KAPITOLA 7.

Některé úvahy o vydatnosti a optimalitě testů

Dosud jsme popisovali testy vhodné pro jednotlivé hypotézy proti různým alternativám se stručným komentářem, pro která rozdělení pravděpodobnosti, tj. pro které podtřídy alternativ, jsou testy vhodné. Naším úkolem bude zdůvodnit, proč je který test kdy vhodný a tam, kde lze, testy mezi sebou z různých hledisek porovnat.

Samozřejmě, ideální případ nastane, je-li test stejnoměrně nejsilnější proti celé alternativě. To však můžeme očekávat jen v případě, není-li množina rozdělení tvořící alternativu příliš bohatá.

Jestliže neexistuje stejnoměrně nejsilnější test, pak, jak jsme se zmínili na začátku textu, máme několik kompromisních možností:

a) Omezíme třídu testů; nehledáme test, optimální mezi všemi α-testy, ale optimální pouze uvnitř vhodné podtřídy α-testů, např. ve třídě nestranných testů, invariantních testů apod. Tento krok jsme prakticky již provedli tím, že jsme se omezili na pořadové testy, které tvoří podtřídu invariantních testů.

b) Omezíme třídu alternativ; právě tuto možnost budeme podrobněji uvažovat v této kapitole. Omezíme se na alternativy blízké hypotéze a mezi pořadovými testy budeme hledat lokálně nejsilnější pro danou hypotézu.

Jinou možností je nahradit celou alternativu jediným,
mini
nejméně příznivým rozdělením a hledat maxi~~má~~lní test nebo maximalizovat střední hodnotu silofunkce stanovenou vzhledem ke vhodnému apriornímu rozdělení definovanému na alternativě a hledat nejsilnější bayesovský test, apod.

c) Zmírníme kriterium optimality testu; např. hledáme test asymptoticky nejsilnější při $n \to \infty$ místo testu nejsilnějšího pro pevné n.

Když nenajdeme nejlepší test, snažíme se jednotlivé testy mezi sebou porovnávat pomocí různě definovaných relativních vydatností. Většinou se nám daří porovnat testy asymptoticky při $n \to \infty$, kde n je počet pozorování. V této kapitole se zmíníme o některých typech vzájemné vydatnosti testů a některé běžné testy srovnáme mezi sebou. Důkazy příslušných tvrzení jen naznačíme. Obecně k odvození asymptotické vydatnosti potřebujeme znát asymptotické rozdělení testové statistiky za platnosti alternativy (tato rozdělení lze např. nalézt v knize Hájek-Šidák (1967)).

7.1. Lokálně nejsilnější pořadové testy

Definice 1. Nechť $d(Q)$ je míra vzdálenosti alternativy $Q \in K$ od hypotézy H. Řekneme, že α-test Φ_0 je lokálně nejsilnějším (LN) testem ve třídě $\mathcal{M}$ α-testů H proti K, jestliže k libovolnému jinému α-testu $\Phi \in \mathcal{M}$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\beta_{\Phi_0}(Q) \geq \beta_{\Phi}(Q) \quad \text{pro vš. } Q, \text{ pro která } 0 < d(Q) < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Poznámka. Jestliže H je jednoduchá hypotéza o parametru θ tvaru $\theta = \theta_0$ proti $K : \theta > \theta_0$ a předpokládaný systém rozdělení je takový, že silofunkce libovolného testu H proti K

je diferencovatelná v bodě θ_0 (např. exponenciální systém), pak existuje LN α-test a je to takový test, který maximalizuje hodnotu derivace $\beta'_{\Phi}(\theta_0)$ mezi všemi α-testy H. Protože však většinou uvažujeme rozsáhlejší alternativu, nelze hledat LN testy tímto způsobem.

Naším úkolem bude nalézt testy, které jsou lokálně nejsilnější ve třídě $\mathcal{M}$ pořadových testů (lokálně nejsilnější pořadové testy) pro některé ze standardních hypotéz.

7.1.1. Lokálně nejsilnější pořadové testy hypotézy náhodnosti

Uvažujme hypotézu H_0 lokálně proti obecné třídě alternativ, závislých na parametru θ, který nabývá hodnot z otevřeného intervalu obsahujícího 0; "lokální" zde odpovídá malým hodnotám θ.

Věta 1. Nechť A je množina hustot $A = \{ d(x,\theta) : \theta \in \mathcal{J} \}$ vyhovující podmínkám

(a) $\mathcal{J} \in R^1$ je otevřený interval obasahující 0 .

(b) $d(x,\theta) \in A$ je absolutně spojitá vzhledem k θ pro skoro vš. x.

(c) Limita

$$\dot{d}(x,0) = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \left[d(x,\theta) - d(x,0) \right]$$

existuje pro skoro vš. x .

(d) Platí

$$\lim_{\theta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{d}(x,\theta)| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{d}(x,0)| \, dx < \infty ,$$

kde $\dot{d}(x,\theta)$ značí parciální derivaci vzhledem k θ.

Uvažujme alternativu $K = \{ q_\Delta : \Delta > 0 \}$, kde

$$(7.2) \qquad q_\Delta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} d(x_i,\, \Delta c_i ;$$

$c_1,\ldots,c_n$ jsou daná čísla.

Pak test s kritickým oborem

$$(7.3) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i\; a_n(R_i,d) \geqq k$$

je lokálně nejsilnějším pořadovým testem H_0 proti $\{q_\Delta : \Delta > 0\}$ na hladině významnosti

$$(7.4) \qquad \alpha = P\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\; a_n(R_i,d) \geqq k\Big)$$

kde P je libovolné rozdělení pravděpodobností splňující H_0 a kde

$$(7.5) \qquad a_n(i,d) = E\left[\frac{\dot{d}(X_n^{(i)},0)}{d(X_n^{(i)},0)}\right] \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

a $X_n^{(1)} < \ldots < X_n^{(n)}$ jsou pořádkové statistiky příslušné náhodnému výběru rozsahu n z rozdělení s hustotou $d(x,0)$.

<u>Důkaz</u> : Nechť Q_Δ je rozdělení pravděpodobností odpovídající hustotě q_Δ . Ukážeme, že pro libovolnou permutaci $r \in \mathcal{R}$ platí

$$(7.6) \qquad \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\Big[n!\; Q_\Delta(R=r)-1\Big] = \sum_{i=1}^{n} c_i\; a_n(r_i,d).$$

Odtud pak plyne existence $\varepsilon > 0$ takového, že pro lib. Δ , $0 < \Delta < \varepsilon$ a pro libovolnou dvojici $r, r' \in \mathcal{R}$ vyhovující nerovnosti

$$(7.7) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i\; a_n(r_i,d) > \sum_{i=1}^{n} c_i\; a_n(r_i',d)$$

platí

$$(7.8) \qquad Q_\Delta(R=r) > Q_\Delta(R=r').$$

Podle Neyman-Pearsonova lemmatu nejsilnější test H_0 proti Q_Δ zamítne H_0 pro $r \in \mathcal{R}$ splňující nerovnost $Q_\Delta(R=r) > k'$ pro vhodné k'; to vzhledem k (7.7) a k (7.8) ekvivalentně znamená zamítnout H_0, jestliže platí $\sum_{i=1}^{n} c_i \, a_n(r_i, d) > k$ pro vhodné k. Zbývá tedy dokázat konvergenci (7.6). Platí

$$\frac{1}{\Delta}\left[Q_\Delta(R=r) - Q_0(R=r)\right] =$$

$$(7.9) \quad = \int_{R=r}\!\!\cdots\!\int \frac{1}{\Delta}\Big[\prod_{i=1}^{n} d(x_i, \Delta c_i) - \prod_{i=1}^{n} d(x_i, 0)\Big]\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{R=r}\!\!\cdots\!\int \frac{d(x_i,\Delta c_i) - d(x_i, 0)}{\Delta} \prod_{j=1}^{i-1} d(x_j, \Delta c_j) \prod_{k=i+1}^{n} d(x_k, 0)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

kde jsme použili identitu

$$(7.10) \quad \prod_{i=1}^{n} A_i - \prod_{j=1}^{n} B_j = \sum_{i=1}^{n} (A_i - B_i) \prod_{j=1}^{i-1} A_j \prod_{k=i+1}^{n} B_k .$$

