

# Příklady z Fyziky plazmatu

## 1 Úvod

### 1.1 Příklad (2b.)

Uvažujme, že na počátku máme rovnoměrné plazma, ve kterém je hustota elektronů i iontů stejná a rovna  $n_0$  (plazma je elektricky neutrální). Nyní předpokládejme, že se elektrony na ploše  $y, z$  nějakým vnějším vlivem ze svých rovnovážných poloh posunuly o malou hodnotu  $s$  ve směru osy  $x$ .

(a) Použitím Gaussova zákona ukažte, že elektrické pole, které vznikne mezi náboji je dáno vztahem

$$E_x = \left( \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \right) s .$$

(b) Ukažte, že pohybová rovnice pro každý elektron pod vlivem tohoto elektrického pole je

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \left( \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right) s = 0 .$$

Dokažte, že toto je rovnice harmonického oscilátoru s frekvencí

$$\omega_{pe} = \left( \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} .$$

### 1.2 Příklad (2b.)

(a) Odhadněte teplotu plazmatu, v němž se v kouli o poloměru 1 mm liší hustota elektronů od hustoty iontů o 1%. Hustota nabitých částic je  $10^{20} \text{ m}^{-3}$ . (Vyjděte z předpokladu rovnosti kinetické (tepelné) a potenciální energie, vyplývající z Coulombovských sil.)

(b) Dosad'te zadané hodnoty a vypočtenou teplotu do vzorce pro výpočet Debyeovy délky  $\lambda_D$  a ukažte, že jaké musí být fyzikální rozměry plazmatu  $L$ .

### 1.3 Příklad (2b.)

Mějme raketu, která je mimo působení gravitačního pole Země.

Označme:

$v$ ... konstantní rychlost plynů vyfukovaných z rakety vzhledem k raketě

$u(t)$ ... okamžitá rychlost rakety

$M(t)$ ... okamžitá hmotnost celé rakety

$-dM(t)/dt$ ... konstantní časová změna hmotnosti rakety, daná hmotou plynů vyvržených z rakety

(a) Dokažte, že pohybová rovnice rakety je

$$\frac{d}{dt} [M(t)u(t)] = \frac{dM}{dt} [u(t) - v] .$$

a ukažte, že okamžité zrychlení rakety je

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{M(t)} \frac{dM}{dt} .$$

(b) Zintegrujte pohybovou rovnici a ukaŕte, ŕe

$$u(t) = u(t_0) + v \ln[M(t_0)/M(t)] .$$

(c) Pokud raketa hoří po časový interval  $\delta t = t - t_0$  a pokud  $M(t) \ll M(t_0)$ , ukaŕte, ŕe počáteční zrychlení rakety je

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0} = \frac{v}{M(t_0)} \frac{M(t_0) - M(t)}{\delta t} \simeq \frac{v}{\delta t} .$$

(d) Dosadřte do vztahů pro  $(du/dt)_{t_0}$  a  $u(t)$  pro chemickou raketu  $v = 10^3$  m/s a  $\delta t = 10$  s; a také pro plazmový pohon s  $v = 10^4$  m/s a  $\delta t = 100$  dní. Pro spočítání  $u(t)$  uvažujte  $u_{t_0} = 0$  a  $M(t_0) = 10M(t)$ .

## 1.4 Příklad (1b.)

Z Maxwellových rovnic odvoďte rovnici pro zachování náboje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 .$$

Tento výsledek ukazuje to, ŕe zachování elektrického náboje přímo vyplývá z Maxwellových rovnic.

## 1.5 Příklad (2b.)

Z Maxwellových rovnic odvoďte následující zákon zachování energie v elektromagnetických polích, který je známý jako *Poyntingův teorém*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) d^3r + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d^3r ,$$

pro lineární izotropické médium, pro které platí  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  a  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Fyzikálně interpretujte každý člen této rovnice. Jaký je fyzikální rozměr těchto členů?

# 2 Základy kinetické teorie plazmatu

## 2.1 Příklad (1b.)

Uvažujme systém částic rovnoměrně rozdělený v prostoru s konstantní hustotou částic  $n_0$  a charakterizován rozdělovací funkcí rychlostí  $f(v)$  definovanou takto:

$$\begin{aligned} f(v) &= K_0 \quad \text{pro } |v_i| \leq v_0 \quad (i = x, y, z) , \\ f(v) &= 0 \quad \text{jinak} , \end{aligned}$$

kde  $K_0$  je nenulová kladná konstanta. Určete hodnotu  $K_0$  pomocí  $n_0$  a  $v_0$ .

## 2.2 Příklad (1b.)

Uvažujme pohyb nabitých částic v jednom rozměru za přítomnosti elektrického potenciálu  $V(x)$ . Ukaŕte přímým dosazením, ŕe rozdělovací funkce

$$f = f_0 \exp\left(-\frac{1}{2}mv^2 + qV\right) ,$$

je řešením Boltzmannovy rovnice pro stacionární stav.

### 2.3 Příklad (2b.)

Předpokládejme, že na každou částici ve fázovém prostoru působí vnější síla  $\mathbf{F}$ . Bez interakcí bude částice typu  $\alpha$  se souřadnicemi  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  v čase  $t$  za časový interval  $dt$  nalezena v souřadnicích  $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$  podle

$$\mathbf{r}'(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v} dt ,$$

$$\mathbf{v}'(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a} dt ,$$

kde  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m_\alpha$  je zrychlení částice a  $m_\alpha$  je její hmotnost.

Mezi novým elementem fázového prostoru a tím původním je tento vztah

$$d^3r' d^3v' = |J| d^3r d^3v ,$$

kde  $J$  je Jakobiánem této transformace. Dokažte, že pro Jakobián této transformace platí  $|J| = 1$ .

## 3 Střední hodnoty a makroskopické veličiny

### 3.1 Příklad (2b.)

Ukažte, že počet částic, které dopadají z plazmatu na jednotku povrchu tělesa vnořeného do plazmatu za jednotku času (tok částic), je pro kulově symetrické rozdělení rychlosti  $f$  roven

$$\Gamma = \frac{1}{4} n \langle v \rangle ,$$

kde  $\langle v \rangle$  je střední rychlost částic.

### 3.2 Příklad (3b.)

Uvažujme systém částic charakterizován stejnou rozdělovací funkcí jako v příkladu 2.1.

(a) Ukažte, že absolutní teplota systému je dána vztahem

$$T = \frac{mv_0^2}{3k} ,$$

kde  $m$  je hmotnost každé částice a  $k$  je Boltzmannova konstanta.

(b) Spočtete následující výraz pro tenzor tlaku

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} \rho_m v_0^2 \mathbf{1} ,$$

kde  $\rho_m = nm$  a  $\mathbf{1}$  je jednotkový tenzor.

(c) Dokažte, že pro vektor toku tepla platí  $\mathbf{q} = 0$ .