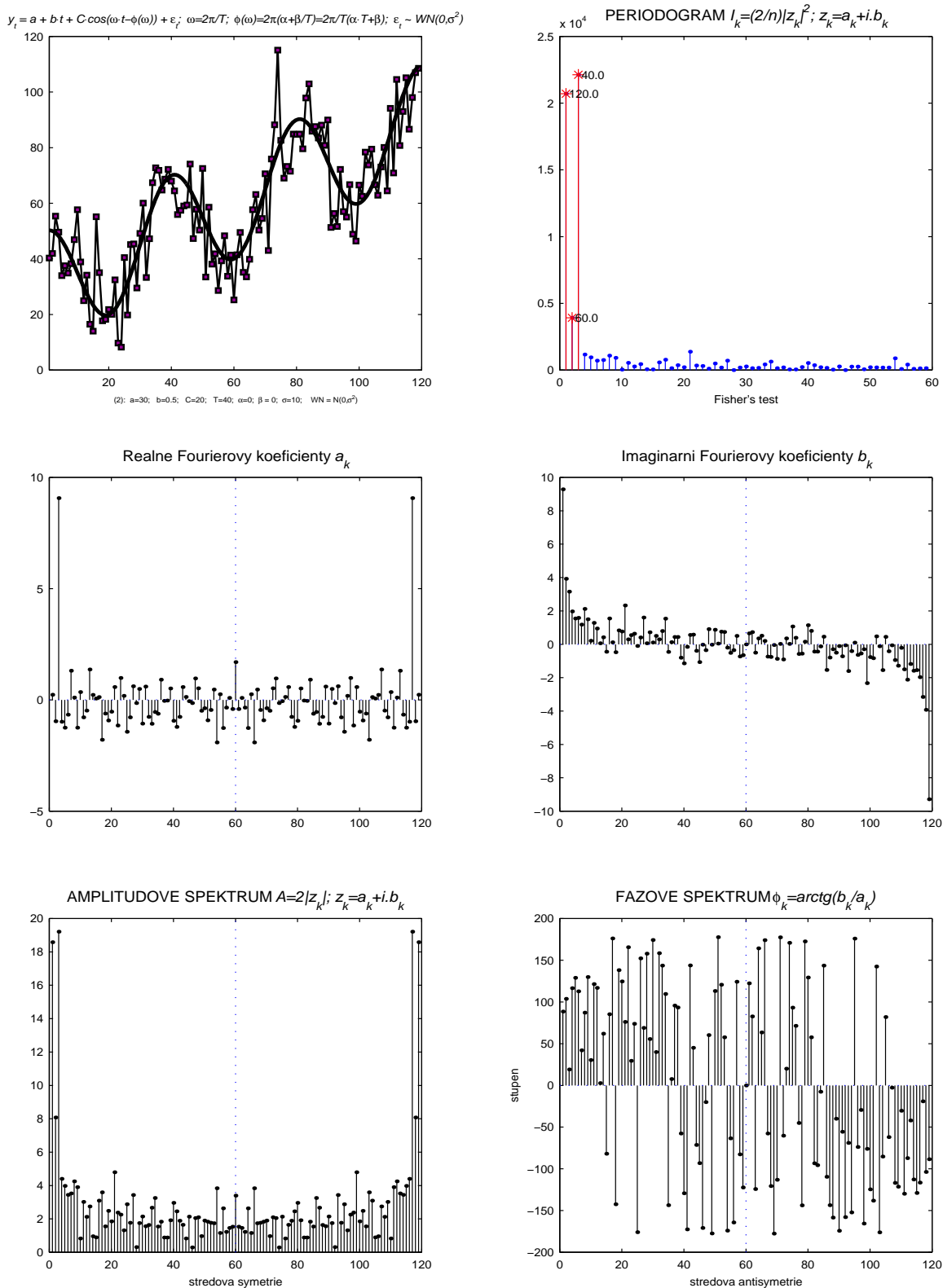
$$T_\lambda > t_\lambda,$$

kde t_λ je kritická hodnota tohoto testu.