Jestliže je $c_i = 0$, je i-tý sčítanec na pravé straně (7.9) roven 0. Jestliže je $c_i > 0$, pak vzhledem k předpokladům (a)-(d) platí

$$\overline{\lim_{\Delta \to 0}} \int_{R=r}\!\!\cdots\!\int \frac{|d(x_i,\Delta c_i) - d(x_i,0)|}{\Delta} \prod_{j=1}^{i-1} d(x_j, \Delta c_j) \prod_{k=i+1}^{n} d(x_k, 0)\, dx_1 \ldots dx_n \leq$$

$$(7.11) \quad \leq \overline{\lim_{\Delta \to 0}} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta c_i} \int_{R=r}\!\!\cdots\!\int |\dot{d}(x_i, t)| \prod_{j=1}^{i-1} d(x_j, \Delta c_j) \prod_{k=i+1}^{n} d(x_k, 0)\, dx_1 \ldots dx_n\, dt$$

$$= |c_i| \int_{R=r}\!\!\cdots\!\int |\dot{d}(x_i, 0)| \prod_{j \neq i} d(x_j, 0)\, dx_1 \ldots dx_n ;$$

analogickou nerovnost dostaneme pro $c_i < 0$; $i=1,\dots,n$.

Na druhé straně, rozdělme integrand na levé straně (7.11) (bez absolutní hodnoty) na kladnou a zápornou část a na každou z nich použijme Fatouovo lemma. Odtud a ze (7.11) dostaneme

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{R=r}\!\!\dots\!\int \frac{d(x_i,\Delta c_i)-d(x_i,0)}{\Delta} \prod_{j=1}^{i-1} d(x_j,\Delta c_j) \prod_{k=i+1}^{n} d(x_k,0)\,dx_1\dots dx_n =$$

(7.12)

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{R=r}\!\!\dots\!\int c_i\, \dot d(x_i,0)\,.\, \prod_{j\neq i} d(x_j,0)\,dx_1 \dots dx_n\,.$$

Dále, rovnosti $d(x,0) = 0$ a $\dot d(x,0) \neq 0$ mohou nastat zároveň jen na množině míry 0 (je-li $\dot d(x,0) > 0$, je $d(x,t)$ rostoucí v bodě $t = 0$; kdyby bylo $d(x,0) = 0$, musela by hustota $d(x,t)$ pro $-\delta < t < 0$ nabýt záporných hodnot, což je spor. Podobně pro $\dot d(x,0) < 0$.). Pravou stranu (7.12) můžeme tedy psát ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int\limits_{R=r}\!\!\dots\!\int \frac{\dot d(x_i,0)}{d(x_i,0)} \prod_{j=1}^{n} d(x_j,0)\,dx_1 \dots dx_n =$$

$$(7.13) \qquad = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} c_i\, E\left[\frac{\dot d(X_i,0)}{d(X_i,0)} \,\Big|\, R = r\right] =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} c_i\, E\left[\frac{\dot d(X^{(r_i)},0)}{d(X^{(r_i)},0)}\right] = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_n(r_i,d).$$

(7.6) pak plyne ze (7.9), (7.12) a (7.13). □

Následující lemmata budou užitečná pro aplikaci věty 1 na speciální případy.

<u>Lemma 1.</u> Nechť $f(x)$ je absolutně spojitá hustota vyhovující vztahu

$$(7.14) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| \, dx < \infty .$$

Pak množina hustot $A = \{ d(x,\theta) : \theta \in \mathcal{J} \}$, kde $d(x,\theta) = f(x - \theta)$ a $\mathcal{J} = R^1$, vyhovuje předpokladům (a)-(d) věty 1.

<u>Důkaz</u> : Platnost (a)-(c) je zřejmá; dále platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{d}(x,\theta)| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x-\theta)| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| \, dx < \infty ,$$

odkud plyne (d). □

<u>Lemma 2.</u> Nechť f je absolutně spojitá hustota vyhovující podmínce

$$(7.15) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x \, f'(x)| \, dx < \infty .$$

Pak množina hustot $A = \{ d(x,\theta) : \theta \in \mathcal{J} \}$, kde $d(x,\theta) = e^{-\theta} f((x-\mu)e^{-\theta})$, $\mathcal{J} = R^1$, vyhovuje předpokladům (a)-(d) věty 1.

<u>Důkaz.</u> (a)-(c) jsou zřejmé; (d) plyne ze vztahů

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{d}(x,\theta)| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\theta} f((x-\mu)e^{-\theta}) + e^{-2\theta}(x-\mu) f'(x-\mu)e^{-\theta}| \, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) + x \, f'(x)| \, dx .$$

Nyní popíšeme lokálně nejsilnější pořadové testy H_0 proti nejdůležitějším alternativám: alternativě dvou výběrů lišících se polohou, alternativě dvou výběrů lišících se rozptýleností a alternativě regrese v poloze. Testy dostaneme snadno specializací věty 1.

H_0 proti dvěma výběrům lišících se posunutím v poloze.

Uvažujme H_0 proti alternativě $\{q_\Delta : \Delta > 0\}$, kde

$$(7.16)\qquad q_\Delta(x_1,\dots,x_N) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i).\prod_{i=m+1}^{N} f(x_i-\Delta),$$

kde f je známá absolutně spojitá hustota vyhovující (7.14). Pak LN pořadový α-test má kritický obor

$$(7.17)\qquad \sum_{i=m+1}^{N} a_N(R_i,f) \geq k$$

kde k vyhovuje podmínce $P(\sum_{i=m+1}^{N} a_N(R_i,f) \geq k) = \alpha$, $P \in H_0$
a

$$(7.18)\qquad a_N(i,f) = E\left[-\frac{f'(X_N^{(i)})}{f(X_N^{(i)})}\right], \quad i=1,\dots,N$$

a $X_N^{(1)} < \dots < X_N^{(N)}$ jsou pořádkové statistiky, příslušné náhodnému výběru $X_1,\dots,X_N$ z rozdělení s hustotou f. Hodnoty $a_N(i,f)$ jsou tzv. skóry příslušné f; lze je také psát ve tvaru

$$(7.19)\qquad a_N(i,f) = E\,\varphi(U_N^{(i)},f), \quad i=1,\dots,N,$$

kde

$$(7.20)\qquad \varphi(u,f) = -\frac{f'(F^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))}, \quad 0 < u < 1$$

a $U_N^{(1)},\dots,U_N^{(N)}$ jsou pořádkové statistiky příslušné výběru rozsahu N z rovnoměrného rozdělení $R(0,1)$. Jiné možné vyjádření skórů je

$$(7.21)\qquad a_N(i,f) = N\binom{N-1}{i-1}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)(F(x))^{i-1}(1-F(x))^{n-i}\,dx.$$

Poznámka. Výpočet skórů (7.19)(viz též (7.21)) je pro některá rozdělení f obtížný. Proto nemáme-li např. k dispozici tabulky těchto skórů, nahrazujeme je tzv. přibližnými skóry

$$(7.22) \qquad a_N(i,f) = \varphi(\tfrac{i}{N+1}, f) = \varphi(E\, U_N^{(i)}, f), \quad i=1,\dots,N.$$

Lze ukázat, že testové statistiky S_N se skóry (7.19) a testové statistiky S_N' s přibližnými skóry (7.22) jsou asymptoticky ekvivalentní v tom smyslu, že platí

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E(S_N - S_N')^2}{\operatorname{var} S_N} = 0,$$

což mimo jiné znamená, že obě statistiky mají za H_0 stejné asymptotické rozdělení.

