Homogenní markovské řetězce s oceněním přechodů

Příklad 1.: Řidič taxi dlouhodobým pozorováním zjistil, že když se v daném okamžiku nachází ve městě A, pak s pravděpodobností 0,3 poveze příštího zákazníka do města B a s pravděpodobností 0,7 bude zákazník žádat jízdu uvnitř A. Jestliže se řidič taxi nachází ve městě B, pak se stejnou pravděpodobností buď poveze příštího zákazníka do A nebo bude jezdit uvnitř B. Průměrná tržba za jízdu (v obou směrech) mezi A a B činí 1000 Kč a uvnitř měst A a B 100 Kč. Vypočítejte střední hodnotu tržby za první dvě jízdy, vyjede-li řidič z města A resp. B.

Řešení:
Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. $X_n = 1$), když v okamžiku n je řidič ve městě A (resp. B). Matice přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, matice výnosů $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 100 & 1000 \\ 1000 & 100 \end{pmatrix}$. Počítáme

$q_0 = p_{00}r_{00} + p_{01}r_{01} = 0,7 \cdot 100 + 0,3 \cdot 1000 = 370$

$q_1 = p_{10}r_{10} + p_{11}r_{11} = 0,5 \cdot 100 + 0,5 \cdot 1000 = 550$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

n = 1: $\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$

n = 2: $\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 794 \\ 1010 \end{pmatrix}$

Interpretace: Vyjede-li řidič z města A, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 794 Kč. Vyjede-li z města B, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 1010 Kč.

Návod na řešení v MATLABu:
Zadáme matice P, R a vektor v0: P = [0.7 0.3;0.5 0.5]; R = [100 1000;1000 100];v0=[0 0]';
Vypočteme pomocnou matici Q = P*R';
První sloupec matice Q je vektor q = Q(:,1);
Vypočteme vektor v1=q+Pv0
Vypočteme vektor v2=q+Pv1

Příklad 2.: Předpokládejme, že chovatel má slepici, která buď snáší vejce (stav 0) nebo sedí na vejcích (stav 1). Uvažujeme období o délce 1 měsíc. Matice přechodu a matice výnosů jsou:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

a) Pomocí vytvořujících funkcí najděte vektor středních hodnot celkových výnosů po n měsících.
b) Jaký je vektor středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, 3?

Řešení:

Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. $X_n = 1$), když v měsíci n slepice snáší vejce (resp. sedí na vejcích). Matice přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, matice výnosů $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. Počítáme

$$q_0 = p_{00}r_{00} + p_{01}r_{01} = 0{,}6 \cdot 8 + 0{,}4 \cdot 2 = 5{,}6$$

$$q_1 = p_{10}r_{10} + p_{11}r_{11} = 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}7 \cdot 6 = -3{,}3$$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -3{,}3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} = \ldots = \frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} \frac{36}{70} \\ \frac{36}{70} \end{pmatrix} + \left(\frac{\frac{10}{7}}{1-z} + \frac{-\frac{10}{7}}{1-\frac{3z}{10}}\right)\begin{pmatrix} \frac{356}{70} \\ \frac{-267}{70} \end{pmatrix}$$

$\frac{z}{(1-z)^2}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = n$, n = 0, 1, 2, …

$\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{10}{7}$, n = 0, 1, 2, …

$-\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{1-0{,}3z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{10}{7} \cdot 0{,}3^n$, n = 0, 1, 2, …

Celkem: $\mathbf{v}(n) = n\begin{pmatrix} \frac{36}{70} \\ \frac{36}{70} \end{pmatrix} + \frac{10}{7}\left(1 - 0{,}3^n\right)\begin{pmatrix} \frac{356}{70} \\ -\frac{267}{70} \end{pmatrix}$

$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -3{,}3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7{,}64 \\ -3{,}93 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 8{,}619 \\ -3{,}759 \end{pmatrix}$

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme vektor n=[0:1:24];

Napíšeme vyjádření pro první složku vektoru **v**(n):

```
v0n=n.*(36/70)+(10/7)*(1-0.3.^n)*(356/70)
```

Napíšeme vyjádření pro druhou složku vektoru **v**(n):

```
v1n=n.*(36/70)+(10/7)*(1-0.3.^n)*(-267/70)
```

Graficky znázorníme závislost středních hodnot celkových výnosů na n:

```
plot(n,v0n,’o’, n,v1n,’*’)
```