Kritické hodnoty bývají tabelovány pro různá λ a m . Jako významné jsou uznány pouze ty periodicity, jejichž odpovídající sčítance přispěly do celkové hodnoty testovací statistiky T_λ .



Obrázek 4.4: Příklad periodické časové řady.



Obrázek 4.5: Příklad periodické časové řady spolu s trendem. Na obrázku periodogramu je vidět, jak přítomnost trendu ovlivní velikost nízkých frekvencí. Proto se doporučuje u nestacionárních časových řad trend z řady nejprve odstranit.

4.3 Odhady spektrální hustoty

4.3.1 Neparametrické odhady spektrální hustoty (Window Spectral Estimation)

Neparametrické odhady spektrální hustoty **centrované stacionární náhodné posloupnosti** $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou založeny na **zlepšení vlastností periodogramu**.

Periodogram je empirickým odhadem spektrální hustoty, který je asymptoticky nestraný, avšak nekonzistentní. Připomeňme, že platí (viz lemma 4.2.4)

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[C_0 + 2 \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* \cos k\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* \cos k\omega,$$

neboť pro

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)$$

platí

$$C_k^* = C_{-k}^*,$$

přičemž

$$C_k^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\cos k\omega = \frac{1}{2} (e^{ik\omega} + e^{-ik\omega}),$$

upravujeme

$$\begin{aligned} \boxed{I_n(\omega)} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* \frac{1}{2} (e^{ik\omega} + e^{-ik\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} C_0^* + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=-(n-1)}^{-1} C_k^* \frac{1}{2} e^{ik\omega} + \sum_{k=-(n-1)}^{-1} C_k^* \frac{1}{2} e^{-ik\omega} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* \frac{1}{2} e^{ik\omega} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* \frac{1}{2} e^{-ik\omega} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} C_0^* + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{s=1}^{n-1} C_{-s}^* \frac{1}{2} e^{-is\omega} + \sum_{k=-(n-1)}^{-1} C_k^* \frac{1}{2} e^{-ik\omega} + \sum_{s=-(n-1)}^{-1} C_{-s}^* \frac{1}{2} e^{-is\omega} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* \frac{1}{2} e^{-ik\omega} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} C_0^* + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=-(n-1)}^{-1} \frac{1}{2} \underbrace{(C_{-k}^* + C_k^*)}_{2C_k^* = 2C_{-k}^*} e^{-ik\omega} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \underbrace{(C_{-k}^* + C_k^*)}_{2C_k^*} e^{-ik\omega} \right\} \\ &= \boxed{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* e^{-ik\omega}}. \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si, že periodogram jakožto odhad spektrální hustoty, je založen na všech možných odhadech autokovariační funkce v bodech $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)$, tj.

$$\begin{aligned} C_0^* &= \frac{1}{n} \underbrace{(Y_1^2 + \dots + Y_n^2)}_{n \text{ členů}} \\ C_1^* = C_{-1}^* &= \frac{1}{n} \underbrace{(Y_1 Y_2 + \dots + Y_{n-1} Y_n + Y_3 Y_n)}_{n-1 \text{ členů}} \\ &\vdots \\ C_{n-3}^* = C_{-(n-3)}^* &= \frac{1}{n} \underbrace{(Y_1 Y_{n-2} + Y_2 Y_{n-1} + Y_3 Y_n)}_{3 \text{ členy}} \\ C_{n-2}^* = C_{-(n-2)}^* &= \frac{1}{n} \underbrace{(Y_1 Y_{n-1} + Y_2 Y_n)}_{2 \text{ členy}} \\ C_{n-1}^* = C_{-(n-1)}^* &= \frac{1}{n} \underbrace{Y_1 Y_n}_{1 \text{ člen}} \end{aligned}$$