V kapitole 3 jsme popsali základní pořadové testy, které se používají pro testování H_0 proti alternativě dvou výběrů lišících se polohou. Na základě věty 1 můžeme nyní určit, pro který typ rozdělení jsou tyto testy případně lokálně nejsilnější.

a) Wilcoxonův test je lokálně nejsilnější proti alternativě (7.16), kde f je hustota logistického rozdělení

$$(7.23) \qquad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad x \in R^1.$$

Skutečně, snadno ověříme, že v tomto případě je $\varphi(u,f) = 2u-1$, $0<u<1$, a $E\,\varphi(U_N^{(i)},f) = 2\,\frac{i}{N+1} - 1$, $i=1,\dots,N$.

b) van der Waerdenův test je založen na přibližných skórech odpovídajících hustotě f normálního rozdělení $N(0,1)$:

skutečně, v tomto případě je $-\frac{f'(x)}{f(x)} = x \Rightarrow \varphi(u,f) = \Phi^{-1}(u)$, $0<u<1$, kde Φ je distribuční funkce $N(0,1)$.

c) <u>Mediánový test</u> je založen na přibližných skórech odpovídajících dvojitě exponenciálnímu rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \quad x \in R^1. \tag{7.24}$$

V tomto případě je $\varphi(u,f) = \mathrm{sign}(u - \frac{1}{2})$, $0<u<1$.

<u>H_0 proti alternativě dvou výběrů lišících se rozptýleností.</u>

Uvažujme H_0 proti alternativě $\{q_\Delta : \Delta > 0\}$, kde

$$q_\Delta(x_1,\dots,x_N) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i - \mu) \prod_{i=m+1}^{N} e^{-\Delta} f\left(\frac{x_i-\mu}{e^\Delta}\right), \Delta>0 \tag{7.25}$$

kde f je absolutně spojitá hustota vyhovující (7.15) a μ je rušivý parametr. LN pořadový test má kritický obor

$$\sum_{i=m+1}^{N} a_{1N}(R_i,f) \geq k, \tag{7.26}$$

kde k je určeno podmínkou $P(\sum_{i=m+1}^{N} a_{1N}(R_i,f) \geq k) = \alpha$, $P \in H_0$ a skóry mají tvar

$$a_{1N}(i,f) = E\left\{-1-X_N^{(i)} \frac{f'(X_N^{(i)})}{f(X_N^{(i)})}\right\} = E\,\varphi_1(U_N^{(i)},f), \quad i=1,\dots,N, \tag{7.27}$$

kde

$$\varphi_1(u,f) = -1-F^{-1}(u)\,\frac{f'(F^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))} \quad , \quad 0<u<1. \tag{7.28}$$

Podobně jako u testů polohy, i zde můžeme použít též přibližné skóry tvaru

(7.29) $$a_{1N}(i,f) = \varphi_1\left(\frac{i}{N+1}, f\right), \quad i=1,\dots,N.$$

Ze (7.27)-(7.29) vidíme, že Klotzův test je vhodný pro alternativy (7.25), kde f je hustota normálního rozdělení, zatím co kvartilový test je založen na přibližných skórech odpovídajících hustotě

(7.30) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \dots \quad |x| \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16x^2} & \dots \quad |x| > \frac{1}{4} \end{cases}.$$

H_0 proti alternativě regrese v poloze.

Uvažujme H_0 proti alternativě $\{q_\Delta : \Delta > 0\}$, kde

(7.31) $$q_\Delta(x_1,\dots,x_N) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i - \Delta c_i), \quad \Delta > 0,$$

kde f je známá absolutně spojitá hustota vyhovující (7.14) a $c_1,\dots,c_N$ jsou známé regresní konstanty. Pak LN pořadový test má kritický obor

(7.32) $$\sum_{i=1}^{N} c_i\, a_N(R_i,f) \geq k,$$

kde k je dáno podmínkou $P(\sum_{i=1}^{N} c_i\, a_N(R_i,f) \geq k) = \alpha$, $P \in H_0$, a skóry mají tvar (7.19).

Zde platí, podobně jako u alternativy posunutí v poloze, že lineární (Wilcoxonovy) skóry jsou vhodné pro logistické rozdělení, skóry tvaru $a_N(i) = \Phi^{-1}(\frac{i}{N+1})$ jsou vhodné pro normální rozdělení a nula-jedničkové skóry jsou vhodné pro dvojitě exponenciální rozdělení.

7.1.2. Lokálně nejsilnější pořadové testy hypotézy symetrie

Uvažujme hypotézu symetrie H_1 proti nejčastější alternativě, tj. <u>alternativě posunutí</u> $\{q_\Delta : \Delta > 0\}$,

$$q_\Delta(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i-\Delta) : \Delta > 0, \tag{7.33}$$

kde f je známá symetrická hustota, $f(-x) = f(x) > 0$, $x \in R^1$, H_1 odpovídá případu $\Delta = 0$.

VĚTA 2. Nechť f je absolutně spojitá symetrická hustota vyhovující podmínce (7.14). Pak test s kritickým oborem

$$\sum_{i=1}^{n} a_n^+(R_i^+,f).\ \mathrm{sign}\ X_i \geq k \tag{7.34}$$

je LN pořadový test H_1 proti (7.33); k je dáno podmínkou $P(\sum_{i=1}^{N} a_N^+(R_i^+,f)\mathrm{sign}\ X_i \geq k) = \alpha$ pro $P \in H_1$, R_i^+ je pořadí $|X_i|$ mezi $|X_1|,\dots,|X_n|$ a skóry $a_N^+(i,f)$ jsou tvaru

$$a_n^+(i,f) = E\ \varphi^+(U_n^{(i)},f), \quad i=1,\dots,n, \tag{7.35}$$

kde

$$\varphi^+(u,f) = \varphi(\tfrac{u+1}{2},f), \qquad 0<u<1. \tag{7.36}$$

Poznámka. "Pořadový" test v tomto případě znamená test, založený na pořadích $R_1^+,\dots,R_n^+$ absolutních hodnot $|X_1|,\dots,|X_n|$ a na znaménkách $\mathrm{sign}\ X_1,\dots,\mathrm{sign}\ X_n$.

Důkaz. Nechť Q_Δ je rozdělení pravděpodobností s hustotou q_Δ. Ukážeme, že pro libovolnou permutaci $r \in \mathcal{R}$ a pro libovolný vektor $\underset{\sim}{v} = (v_1, \dots, v_n)$ se složkami rovnými buď +1 nebo -1 platí

$$(7.37) \quad \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \left[2^n n!\, Q_\Delta (\operatorname{sign} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{v},\ R^+ = r) - 1 \right] = \sum_{i=1}^{n} v_i\, a_n^+(r_i, f).$$

Odtud pak plyne, podobně jako u věty 1, existence $\varepsilon > 0$ takového, že pro lib. Δ, $0 < \Delta < \varepsilon$ a pro libovolná $r, r' \in \mathcal{R}$ a v, v' vyhovující nerovnosti

$$(7.38) \quad \sum_{i=1}^{n} v_i\, a_n^+(r_i, f) > \sum_{i=1}^{n} v_i'\, a_n^+(r_i', f)$$

platí

$$(7.39) \quad Q_\Delta(\operatorname{sign} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{v},\ R^+ = r) > Q_\Delta(\operatorname{sign} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{v}',\ R^+ = r')$$

a odtud podle Neyman-Pearsonova lemmatu plyne tvrzení věty.

Důkaz (7.37) (jednotlivé kroky jsou analogické jako v důkazu (7.6)):

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \left[2^n n!\, Q_\Delta(\operatorname{sign} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{v},\ R^+ = r) - 1 \right] =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} 2^n n! \sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\operatorname{sign} X = v \\ R^+ = r}}{\int \dots \int} \frac{f(x_i - \Delta) - f(x_i)}{\Delta} \prod_{j=i+1}^{n} f(x_j) \prod_{k=1}^{i-1} f(x_k - \Delta)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= 2^n n! \sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\operatorname{sign} X = v \\ R^+ = r}}{\int \dots \int} (-f'(x_i)) \prod_{j \neq i} f(x_j)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= 2^n n! \sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\mathrm{sign}X=v \\ R^+=r}}{\int \cdots \int} \left[-\mathrm{sign}\, x_i \cdot \frac{f'(|x_i|)}{f(|x_i|)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \right] dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \; a_n^+(r_i, f). \qquad \square$$

Poznámka. Z věty 2 vyplývá, že jednovýběrový Wilcoxonův test je LN pro logistickou hustotu f, znaménkový test je LN pro dvojitě-exponenciální hustotu a van der Waerdenův test je založen na přibližných skórech odpovídajících normálnímu rozdělení.

