O b s a h

Úvod	Parametrické a neparametrické modely ...	7
Kapitola 1.	Opakování základů teorie testování hypotéz	13
1.1.	Formulace problému	13
1.2.	Princip invariance v testování hypotéz	19
Kapitola 2.	Základní výběrové statistiky: pořadí a pořádkové statistiky	25
	Problémy a cvičení	33
Kapitola 3.	Testy hypotézy o shodnosti dvou populací	35
3.1.	Dvouvýběrový t-test	35
3.2.	F-test	37
3.3.	Permutační t-test	38
3.4.	Pořadové testy rozdílu v poloze dvou populací	43
3.4.1.	Klotzův test	56
3.5.2.	Kvartilový test	57
3.6.	Testy založené na empirických distribučních funkcích	58
3.6.1.	Kolmogorov-Smirnovův test	60
3.6.2.	Cramér-von Misesův test	63
3.7.	Pořadové testy při výskytu shodných pozorování	64
3.7.1.	Metoda znáhodnění	66
3.7.2.	Metoda průměrných pořadí	67

Kapitola 4. Testy hypotézy o symetrii jednorozměrného a dvourozměrného rozdělení ... 71
4.1. Párový t-test 72
4.2. Testy H_1 založené na pořadích 72
4.2.1. Wilcoxonův test symetrie 75
4.2.2. Znaménkový test 76
4.3. Problémy a cvičení 80

Kapitola 5. Testy hypotézy o shodnosti několika populací (ošetření) 83
5.1. Model jednoduchého třídění 83
5.1.1. F-test 84
5.1.2. Kruskal-Wallisův pořadový test 84
5.1.3. Mediánový test 87
5.2. Model dvojného třídění (náhodné bloky) 87
5.2.1. F-test 89
5.2.2. Friedmanův pořadový test 89
5.3. Problémy a cvičení 91

Kapitola 6. Testy hypotézy nazávislosti ve dvourozměrné populaci 93
6.1. t-test 94
6.2. Permutační t-test 95
6.3. Pořadové testy nezávislosti 97
6.3.1. Spearmanův korelační koeficient 98
6.3.2. Kvadrantový test 100
6.3.3. Kendallův pořadový korelační koeficient 100
6.4. Problémy a cvičení 101

Kapitola 7. Některé úvahy o vydatnosti a optimalitě testů 103
7.1. Lokálně nejsilnější pořadové testy .. 104
7.1.1. Lokálně nejsilnější pořadové testy hypotézy náhodnosti 105
7.1.2. Lokálně nejsilnější pořadové testy hypotézy symetrie 114
7.1.3. Lokálně nejsilnější pořadové testy pro hypotézu nezávislosti 116
7.2. Asymptotická relativní vydatnost testů 117
7.2.1. Pitmanova vydatnost 118

Tabulka 1. Jednovýběrový Wilcoxonův test .. 128
Tabulka 2. Wilcoxonův test 129
Tabulka 3. Van der Waerdenův test 137
Tabulka 4. Kolmogorov-Smirnovův test 138
Tabulka 5. Spearmanův test 140

Literatura 141

Úvod : Parametrické a neparametrické modely

Matematická statistika zpracovává data, která vznikla při realizaci nějakého náhodného pokusu. Z těchto dat pak odvozuje závěry o celé populaci, a to pokud možno optimálním způsobem.

Dříve, než může statistik odvodit jakékoli závěry o populaci, musí uvážit, co lze předpokládat o rozdělení pravděpodobnosti pozorovaných dat; závěry pak odvozuje v rámci těchto předpokladů. Silnější předpoklady umožňují použít objektivnější metody odhadu, testu,apod.; nejsou-li však tyto předpoklady splněny, je nebezpečí, že závěry, jakkoli za daných předpokladů správné, mohou být naprosto nevhodné pro danou experimentální situaci.

Tento problém nejlépe objasníme na konkrétních příkladech.

Příklad 1. Model měření. Experimentátor provede n nezávislých určení (měření) $X_1,\ldots,X_n$ hodnoty určité fyzikální konstanty μ . Jeho měření podléhají náhodným fluktuacím (chybám), proto můžeme psát

$$X_i = \mu + \varepsilon_i, \qquad i=1,\ldots,n \tag{1}$$

kde $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ je vektor chyb. Co lze předpokládat o rozdělení pravděpodobností vektoru ε , které spolu s hodnotou μ určuje sdružené rozdělení $X_1,\ldots,X_n$? Obvykle přijímáme tyto minimální předpoklady :

(1) Rozdělení ε nezávisí na μ .