a tedy je založen i na velmi málo kvalitních odhadech. K určitému zlepšení jistě dojde, pokud budeme používat jen $m \ll n$ nejkvalitnějších odhadů. Mluvíme pak o **prostém useknutém periodogramu**

$$\hat{f}_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m C_k^* \cos k\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m C_k^* e^{-ik\omega},$$

což lze také zapsat takto

$$\hat{f}_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) C_k^* \cos k\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) C_k^* e^{-ik\omega},$$

kde

$$w(k) = \begin{cases} 1 & |k| \leq m \\ 0 & |k| > m \end{cases}.$$

Označme **Fourierovu transformaci** funkce $w(k)$

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k) e^{-ik\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{-ik\omega}$$

a položíme $s = k + m + 1$, pak $k = s - m - 1$ a

$$\begin{aligned} \boxed{W(\omega)} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{2m+1} e^{-i(s-m-1)\omega} = \frac{1}{2\pi} e^{i(m+1)\omega} \sum_{s=1}^{2m+1} e^{-is\omega} = \frac{1}{2\pi} e^{im\omega} \frac{1 - e^{-i(2m+1)\omega}}{1 - e^{-i\omega}} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{im\omega} \frac{e^{-i\frac{2m+1}{2}\omega} \left(e^{i\frac{2m+1}{2}\omega} - e^{-i\frac{2m+1}{2}\omega} \right)}{e^{-i\frac{1}{2}\omega} \left(e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega} \right)} = \boxed{\frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}} = D_m(\omega), \end{aligned}$$

kde $D_m(\omega)$ je tzv. **Dirichletovo jádro**.

Vzhledem k tomu, že lze psát

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} C_k^* e^{-ik\omega},$$

pak pomocí inverzní Fourierovy transformace platí

$$C_k^* = \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Počítejme postupně

$$\begin{aligned} \boxed{\hat{f}_n(\omega)} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) C_k^* e^{-ik\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta) e^{ik\theta} d\theta e^{-ik\omega} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) e^{-ik(\omega-\theta)} d\theta}_{W(\omega-\theta)} \\ &= \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta) W(\omega - \theta) d\theta}. \end{aligned}$$

Jde o tzv. **vyhlazený periodogram** (*smoothed periodogram*). Funkce $W(\omega)$ se nazývá **spektrální okénko** (*spectral window*). Tato funkce má do jisté míry aproximovat Diracovu δ funkci a platí pro ni

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) d\omega = 1.$$

Takto počítat odhad spektrální hustoty by však bylo (vzhledem k málo hladkému průběhu periodogramu) nepohodlné, proto se obvykle odhad počítá podle vzorce

$$\hat{f}_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} w(k) C_k^* e^{-ik\omega},$$

přičemž inverzní Fourierovy transformace

$$w(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W(\theta) e^{ik\theta} d\theta \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (n-1)$$

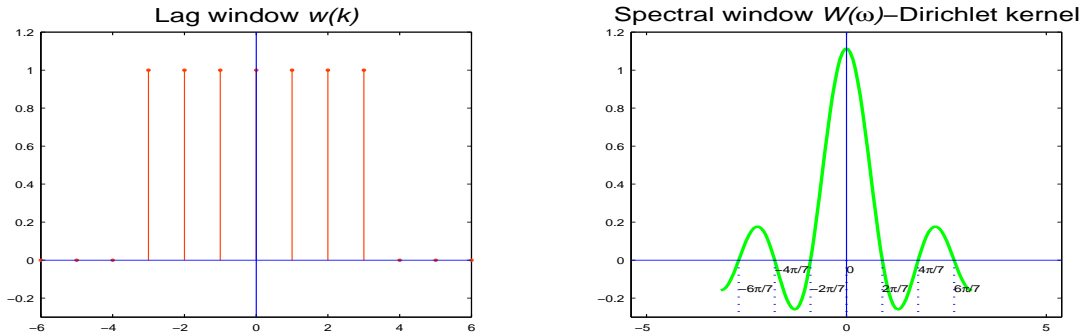
se nazývá **korelační okénko** (*covariance lag window*, nebo *time-domain window*).