7.1.3. Lokálně nejsilnější pořadové testy pro hypotézu nezávislosti

Uvažujme hypotézu H_2 nezávislosti ve dvourozměrném rozdělení proti alternativě $\left\{ q_\Delta, \Delta \in R^1 \right\}$, kde

$$q_\Delta(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \prod_{i=1}^{n} h_\Delta(x_i, y_i), \tag{7.40}$$

kde

$$h_\Delta(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\Delta z) f_2(y-\Delta z)\, dM(z), \tag{7.41}$$

kde f_1 a f_2 jsou známé jednorozměrné hustoty a $M(z)$ je distribuční funkce taková, že

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} (z-\bar{z})^2 d\, M(z) < \infty, \quad \bar{z} = \int_{-\infty}^{\infty} z\, dM(z). \tag{7.42}$$

Jinak řečeno, za alternativy (7.40) platí

$$\begin{aligned} X_i &= X_i^o + \Delta Z_i \\ Y_i &= Y_i^o + \Delta Z_i \end{aligned} \qquad i=1, \ldots, n, \tag{7.43}$$

kde X_i^o, Y_i^o a Z_i jsou vzájemně nezávislé, $(X_1^o,\dots,X_n^o)$ resp. $(Y_1^o,\dots,Y_n^o)$ tvoří náhodné výběry z rozdělení f_1 resp. f_2 a $(Z_1,\dots,Z_n)$ tvoří náhodný výběr s libovolnou distribuční funkcí M s konečným rozptylem.

Následující větu uvedeme bez důkazu, který lze např. nalézt v knize Hájek-Šidák (1967),kap.II.4.1.

VĚTA 3. Nechť f_1 a f_2 jsou absolutně spojité hustoty, obě vyhovující (7.14) a nechť derivace $f_1'(x)$ a $f_2'(x)$ jsou skoro vš. spojité. Pak test s kritickým oborem

$$\sum_{i=1}^{n} a_n(R_i,f_1)a_n(S_i,f_2) \geq k \tag{7.44}$$

je LN pořadový test H_2 proti alternativě (7.40); skóry jsou dány vztahem (7.19) resp.(7.21); $R_1,\dots,R_n$ jsou pořadí $X_1,\dots,X_n$ a $S_1,\dots,S_n$ jsou pořadí $Y_1,\dots,Y_n$.

7.2. Asymptotická relativní vydatnost testů

Nechť Φ_N a Φ_N' jsou 2 posloupnosti testů téže hypotézy H založené na N pozorováních $X_1,\dots,X_N$. Předpokládejme, že rozdělení testových statistik T_N a T_N' závisí na parametru Θ (např. parametr posunutí) a hypotézu a alternativu pišme ve tvaru

$$H : \Theta = \Theta_0 \qquad\qquad K : \Theta > \Theta_0.$$

Chceme-li porovnat účinnost 2 testů, musíme porovnat jejich silofunkce. Při pevném N je však obtížné silofunkce vypočítat. Omezíme se tedy na asymptotické srovnání testů při

$N \to \infty$. Řada testových statistik má asymptoticky normální rozdělení jak za hypotézy, tak za některých alternativ. Z asymptotického rozdělení můžeme odvodit asymptotickou sílu proti jednotlivým alternativám.

Uvažujeme-li pevnou jednoduchou alternativu, např. že hustota náhodného vektoru $(X_1,\dots,X_N)$ je $q_{\theta_1}(x_1,\dots,x_N)$ a zvolíme-li pevně hladinu významnosti α , pak síla libovolného konsistentního testu proti této alternativě konverguje k 1 při $N \to \infty$. Vydatnost testu pak můžeme měřit rychlostí této konvergence (Hodges-Lehmannova vydatnost).

Jestliže uvažujeme pevnou jednoduchou alternativu a předepíšeme limitní hodnotu β síly, které má test proti této alternativě nabývat, pak hladina testu konverguje k nule při $N \to \infty$ a opět můžeme měřit vydatnost testu rychlostí této konvergence (Bahadurova vydatnost).

Jestliže zvolíme pevně jak limitní hladinu významnosti, tak sílu β , které má test nabývat, a uvažujeme alternativy typu $\left\{q_\theta(x_1,\dots,x_N),\ \theta > \theta_0\right\}$, pak hodnota θ , pro kterou α - test dosáhne limitní síly β , musí konvergovat k θ_0. To je východiskem k definici tzv. Pitmanovy asymptotické relativní vydatnosti testů, která se nejčastěji užívá a kterou podrobněji vyšetříme.

7.2.1. Pitmanova vydatnost

Uvažujme posloupnost testových statistik $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ závislých na N_k pozorováních, kde $\lim_{k\to\infty} N_k = \infty$. Hypotézu a alternativu pišme ve tvaru

$$H : \theta = \theta_0 \qquad\qquad K : \theta > \theta_0 .$$

Omezíme se na posloupnosti parametrických hodnot $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ takové, že $\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0$ a které splňují následující předpoklad:

(A) Rozdělení statistiky

$$\sqrt{N_k}\ \frac{T_k - \mu(\theta_k)}{\sigma(\theta_k)}$$

je asymptoticky normální $N(0,1)$ pro $k\to\infty$, kde funkce $\mu(\theta)$ je diferencovatelná v bodě $\theta = \theta_0$ a $\mu'(\theta_0) \neq 0$ a pro funkci $\sigma(\theta)$ platí $\sigma(\theta) > 0$ a $\lim_{k\to\infty} \frac{\sigma(\theta_k)}{\sigma(\theta_0)} = 1.$

Uvažujme posloupnost testů

$$(7.45)\qquad \Phi_k(x_1,\dots,x_{N_k}) = \begin{cases} 1 \dots & \sqrt{N_k}\ \dfrac{T_k - \mu(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} \geq C_k \\ 0 \dots & \text{jinak.} \end{cases}$$

Z předpokladu (A) vyplývá, že platí

$$(7.46)\qquad \lim_{k\to\infty} C_k = u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha),$$

kde α je zvolená hladina významnosti a Φ distribuční funkce $N(0,1)$. Sílu testu Φ_k proti alternativě $\theta = \theta_k$ lze psát ve tvaru

$$(7.47)\qquad \beta_k = P\left\{\sqrt{N_k}\ \frac{T_k - \mu(\theta_k)}{\sigma(\theta_k)} \geq \left[C_k - \frac{\mu(\theta_k) - \mu(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)}\right] \cdot \frac{\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_k)} \,\middle|\, \theta = \theta_k\right\}.$$

Zvolme pevně hodnotu β , $0<\beta< 1$. Zajímá nás, za jakých podmínek bude platit $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = \beta$.

Označme $\underline{a}$ řešení rovnice

$$(7.48) \qquad \Phi(u_\alpha - a) = 1 - \beta ,$$

tj. $a = u_\alpha - \Phi^{-1}(1-\beta)$. Pak z předpokladu (A) plyne, že $\beta_k \to \beta$ právě tehdy, jestliže

$$(7.49) \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt{N_k}\, \frac{\mu(\theta_k)-\mu(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} = a.$$

Odtud a z diferencovatelnosti $\mu(\theta)$ v bodě θ_0 vyplývá, že $\theta_k - \theta_0$ je řádu $\frac{1}{\sqrt{N_k}}$, což znamená, že se omezíme na posloupnosti $\{\theta_k\}$ tvaru

$$(7.50) \qquad \theta_k = \theta_0 + \frac{\delta}{\sqrt{N_k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N_k}}\right), \qquad \delta > 0,$$

tj. posloupnosti splňující

$$(7.51) \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt{N_k}\,(\theta_k - \theta_0) = \delta \qquad \text{pro nějaké } \delta > 0.$$

Pro alternativy typu (7.50) platí věta:

<u>VĚTA 4.</u> Nechť předpoklad (A) platí pro libovolnou posloupnost alternativ $\{\theta_k\}$ vyhovující (7.50). Pak platí

$$(7.52) \qquad \lim_{k\to\infty} \beta_k = \Phi(c\delta - u_\alpha) ,$$

kde β_k je síla testu (7.45) proti alternativě θ_k (typu

(7.50)) a kde

$$c = \frac{\mu'(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} \quad . \tag{7.53}$$

Obráceně, jestliže platí (7.52), pak posloupnost $\{\theta_k\}$ vyhovuje (7.50).

