Příklady z Fyziky plazmatu

1 Úvod

1.1 Příklad (2b.)

Uvažujme, že na počátku máme rovnoměrné plazma, ve kterém je hustota elektronů i iontů stejná a rovna n_0 (plasma je elektricky neutrální). Nyní předpokládejme, že se elektrony na ploše y, z nějakým vnějším vlivem ze svých rovnovovážných poloh posunuly o malou hodnotu s ve směru osy x.
(a) Použitím Gaussova zákona ukažte, že elektrické pole, které vznikne mezi náboji je dáno vztahem

$$E_x = \left(\frac{n_0 e}{\epsilon_0}\right) s \ .$$

(b) Ukažte, že pohybová rovnice pro každý elektron pod vlivem tohoto elektrického pole je

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\epsilon_0}\right) s = 0 \ .$$

Dokažte, že toto je rovnice harmonického oscilátoru s frekvencí

$$\omega_\mathrm{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\epsilon_0}\right)^{1/2} \ .$$

1.2 Příklad (2b.)

(a) Odhadněte teplotu plazmatu, v němž se v kouli o poloměru 1 mm liší hustota elektronů od hustoty iontů o 1 %. Hustota nabitých částic je 10^{20} m^{-3}. (Vyjděte z předpokladu rovnosti kinetické (tepelné) a potenciální energie, vyplívající z Coulombovských sil.)
(b) Dosaďte zadané hodnoty a vypočtenou teplotu do vzorce pro výpočet Debyeovy délky λ_D a ukažte, jaké musí být fyzikální rozměry plazmatu L.

1.3 Příklad (2b.)

Mějme raketu, která je mimo působení gravitačního pole Země.
Označme:

v... konstantní rychlost plynů vyfukovaných z rakety vzhledem k raketě

$u(t)$... okamžitá rychlost rakety

$M(t)$... okamžitá hmotnost celé rakety

$-\mathrm{d}M(t)/\mathrm{d}t$... konstantní časová změna hmotnosti rakety, daná hmotou plynů vyvržených z rakety

(a) Dokažte, že pohybová rovnice rakety je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M(t)u(t)\right] = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\left[u(t) - v\right] \ .$$

a ukažte, že okamžité zrychlení rakety je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{M(t)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \ .$$

(b) Zintegrujte pohybovou rovnici a ukažte, že

$$u(t) = u(t_0) + v \ln[M(t_0)/M(t)] \ .$$

(c) Pokud raketa hoří po časový interval $\delta t = t - t_0$ a pokud $M(t) \ll M(t_0)$, ukažte, že počáteční zrychlení rakety je

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \frac{v}{M(t_0)} \frac{M(t_0) - M(t)}{\delta t} \simeq \frac{v}{\delta t} \ .$$

(d) Dosaďte do vztahů pro $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)_{t_0}$ a $u(t)$ pro chemickou raketu $v = 10^3$ m/s a $\delta t = 10$ s; a také pro plazmový pohon s $v = 10^4$ m/s a $\delta t = 100$ dní. Pro spočítání $u(t)$ uvažujte $u_{t_0} = 0$ a $M(t_0) = 10M(t)$.

1.4 Příklad (1b.)

Z Maxwellových rovnic odvoďte rovnici pro zachování náboje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \ .$$

Tento výsledek ukazuje to, že zachování elektrického náboje přímo vyplývá z Maxwellových rovnic.

1.5 Příklad (2b.)

Z Maxwellových rovnic odvoďte následující zákon zachování energie v elektromagnetických polích, který je známý jako *Poyntingův teorém*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) \mathrm{d}^3 r + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \mathrm{d}^3 r \ ,$$

pro lineární izotropické médium, pro které platí $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ a $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$. Fyzikálně interpretujte každý člen této rovnice. Jaký je fyzikální rozměr těchto členů?

2 Základy kinetické teorie plazmatu

2.1 Příklad (1b.)

Uvažujme systém částic rovnoměrně rozdělený v prostoru s konstantní hustotou částic n_0 a charakterizován rozdělovací funkcí rychlostí $f(v)$ definovanou takto:

$$\begin{aligned} f(v) &= K_0 \quad \text{pro } |v_i| \le v_0 \quad (i = x, y, z) \ , \\ f(v) &= 0 \quad \text{jinak} \ , \end{aligned}$$

kde K_0 je nenulová kladná konstanta. Určete hodnotu K_0 pomocí n_0 a v_0.

2.2 Příklad (1b.)

Uvažujme pohyb nabitých částic v jednom rozměru za přítomnosti elektrického potenciálu $V(x)$. Ukažte přímým dosazením, že rozdělovací funkce

$$f = \mathrm{fce}(\frac{1}{2}mv^2 + qV) \ ,$$

je řešením Boltzmannovy kinetické rovnice pro stacionární stav.

2.3 Příklad (2b.)

Předpokládejme, že na každou částici ve fázovém prostoru působí vnější síla $\mathbf{F}$. Bez interakcí bude částice typu α se souřadnicemi $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ v čase t za časový interval $\mathrm{d}t$ nalezena v souřadnicích $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ podle

$$\mathbf{r}'(t + \mathrm{d}t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t \ ,$$
$$\mathbf{v}'(t + \mathrm{d}t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}\,\mathrm{d}t \ ,$$

kde $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m_\alpha$ je zrychlení částice a m_α je její hmotnost.

Mezi novým elementem fázového prostoru a tím původním je tento vztah

$$\mathrm{d}^3r'\mathrm{d}^3v' = |J|\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3v \ ,$$

kde J je Jakobiánem této transformace. Dokažte, že pro Jakobián této transformace platí $|J| = 1$.

2.4 Příklad (1b.)

Odvoďte tvar časového vývoje rozdělovací funkce f_α pro Krookův srážkový člen

$$\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\mathrm{coll}} = -\frac{(f_\alpha - f_{\alpha 0})}{\tau} \ ,$$

kde $f_{\alpha 0}$ je rozdělovaci funkce lokální rovnováhy, τ je relaxační doba srážek částic. Předpokládejte Boltzmannovu kinetickou rovnici (BKR) bez působení vnějších sil a bez přítomnosti prostorových gradientů, $f_{\alpha 0}$ a τ jsou na čase nezávislé.

3 Střední hodnoty a makroskopické veličiny

3.1 Příklad (2b.)

Ukažte. že počet částic, které dopadají z plazmatu na jednotku povrchu tělesa vnořeného do plazmatu za jednotku času (tok částic), je pro kulově symetrické rozdělení rychlostí f roven

$$\Gamma = \frac{1}{4} n <v> \ ,$$

kde $<v>$ je střední rychlost částic.

3.2 Příklad (3b.)

Uvažujme systém částic charakterizován stejnou rozdělovací funkcí jako v příkladu 2.1.
(a) Ukažte, že absolutní teplota systému je dána vztahem

$$T = \frac{m v_0^2}{3k} \ ,$$

kde m je hmotnost každé částice a k je Boltzmannova konstanta.
(b) Spočtěte následující výraz pro tenzor tlaku

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho_m v_0^2\,\mathbf{1} \ ,$$

kde $\rho_m = nm$ a $\mathbf{1}$ je jednotkový tenzor.
(c) Dokaže, že pro vektor toku tepla platí $\mathbf{q} = 0$.