(2) $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ jsou nezávislé.

(3) $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ mají stejné rozdělení.

(4) Společné rozdělení $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ je absolutně spojité s hustotou symetrickou kolem 0.

Těmito předpoklady jsme již vymezili model, který se ve statistické praxi velmi často vyskytuje, a to nejen u měření, ale i v párových pokusech apod. Nazýváme ho <u>jednovýběrový model polohy</u>.

Jakkoli se předpoklady (1),(2),(3),(4) zdají slabé, je třeba si uvědomit, že jsou to jen předpoklady a i ty mohou být splněny pouze přibližně. Např. je-li μ délka nějakého předmětu, jsou měření $X_1,\ldots,X_n$ nezáporná, což je v rozporu s předpokladem (1) a (4).

Ovšem bez předpokladů bychom nemohli odvodit žádný závěr o skutečné hodnotě μ. Praxe je naopak taková, že předpokládáme dokonce mnohem více.

(5) Společné rozdělení chyb je $N(0,\sigma^2)$, kde σ^2 je neznámé; to znamená, že $X_1,\ldots,X_n$ je náhodný výběr z populace $N(\mu,\sigma^2)$.

A občas se předpokládá:

(6) Rozptyl σ^2 rozdělení v předpokladu (5) je známý.

Co nás vede k právě takovým předpokladům? V tomto případě zřejmě zkušenost, fyzikální úvahy a přání. Výhodou předpokladů typu (1)-(6) je, že jsou-li správné, dovedeme odhadnout μ na základě $X_1,\ldots,X_n$ velmi vydatným způsobem.

V některých aplikacích nemáme pochybnosti o teoretickém modelu, zvláště jsou-li pozorované náhodné veličiny diskrétního typu. Nepochybujeme o tom, že počet zmetků v náhodném výběru z konečné populace výrobků se řídí hypergeometrickým rozdělením; víme, kdy vzniká binomické rozdělení a že počet α-částic emitovaných radioaktivní látkou za krátký časový interval se řídí Poissonovým rozdělením.

Další příklad bude důležitý pro naše další úvahy.

Příklad 2. Srovnání účinnosti dvou různých typů ošetření

Chceme porovnat účinnost 2 různých postupů, např.: redukce úniku škodlivých látek do ovzduší, léčení choroby, výroby energie apod. Tyto postupy obvykle nazýváme ošetření a úlohu lze chápat jako srovnání účinnosti 2 typů ošetření aplikovaných na členy nějaké populace. K tomu účelu provedeme $m+n$ nezávislých pokusů takto: náhodně zvolíme $m+n$ členů populace, prvních m členů podrobíme prvnímu typu ošetření a zbývajících n členů druhému typu ošetření. Každý jednotlivý pokus dává určitou míru, kvantitativní nebo kvalitativní, účinnosti příslušného ošetření.

Představme si např., že chceme testovat vliv určité drogy na krevní tlak; je známo, že droga buď tlak nemění nebo snižuje. Označme $X_1,\dots,X_m$ krevní tlak m pacientů, kterým byla podána droga, a $Y_1,\dots,Y_n$ krevní tlak pacientů, kterým byla podána neutrální látka.

Označíme-li F společnou distribuční funkci $X_1,\dots,X_m$ a G společnou distribuční funkci $Y_1,\dots,Y_n$, pak hypotéza

$$H : F = G$$

znamená, že droga nepůsobí na krevní tlak.

Podle toho, jaké předpoklady přijmeme o rozděleních F a G, dostaneme různé alternativy hypotézy H :

i zde. Naším úkolem v dalších kapitolách bude mj. nalézt testy hypotézy H , vhodné za předpokladů (1) příp. (2).

Nyní definujeme prvky <u>statistického modelu</u> :

Uvažujme náhodný pokus se základním prostorem výsledků Ω. Na Ω nechť je definován náhodný vektor $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ Vede-li pokus k výsledku ω , registrujeme hodnotu $\underset{\sim}{X}(\omega)$ (samotné ω obvykle nepozorujeme). $\underset{\sim}{X}(\omega) = (X_1,\ldots,X_n)$ pak nazýváme <u>pozorování</u> nebo <u>data.</u> Protože pozorujeme pouze $\underset{\sim}{X}$, stačí uvažovat rozdělení pravděpodobností $\underset{\sim}{X}$. O tomto rozdělení předpokládáme, že je prvkem určitého systému $\mathcal{P}$ rozdělení na $(R^n,\mathcal{B}^n)$. Systém rozdělení $\mathcal{P}$ nazveme <u>model</u>. Např. jsou-li v příkladě 1 splněny předpoklady (1)-(4), je $\mathcal{P}$ systémem všech rozdělení náhodných vektorů $(X_1,\ldots,X_n)$, jejichž složky jsou nezávislé a mají stejné rozdělení s hustotou symetrickou kolem nějakého bodu μ .