<u>Důkaz</u>. Nechť θ_k vyhovuje (7.50), a tedy (7.51). Pak platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{N_k}\, \frac{\mu(\theta_k) - \mu(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} = c\delta$$

a ze (7.49) plyne $c\delta = a$; první tvrzení plyne ze (7.48). Podobně se dokáže obrácené tvrzení. □

<u>Poznámka.</u> Věta 4 ukazuje, že limitní síla testu (7.45) proti alternativám typu (7.50) závisí na testové statistice jen prostřednictvím konstanty c a je rostoucí funkcí c pro libovolné pevné $\delta > 0$. Charakteristika c daná vztahem (7.53) se nazývá <u>efikace</u> posloupnosti testů (7.45).

<u>Příklad 1</u>. Nechť $X_1,\dots,X_{m_k}$ a $Y_1,\dots,Y_{n_k}$ jsou nezávislé výběry, kde

$$P(X_i < x) = F(x),\ i=1,\dots,m_k \quad \text{a} \quad P(Y_j<y) = G(y) = F(y-\Delta),\quad j=1,\dots,n_k .$$

Nechť F má hustotu f takovou, že $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 f(x)dx < \infty$.
Předpokládejme, že platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{N_k} = \lambda, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{N_k} = 1-\lambda , \quad 0 < \lambda < 1,$$

kde $N_k = m_k+n_k$, $k=1,2,\dots$.
Nechť

$$T_k = \frac{1}{N_k^2}\left[W_k - \frac{1}{2}\, n_k(N_k+1)\right],$$

kde W_k je statistika dvouvýběrového Wilcoxonova testu (3.15); položme $\theta_k = \frac{\Delta}{\sqrt{N_k}}$, $\theta_o = 0$. Pak z věty VI.2.3 v knize Hájek-Šidák (1967) plyne, že statistika

$$\sqrt{N_k}\ \frac{T_k - \theta_k \lambda(1-\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}{\sqrt{\frac{1}{12}\lambda(1-\lambda)}}$$

má při $k \to \infty$ asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Jsou tedy splněny předpoklady věty 4, kde $\mu(\theta_k) = \theta . \lambda(1-\lambda) . \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx$ a $\sigma(\theta) = \sqrt{\frac{1}{12}\lambda(1-\lambda)}$.

Z téže věty dostaneme efikaci Wilcoxonova testu

$$c_W = \sqrt{12\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx \tag{7.54}$$

a limitní síla testu proti posloupnosti $\{\theta_k\}$ je

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = \Phi\left(\Delta\sqrt{12\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx - u_\alpha\right). \tag{7.55}$$

<u>Příklad 2</u>. Za stejné situace jako v příkladu 1 hledejme efikaci a asymptotickou sílu t-testu. t-test zamítá H_o, jestliže platí

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S_k\sqrt{\frac{1}{m_k} + \frac{1}{n_k}}} > C_k'$$

kde $S_k^2 = \frac{1}{N_k - 2}\left[\sum_{i=1}^{m_k}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_k}(Y_j - \bar{Y})^2\right]$

a $\lim_{k\to\infty} C_k' = u_\alpha$. Předpokládejme, že rozdělení F má konečný rozptyl σ^2 a použijme větu 4 na statistiku

$$T_k = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S}.$$

Statistika

$$\sqrt{N_k}\left[\frac{T_k}{S_k\frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}} - \frac{\theta_k}{\sigma\frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}}\right]$$

má při $k\to\infty$ asymptoticky normální rozdělení, což plyne z konvergence t_ν- rozdělení k $N(0,1)$ při $\nu\to\infty$ a z konvergence $\frac{1}{S_k} - \frac{1}{\sigma} \xrightarrow{P} 0$ při $k\to\infty$.

Efikace t-testu je tedy rovna

$$c = \frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{\sigma} \tag{7.56}$$

a asymptotická síla je

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{\lambda(1-\lambda)} - u_\alpha\right). \tag{7.57}$$

<u>Příklad 3</u>. Analogicky najdeme efikaci a asymptotickou sílu Wilcoxonova testu symetrie. Nechť $X_1,\dots,X_{N_k}$ je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí $F(x-\Delta)$, kde $F(x)$ má hustotu $f(x)$ symetrickou kolem 0. Testujme $H : \Delta = 0$ proti $K : \Delta > 0$ a položme $\theta_k = \sqrt{N_k}\cdot\Delta$. Položme

$$T_k = \frac{W_k^+}{N_k^2}$$

kde W_k^+ je jednovýběrová Wilcoxonova statistika ve tvaru $W_k^+ = \sum_{i=1}^{N_k} \operatorname{sign} X_i . R_i^+$. Pak podle věty VI.2.5 knihy Hájek-Šidák (1967) má statistika

$$\sqrt{N_k}\cdot\frac{T_k - 2\,\theta_k\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

asymptoticky rozdělení $N(0,1)$ pro $k\to\infty$. Odtud dostaneme efikaci a asymptotickou sílu:

$$(7.58) \qquad c = \sqrt{12} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx$$

a

$$(7.59) \qquad \lim_{k\to\infty} \beta_k = \Phi\left(\Delta \sqrt{12} \, . \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx - u_{\alpha}\right).$$

Věta dává nejen jednoduchou aproximaci síly testu,ale je také východiskem k určení relativní asymptotické vydatnosti jednoho testu vzhledem k druhému.

Nechť $T = \{T_k\}$ a $T' = \{T'_k\}$ jsou 2 posloupnosti testových statistik pro tutéž hypotézu proti téže alternativě, založené na výběrech rozsahu N_k resp. N'_k. Pak limitu $\frac{N'_k}{N_k}$ podílu rozsahů výběru potřebných k dosažení stejné limitní síly β proti stejné posloupnosti alternativ, pokud hladiny významnosti obou testů konvergují k téže limitě α, nazveme Pitmanovou vydatností testu T vzhledem k T', tj.

$$(7.60) \qquad e_{T,T'} = \lim_{k\to\infty} \frac{N'_k}{N_k} .$$

Jestliže např. $e_{T,T'} = \frac{1}{2}$, pak posloupnost testů T potřebuje přibližně dvojnásobek pozorování než posloupnost testů T' k dosažení stejné asymptotické síly.

<u>VĚTA 5</u>. Nechť T a T' jsou 2 posloupnosti testů pro $H: \theta = \theta_0$, založené na výběrech rozsahů N_k a N'_k, jejichž hladiny významnosti α_k a α'_k obě konvergují k α a jejichž síly β_k a β'_k proti posloupnosti alternativ $\{\theta_k\}$ obě konvergují k β, $0 < \alpha < \beta < 1$. Nechť oba testy splňují předpoklady věty 4 a nechť efikace testů jsou $\underline{c}$ a $\underline{c}'$. Pak existuje Pitmanova vydatnost T vzhledem k T' a je rovna

(7.61) $$e_{T,T'} = \left(\frac{c}{c'}\right)^2 .$$

<u>Důkaz.</u> Jestliže $\lim_{k\to\infty} \beta_k = \beta$, $\alpha<\beta<1$, pak podle věty 1 posloupnost $\{\theta_k\}$ vyhovuje (7.50). Protože také $\lim_{k\to\infty}\beta'_k = \beta$, plyne z věty 1, že $c\delta = c'\delta'$. Ze (7.51) pak plyne

$$\sqrt{\frac{N'_k}{N_k}} = \sqrt{\frac{N'_k}{N_k}} \cdot \frac{\theta'_k - \theta_0}{\theta_k - \theta_0} = \frac{\delta'}{\delta} . \qquad \square$$

<u>Příklad 4.</u> Stanovme Pitmanovu vydatnost dvouvýběrového Wilcoxonova testu vzhledem ke dvouvýběrovému t-testu. Ze (7.54) a (7.56) dostaneme

(7.62) $$e_{W,t}(F) = 12\sigma^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx\right)^2 .$$

Tato vydatnost nezávisí na hodnotách α a β . Speciálně, jestliže f je hustota $N(0,1)$, je $\sigma^2 = 1$ a $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, tedy

(7.63) $$e_{W,t}(\Phi) = \frac{3}{\pi} \approx 0.955 .$$

Dá se ukázat, že tato vydatnost nezávisí na změně střední hodnoty a rozptylu normálního rozdělení; (7.63) je vydatností Wilcoxonova testu vzhledem k t -testu při všech normálních alternativách.