Typickými korelačními okénky jsou tzv. **useknutá** okénka, pro která existuje takové přirozené číslo m (bod useknutí, *truncation point*) tak, že $w(k) = 0$ pro $|k| > m$ (m se obvykle volí v rozmezí od $\frac{n}{6}$ do $\frac{n}{5}$).

PŘÍKLADY KORELAČNÍCH A SPEKTRÁLNÍCH OKÉNEK

Prostý useknutý odhad

$$w(k) = \begin{cases} 1 & 0 < |k| \leq m \\ 0 & |k| > m \end{cases} \quad W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(m + \frac{1}{2})\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega}$$



Obrázek 4.6: Korelační a spektrální okénko v případě prostého useknutého periodogramu.

Bartletovo okénko

$$w(k) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|k|}{m}\right) & 0 < |k| \leq m \\ 0 & |k| > m \end{cases} \quad W(\omega) = \frac{1}{2\pi m} \frac{\sin^2 m \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} = F_m(\omega)$$

$W(\omega)$ je v tomto případě Fejérovým jádrem.

Parzenovo okénko

$$w(k) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{k}{m}\right)^2 + 6 \left(\frac{|k|}{m}\right)^3 & |k| < \frac{m}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{|k|}{m}\right)^3 & \frac{m}{2} < |k| \leq m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = \frac{3}{8\pi m^3} \left(\frac{\sin m \frac{\omega}{4}}{\frac{1}{2} \sin \frac{\omega}{2}}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$$

kde m je nějaké sudé číslo.

Obecné Tukeyovo okénko

$$w(k) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos \frac{\pi k}{m} & |k| \leq m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = aD_m\left(\omega - \frac{\pi}{m}\right) + (1 - 2a)D_m(\omega) + aD_m\left(\omega + \frac{\pi}{m}\right)$$

kde $a \in (0, \frac{1}{4})$.

Tukey-Hanningovo okénko

$$w(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi k}{m}\right) & |k| \leq m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = \frac{1}{4}D_m\left(\omega - \frac{\pi}{m}\right) + \frac{1}{2}D_m(\omega) + \frac{1}{4}D_m\left(\omega + \frac{\pi}{m}\right)$$

Tukey-Hammingovo okénko

$$w(k) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi k}{m} & |k| \leq m \\ 0 & |k| > m \end{cases}$$

$$W(\omega) = 0.23D_m\left(\omega - \frac{\pi}{m}\right) + 0.54D_m(\omega) + 0.23D_m\left(\omega + \frac{\pi}{m}\right)$$

Daniellovo okénko . Na závěr ještě uvedeme jedno **neuseknuté korelační okénko**.
Mějme pro $\delta \in (0, \pi)$ následující **spektrální okénko**

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & |\omega| < \delta \\ 0 & |\omega| > \delta \end{cases},$$

kteřé je vlastně hustotou náhodné veličiny s rovnoměrně spojitým rozdělením na intervalu $(-\delta, \delta)$.

Počítejme nejprve pro

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (n-1)$$

odpovídající korelační okénko:

$$\begin{aligned} w(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) e^{ik\omega} d\omega = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2\delta} e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\delta} \left[\frac{e^{ik\omega}}{ik} \right]_{-\delta}^{\delta} = \frac{1}{k\delta} \underbrace{\frac{1}{2i} (e^{ik\delta} - e^{-ik\delta})}_{\sin k\delta} = \frac{\sin k\delta}{k\delta}. \end{aligned}$$

Pro $k = 0$ máme

$$w(0) = \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) d\omega = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2\delta} d\omega = \boxed{1}.$$

A celkově dostaneme

$$w_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{\sin k\delta}{k\delta} & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}.$$