Obvykle nás zajímají <u>parametry</u> systému $\mathcal{P}$; např. střed symetrie μ v příkladě 1. V systému se mohou vyskytnou i další, <u>rušivé parametry</u>, které odpovídají dalším neznámým vlastnostem rozdělení $\underset{\sim}{X}$ (např. neznámý rozptyl σ^2 za předpokladu (5)). Obvykle zahrnujeme všecky parametry systému pod jediný společný parametr θ ; je-li každý prvek systému $\mathcal{P}$ jednoznačně určen hodnotou θ a θ probíhá danou množinu Θ , píšeme model ve tvaru $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Model lze parametrizovat mnoha způsoby; je však třeba vždy dbát na to, aby parametr byl <u>identifikovatelný</u>, tj. aby $\theta_1 \neq \theta_2$ implikovalo $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ pro vš. $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

Modely, u kterých je Θ vhodná, např. konvexní podmnožina R^k, označujeme jako <u>parametrické.</u>

i zde. Naším úkolem v dalších kapitolách bude mj. nalézt testy hypotézy H, vhodné za předpokladů (1) příp. (2).

Nyní definujeme prvky <u>statistického modelu</u> :

Uvažujme náhodný pokus se základním prostorem výsledků Ω. Na Ω nechť je definován náhodný vektor $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$. Vede-li pokus k výsledku ω, registrujeme hodnotu $\underset{\sim}{X}(\omega)$ (samotné ω obvykle nepozorujeme). $\underset{\sim}{X}(\omega) = (X_1,\ldots,X_n)$ pak nazýváme <u>pozorování</u> nebo <u>data.</u> Protože pozurujeme pouze $\underset{\sim}{X}$, stačí uvažovat rozdělení pravděpodobností $\underset{\sim}{X}$. O tomto rozdělení předpokládáme, že je prvkem určitého systému $\mathcal{P}$ rozdělení na $(R^n,\mathcal{B}^n)$. Systém rozdělení $\mathcal{P}$ nazveme <u>model</u>. Např. jsou-li v příkladě 1 splněny předpoklady (1)-(4), je $\mathcal{P}$ systémem všech rozdělení náhodných vektorů $(X_1,\ldots,X_n)$, jejichž složky jsou nezávislé a mají stejné rozdělení s hustotou symetrickou kolem nějakého bodu μ.

Obvykle nás zajímají <u>parametry</u> systému $\mathcal{P}$; např.střed symetrie μ v příkladě 1. V systému se mohou vyskytnou i další, <u>rušivé parametry</u>, které odpovídají dalším neznámým vlastnostem rozdělení $\underset{\sim}{X}$ (např. neznámý rozptyl σ^2 za předpokladu (5)). Obvykle zahrnujeme všecky parametry systému pod jediný společný parametr θ; je-li každý prvek systému $\mathcal{P}$ jednoznačně určen hodnotou θ a θ probíhá danou množinu Θ, píšeme model ve tvaru $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Model lze parametrizovat mnoha způsoby; je však třeba vždy dbát na to, aby parametr byl <u>identifikovatelný</u>, tj. aby $\theta_1 \neq \theta_2$ implikovalo $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ pro vš. $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

Modely, u kterých je Θ vhodná, např. konvexní podmnožina R^k, označujeme jako <u>parametrické.</u>

Parametr však nemusí být vždy reálné číslo nebo vektor : za předpokladů (1)-(4) v příkladě 1 je nejvhodnější charakterizace rozdělení chyb pomocí dvojice $\theta = (\mu, f)$, kde μ probíhá R^1 a f probíhá množinu všech hustot symetrických kolem 0. Takové modely nazýváme neparametrické.

V parametrických modelech obvykle máme silně omezující předpoklady a rozdělení dat je plně určeno několika momenty nejnižších řádů. Naopak v neparametrických modelech připouštíme, že se mohou měnit i tvary rozdělení.