Příklady dalších vydatností $e_{W,t}(f)$:

$f = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ (dvojitě exponenciální) : $e_{W,t}(f) = \frac{3}{2}$

$f = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ (logistické) : $e_{W,t} = \frac{\pi^2}{9} \approx 1.097$

Hodges a Lehmann (1956) dokázali, že platí

(7.64) $$e_{W,t}(f) \doteq 0.864$$

pro libovolnou hustotu f s konečným rozptylem σ^2. Minimum v (7.64) je dosaženo pro hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{20\sqrt{5}}(5 - x^2) & \ldots \ |x| \leq 5 \\ 0 & \ldots \ |x| > 5 . \end{cases}$$

Další numerické hodnoty relativních vydatností některých testů jsou uvedeny v následující tabulce (hodnoty převzaty z knihy Büning-Trenkler (1978)).

Pitmanovy vydatnosti testů

1.test	2.test	Základní rozdělení F: Normální	Rovnoměrné	Dvojitě exponenciální	Logistické	Dolní hranice	Horní hranice
I. Jednovýběrové testy							
(1) znaménkový	t-test	0.637	0.333	2.000	0.823	0	∞
(2) znaménkový	Wilcoxonův	0.667	0.333	1.333	0.750	0	x
(3) Wilcoxonův	t-test	0.955	1.000	1.500	1.097	0.864	∞
II. Dvouvýběrové testy							
(1) Mediánový	t-test	0.637	x	x	x	x	x
(2) Wilcoxonův	t-test	0.955	1.000	1.500	1.097	0.864	∞
(3) v.d.Waerdenův	t-test	1.000	x	1.273	1.047	1.000	∞
(4) Siegel-Tukey	F-test	0.608	0.600	0.940	x	0	∞
(5) Klotzův	F-test	1.000	x	x	x	0	∞
III. Více výběrů							
(1) Kruskal-Wallis	F-test	0.955	1.000	1.500	1.097	0.864	∞
IV. Nezávislost							
(1) Kendall (Spearman)	t-test	0.912	1.000	1.266	x	x	x

T a b u l k a 1. Jednovýběrový Wilcoxonův test.

Tabulka udává kvantily statistiky W^+ pro $\alpha \leq 0,4$ vyhovující $P(W^+ \leq w_\alpha) \leq \alpha$ a $P(W^+ \leq w_\alpha + 1) > \alpha$.
Kvantily w_α odpovídající $\alpha \geq 0,6$ se vypočtou podle vztahu $w_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - w_{1-\alpha}$.

n	$w_{0.005}$	$w_{0.01}$	$w_{0.025}$	$w_{0.05}$	$w_{0.10}$	$w_{0.20}$	$w_{0.30}$	$w_{0.40}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
4	0	0	0	0	0	2	2	3	10
5	0	0	0	0	2	3	4	5	15
6	0	0	0	2	3	5	7	8	21
7	0	0	2	3	5	8	10	11	28
8	0	1	3	5	8	11	13	15	36
9	1	3	5	8	10	14	17	19	45
10	3	5	8	10	14	18	21	24	55
11	5	7	10	13	17	22	26	29	66
12	7	9	13	17	21	27	31	35	78
13	9	12	17	21	26	32	37	41	91
14	12	15	21	25	31	38	43	47	105
15	15	19	25	30	36	44	50	54	120
16	19	23	29	35	42	50	57	62	136
17	23	27	34	41	48	57	64	70	153
18	27	32	40	47	55	65	72	79	171
19	32	37	46	53	62	73	81	88	190
20	37	43	52	60	69	81	90	97	210

T a b u l k a 2. Wilcoxonův test.

Tabulka udává kvantily statistiky W_N Wilcoxonova testu proti levostranným alternativám vyhovující $P(W_N \le w_\alpha) \le \alpha$ a $P(W_N \le w_\alpha + 1) > \alpha$. Kvantily testu proti pravostranným alternativám vypočteme podle vztahu $w_{1-\alpha} = 2EW_N - w_\alpha = 2\mu - w_\alpha$; rozsahy výběrů vyhovující $3 \le n \le m \le 25$.

	n = 3							n = 4							
m	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	m
3					6	7	21								3
4				-	6	7	24			-	10	11	13	36	4
5				6	7	8	27		-	10	11	12	14	40	5
6			-	7	8	9	30		10	11	12	13	15	44	6
7			6	7	8	10	33		10	11	13	14	16	48	7
8		-	6	8	9	11	36		11	12	14	15	17	52	8
9		6	7	8	10	11	39	-	11	13	14	16	19	56	9
10		6	7	9	10	12	42	10	12	13	15	17	20	60	10
11		6	7	9	11	13	45	10	12	14	16	18	21	64	11
12		7	8	10	11	14	48	10	13	15	17	19	22	68	12
13		7	8	10	12	15	51	11	13	15	18	20	23	72	13
14		7	8	11	13	16	54	11	14	16	19	21	25	76	14
15		8	9	11	13	16	57	11	15	17	20	22	26	80	15
16	-	8	9	12	14	17	60	12	15	17	21	24	27	84	16
17	6	8	10	12	15	18	63	12	16	18	21	25	28	88	17
18	6	8	10	13	15	19	66	13	16	19	22	26	30	92	18
19	6	9	10	13	16	20	69	13	17	19	23	27	31	96	19
20	6	9	11	14	17	21	72	13	18	20	24	28	32	100	20
21	7	9	11	14	17	21	75	14	18	21	25	29	33	104	21
22	7	10	12	15	18	22	78	14	19	21	26	30	35	108	22
23	7	10	12	15	19	23	81	14	19	22	27	31	36	112	23
24	7	10	12	16	19	24	84	15	20	23	27	32	38	116	24
25	7	11	13	16	20	25	87	15	20	23	28	33	38	120	25

T a b u l k a 2. - pokračování

m	n = 5: 0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	n = 6: 0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	m
5		15	16	17	19	20	55								
6		16	17	18	20	22	60	-	23	24	26	28	30	78	6
7	-	16	18	20	21	23	65	21	24	25	27	29	32	84	7
8	15	17	19	21	23	25	70	22	25	27	29	31	34	90	8
9	16	18	20	22	24	27	75	23	26	28	31	33	36	96	9
10	16	19	21	23	26	28	80	24	27	29	32	35	38	102	10
11	17	20	22	24	27	30	85	25	28	30	34	37	40	108	11
12	17	21	23	26	28	32	90	25	30	32	35	38	42	114	12
13	18	22	24	27	30	33	95	26	31	33	37	40	44	120	13
14	18	22	25	28	31	35	100	27	32	34	38	42	46	126	14
15	19	23	26	29	33	37	105	28	33	36	40	44	48	132	15
16	20	24	27	30	34	38	110	29	34	37	42	46	50	138	16
17	20	25	28	32	35	40	115	30	36	39	43	47	52	144	17
18	21	26	29	33	37	42	120	31	37	40	45	49	55	150	18
19	22	27	30	34	38	43	125	32	38	41	46	51	57	156	19
20	22	28	31	35	40	45	130	33	39	43	48	53	59	162	20
21	23	29	32	37	41	47	135	33	40	44	50	55	61	168	21
22	23	29	33	38	43	48	140	34	42	45	51	57	63	174	22
23	24	30	34	39	44	50	145	35	43	47	53	58	65	180	23
24	25	31	35	40	45	51	150	36	44	48	54	60	67	186	24
25	25	32	36	42	47	53	155	37	45	50	56	62	69	192	25

T a b u l k a   2 . – pokračování

m	n = 7							n = 8							m
	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	
7	29	32	34	36	39	41	105								
8	30	34	35	38	41	44	112	40	43	45	49	51	55	136	8
9	31	35	37	40	43	46	119	41	45	47	51	54	58	144	9
10	33	37	39	42	45	49	126	42	47	49	53	56	60	152	10
11	34	38	40	44	47	51	133	44	49	51	55	59	63	160	11
12	35	40	42	46	49	54	140	45	51	53	58	62	66	168	12
13	36	41	44	48	52	56	147	47	53	56	60	64	69	176	13
14	37	43	45	50	54	59	154	48	54	58	62	67	72	184	14
15	38	44	47	52	56	61	161	50	56	60	65	69	75	192	15
16	39	46	49	54	58	64	168	51	58	62	67	72	78	200	16
17	41	47	51	56	61	66	175	53	60	64	70	75	81	208	17
18	42	49	52	58	63	69	182	54	62	66	72	77	84	216	18
19	43	50	54	60	63	71	189	56	64	68	74	80	87	224	19
20	44	52	56	62	67	74	196	57	66	70	77	83	90	232	20
21	46	53	58	64	69	76	203	59	68	72	79	85	92	240	21
22	47	55	59	66	72	79	210	60	70	74	81	88	95	248	22
23	48	57	61	68	74	81	217	62	71	76	84	90	98	256	23
24	49	58	63	70	76	84	224	64	73	78	86	93	101	264	24
25	50	60	64	72	78	86	231	65	75	81	89	96	104	272	25

T a b u l k a 2 - pokračování

m	n = 9 0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	n = 10 0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	m
9	52	56	59	62	66	70	171								
10	53	58	61	65	69	73	180	65	71	74	78	82	87	210	10
11	55	61	63	68	72	76	189	67	73	77	81	86	91	220	11
12	57	63	66	71	75	80	198	69	76	79	84	89	94	230	12
13	59	65	68	73	78	83	207	72	79	82	88	92	98	240	13
14	60	67	71	76	81	86	216	74	81	85	91	96	102	250	14
15	62	69	73	79	84	90	225	76	84	88	94	99	106	260	15
16	64	72	76	82	87	93	234	78	86	91	97	103	109	270	16
17	66	74	78	84	90	97	243	80	89	93	100	106	113	280	17
18	68	76	81	87	93	100	252	82	92	96	103	110	117	290	18
19	70	78	83	90	96	103	261	84	94	99	107	113	121	300	19
20	71	81	85	93	99	107	270	87	97	102	110	117	125	310	20
21	73	83	88	95	102	110	279	89	99	105	113	120	128	320	21
22	75	85	90	98	105	113	288	91	102	108	116	123	132	330	22
23	77	88	93	101	108	117	297	93	105	110	119	127	136	340	23
24	79	90	95	104	111	120	306	95	107	113	122	130	140	350	24
25	81	92	98	107	114	123	315	98	110	116	126	134	144	360	25

T a b u l k a   2 - pokračování

m	n = 11 0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	n = 12 0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	m
11	81	87	91	96	100	106	253								
12	83	90	94	99	104	110	264	98	105	109	115	120	127	300	12
13	86	93	97	103	108	114	275	101	109	113	119	125	131	312	13
14	88	96	100	106	112	118	286	103	112	116	123	129	136	324	14
15	90	99	103	110	116	123	297	106	115	120	127	133	141	336	15
16	93	102	107	113	120	127	308	109	119	124	131	138	145	348	16
17	95	105	110	117	123	131	319	112	122	127	135	142	150	360	17
18	98	108	113	121	127	135	330	115	125	131	139	146	155	372	18
19	100	111	116	124	131	139	341	118	129	134	143	150	159	384	19
20	103	114	119	128	135	144	352	120	132	138	147	155	164	396	20
21	106	117	123	131	139	148	363	123	136	142	151	159	169	408	21
22	108	120	126	135	143	152	374	126	139	145	155	163	173	420	22
23	111	123	129	139	147	156	385	129	142	149	159	168	178	432	23
24	113	126	132	142	151	161	396	132	146	153	163	172	183	444	24
25	116	129	136	146	155	165	407	135	149	156	167	176	187	456	25

T a b u l k a 2 – pokračování

m	n = 13							n = 14							m
	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	
13	117	125	130	136	142	149	351								
14	120	129	134	141	147	154	364	137	147	152	160	166	174	406	14
15	123	133	138	145	152	159	377	141	151	156	164	171	179	420	15
16	126	136	142	150	156	165	390	144	155	161	169	176	185	434	16
17	129	140	146	154	161	170	403	148	159	165	174	182	190	448	17
18	133	144	150	158	166	175	416	151	163	170	179	187	196	462	18
19	136	148	154	163	171	180	429	155	168	174	183	192	202	476	19
20	139	151	158	167	175	185	442	159	172	178	188	197	207	490	20
21	142	155	162	171	180	190	455	162	176	183	193	202	213	504	21
22	145	159	166	176	185	195	468	166	180	187	198	207	218	518	22
23	149	163	170	180	189	200	481	169	184	192	203	212	224	532	23
24	152	166	174	185	194	205	494	173	188	196	207	218	229	546	24
25	155	170	178	189	199	211	507	177	192	200	212	223	235	560	25
	n = 15							n = 16							
15	160	171	176	184	192	200	465								
16	163	175	181	190	197	206	480	184	196	202	211	219	229	528	16
17	167	180	186	195	203	212	495	188	201	207	217	225	235	544	17
18	171	184	190	200	208	218	510	192	206	212	222	231	242	560	18
19	175	189	195	205	214	224	525	196	210	218	228	237	248	576	19
20	179	193	200	210	220	230	540	201	215	223	234	243	255	592	20
21	183	198	205	216	225	236	555	205	220	228	239	249	261	608	21
22	187	202	210	221	231	242	570	209	225	233	245	255	267	624	22
23	191	207	214	226	236	248	585	214	230	238	251	261	274	640	23
24	195	211	219	231	242	254	600	218	235	244	256	267	280	656	24
25	199	216	224	237	248	260	615	222	240	249	262	273	287	672	25

T a b u l k a   2 - pokračování

	n = 17							n = 18							
m	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	m
17	210	223	230	240	249	259	595								
18	214	228	235	246	255	266	612	237	252	259	270	280	291	666	18
19	219	234	241	252	262	273	629	242	258	265	277	287	299	684	19
20	223	239	246	258	268	280	646	247	263	271	283	294	306	702	20
21	228	244	252	264	274	287	663	252	269	277	290	301	313	720	21
22	233	249	258	270	281	294	680	257	275	283	296	307	321	738	22
23	238	255	263	276	287	300	697	262	280	289	303	314	328	756	23
24	242	260	269	282	294	307	714	267	286	295	309	321	335	774	24
25	247	265	275	288	300	314	731	273	292	301	316	328	343	792	25
	n = 19							n = 20							
19	267	283	291	303	313	325	741								
20	272	289	297	309	320	333	760	298	315	324	337	348	361	820	20
21	277	295	303	316	328	341	779	304	322	331	344	356	370	840	21
22	283	301	310	323	335	349	798	309	328	337	351	364	378	860	22
23	288	307	316	330	342	357	817	315	335	344	359	371	386	880	23
24	294	313	323	337	350	364	836	321	341	351	366	379	394	900	24
25	299	319	329	344	357	372	855	327	348	358	373	387	403	920	25

T a b u l k a 2 - pokračování

	n = 21							n = 22							
m	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	2μ	m
21	331	349	359	373	385	399	903								
22	337	356	366	381	393	408	924	365	386	396	411	424	439	990	22
23	343	363	373	388	401	417	945	372	393	403	419	432	448	1012	23
24	349	370	381	396	410	425	966	379	400	411	427	441	457	1034	24
25	356	377	388	404	418	434	987	385	408	419	435	450	467	1056	25

	n = 23							n = 24							
23	402	424	434	451	465	481	1081								
24	409	431	443	459	474	491	1104	440	464	475	492	507	525	1176	24
25	416	439	451	468	483	500	1127	448	472	484	501	517	535	1200	25

	n = 25						
25	480	505	517	536	552	570	1275

T a b u l k a 3 . Van der Waerdenův test

Kvantily $x_{1-\alpha}$ pro statistiku $\sum_{i=m+1}^{N} \Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)$

$6 \le n+m \le 50$, $0 \le n-m \le 5$.

α	0,025			0,010			0,005		
m+n	n-m 0;1	n-m 2;3	n-m 4;5	n-m 0;1	n-m 2;3	n-m 4;5	n-m 0;1	n-m 2;3	n-m 4;5
8	2,40	2,30	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
9	2,38	2,20	∞	2,80	∞	∞	∞	∞	∞
10	2,60	2,49	2,30	3,00	2,90	2,80	3,20	3,10	∞
11	2,72	2,58	2,40	3,20	3,00	2,90	3,40	3,40	∞
12	2,86	2,79	2,68	3,29	3,30	3,20	3,60	3,58	3,40
13	2,96	2,91	2,78	3,50	3,36	3,18	3,71	3,68	3,50
14	3,11	3,06	3,00	3,62	3,55	3,46	3,94	3,88	3,76
15	3,24	3,19	3,06	3,74	3,68	3,57	4,07	4,05	3,88
16	3,39	3,36	3,32	3,92	3,90	3,80	4,26	4,25	4,12
17	3,49	3,44	3,36	4,06	4,01	3,90	4,44	4,37	4,23
18	3,63	3,60	3,53	4,23	4,21	4,14	4,60	4,58	4,50
19	3,73	3,69	3,61	4,37	4,32	4,23	4,77	4,71	4,62
20	3,86	3,84	3,78	4,52	4,50	4,44	4,94	4,92	4,85
21	3,96	3,92	3,85	4,66	4,62	4,53	5,10	5,05	4,96
22	4,08	4,06	4,01	4,80	4,78	4,72	5,26	5,24	5,17
23	4,18	4,15	4,08	4,92	4,89	4,81	5,40	5,36	5,27
24	4,29	4,27	4,23	5,06	5,04	4,99	5,55	5,53	5,48
25	4,39	4,36	4,30	5,18	5,14	5,08	5,68	5,65	5,58
26	4,50	4,48	4,44	5,30	5,29	5,24	5,83	5,81	5,76
27	4,59	4,56	4,51	5,42	5,39	5,33	5,95	5,92	5,85
28	4,69	4,68	4,64	5,54	5,52	5,48	6,09	6,07	6,03
29	4,78	4,76	4,72	5,65	5,62	5,57	6,22	6,19	6,13
30	4,88	4,87	4,84	5,77	5,75	5,72	6,35	6,34	6,30
31	4,97	4,95	4,91	5,87	5,85	5,80	6,47	6,44	6,39
32	5,07	5,06	5,03	5,99	5,97	5,94	6,60	6,58	6,55
33	5,15	5,13	5,10	6,09	6,07	6,02	6,71	6,69	6,64
34	5,25	5,24	5,21	6,20	6,19	6,16	6,84	6,82	6,79
35	5,33	5,31	5,28	6,30	6,28	6,24	6,95	6,92	6,88
36	5,42	5,41	5,38	6,40	6,39	6,37	7,06	7,05	7,02
37	5,50	5,48	5,45	6,50	6,48	6,45	7,17	7,15	7,11
38	5,59	5,58	5,55	6,60	6,59	6,57	7,28	7,27	7,25
39	5,67	5,65	5,62	6,70	6,68	6,65	7,39	7,37	7,33
40	5,75	5,74	5,72	6,80	6,79	6,77	7,50	7,49	7,47
41	5,83	5,81	5,79	6,89	6,88	6,85	7,62	7,60	7,56
42	5,91	5,90	5,88	6,99	6,98	6,96	7,72	7,71	7,69
43	5,99	5,97	5,95	7,08	7,07	7,04	7,82	7,81	7,77
44	6,06	6,06	6,04	7,17	7,17	7,14	7,93	7,92	7,90
45	6,14	6,12	6,10	7,26	7,25	7,28	8,02	8,01	7,98
46	6,21	6,21	6,19	7,35	7,35	7,32	8,13	8,12	8,10
47	6,29	6,27	6,25	7,44	7,43	7,40	8,22	8,21	8,18
48	6,36	6,35	6,34	7,53	7,52	7,50	8,32	8,31	8,29
49	6,43	6,42	6,39	7,61	7,60	7,57	8,41	8,40	8,37
50	6,50	6,50	6,48	7,70	7,69	7,68	8,51	8,50	8,48

T a b u l k a 4. Kolmogorov-Smirnovův test

Distribuční funkce Kolmogorov-Smirnovovy statistiky
$D_c^- = \max_x n \left[F_m(x) - G_n(x)\right]$, tj. $P(D_c \leq r)$ pro $8 \leq m = n \leq 16$.

n

r	8	9	10	11	12
0	0,111111	0,100000	0,090909	0,083333	0,076923
1	0,377777	0,345454	0,318181	0,294871	0,274725
2	0,660606	0,618181	0,580419	0,546703	0,516483
3	0,858585	0,823776	0,790209	0,758241	0,728021
4	0,956487	0,937062	0,916083	0,894230	0,872010
5	0.990675	0,983216	0,973776	0,962669	0,950226
6	0,998756	0,996853	0,993829	0,989630	0,984281
7	0,999922	0,999629	0,998971	0,997816	0,996070
8	1,000000	0,999979	0,999891	0,999672	0,999251
9		1,000000	0,999994	0,999968	0,999897
10			1,000000	0,999998	0,999991
11				1,000000	0,999999
12					1,000000

T a b u l k a 4 . - pokračování

r	n = 13	14	15	16
0	0,071428	0,066666	0,062500	0,058823
1	0,257142	0,241666	0,227941	0,215686
2	0,489285	0,464705	0,442401	0,422084
3	0,699579	0,672875	0,647832	0,624354
4	0,849789	0,827829	0,806308	0,785345
5	0,936753	0,922523	0,907765	0,892672
6	0,977863	0,970485	0,962267	0,953336
7	0,993675	0,990608	0,986875	0,982500
8	0,998562	0,997550	0,996172	0,994400
9	0,999750	0,999489	0,999081	0,998492
10	0,999968	0,999918	0,999823	0,999664
11	0,999997	0,999990	0,999973	0,999940
12	0,999999	0,999999	0,999997	0,999991
13	1,000000	1,000000	0,999999	0,999999
14		1,000000	1,000000	1,000000
15			1,000000	1,000000
16				1,000000

T a b u l k a 5 . Spearmanův test

Tabulka udává kvantily d_{α} statistiky $\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{n} (R_i - S_i)^2$ podle následujícího schematu:

d_{α_1}	α_1
d_{α_2}	α_2

kde $\alpha_1 = P(\mathcal{S} \leq d_{\alpha_1}) \leq \alpha$

kde $\alpha_2 = P(\mathcal{S} \leq d_{\alpha_2}) \geq \alpha$

α \ n	Počet dvojic 3	4	5	6	7	8	9	10
0,005				0 0;001 2 0,008	4 0,003 6 0,006	10 0,004 12 0,005	20 0,004 22 0,005	34 0,004 36 0,005
0,01			0 0,008 2 0,042	2 0,008 4 0,017	6 0,006 8 0,012	14 0,008 16 0,011	26 0,009 28 0,011	42 0,009 44 0,010
0,05		0 0,042 2 0,167	2 0,042 4 0,067	6 0,029 8 0,051	16 0,044 18 0,055	30 0,048 32 0,057	48 0,048 50 0,054	72 0,048 74 0,052
0,95	6 0,833 8 1,000	16 0,833 18 0,958	34 0,933 36 0,958	60 0,949 62 0,971	92 0,945 94 0,956	134 0,943 136 0,952	188 0,946 190 0,952	254 0,948 256 0,952
0,99	6 0,833 8 1,000	18 0,958 20 1,000	36 0,958 38 0,992	64 0,983 66 0,992	102 0,988 104 0,994	150 0,989 152 0,992	210 0,989 212 0,991	284 0,990 286 0,991
0,995	6 0,833 8 1,000	18 0,958 20 1,000	38 0,992 40 1,000	66 0,992 68 0,999	104 0,994 106 0,997	154 0,995 156 0,996	216 0,995 218 0,996	292 0,995 294 0,996

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

FAKULTA MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

POŘADOVÉ TESTY

RNDr. Jana Jurečková, CSc.

Státní pedagogické nakladatelství
Praha