Text k přednášce Statistika I

1. Základní prostor a jevové pole

Definice (definice pokusu)

Pokusem rozumíme jednorázové uskutečnění konstantně vymezeného souboru definičních podmínek. Předpokládáme, že pokus můžeme mnohonásobně nezávisle opakovat za dodržení definičních podmínek (ostatní podmínky se mohou měnit, proto různá opakování pokusu mohou vést k různým výsledkům). Dále předpokládáme, že opakováním pokusu vzniká opět pokus.

Deterministickým pokusem nazýváme takový pokus, jehož každé opakování vede k jedinému možnému výsledku.

Náhodným pokusem nazýváme takový pokus, jehož každé opakování vede k právě jednomu z více možných výsledků, které jsou vzájemně neslučitelné.

Definice (definice základního prostoru)

Neprázdnou množinu možných výsledků náhodného pokusu značíme Ω a nazýváme ji **základní prostor**. Možné výsledky značíme ω_t, kde T je indexová množina.

Definice (definice jevového pole)

Systém podmnožin $\mathcal{A}$ základního prostoru Ω, který splňuje následující axiómy:

(J5): $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$ (s každými dvěma množinami obsahuje i jejich rozdíl)

(J6): $\Omega \in \mathcal{A}$ (obsahuje celý základní prostor)

(J8): $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (obsahuje-li každou ze spočetné posloupnosti množin, obsahuje i jejich spočetné sjednocení) se nazývá **jevové pole**. Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak řekneme, že A je **jev** (vzhledem k$\mathcal{A}$). Dvojice $(\Omega, \mathcal{A})$ se nazývá **měřitelný prostor**.

Věta (vlastnosti jevového pole)

Jevové pole $\mathcal{A}$ má tyto vlastnosti platné pro libovolné jevy $A, A_1, A_2, \ldots$

(J1): $\mathcal{A} \neq \emptyset$

(J2): $\emptyset \in \mathcal{A}$

(J3): $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

(J4): $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

(J5): $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$

(J6): $\Omega \in \mathcal{A}$

(J7): $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$

(J8): $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

(J9): $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

2. Pravděpodobnostní prostor

Definice (axiomatická definice pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Reálná množinová funkce $P : \mathcal{A} \mapsto R$ se nazývá **pravděpodobnost**, právě když splňuje následující tři axiómy:

(P2): $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A) \geq 0$ (nezápornost)

(P10): $P(\Omega) = 1$ (normovanost)

(P15): $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (spočetná aditivita).

Funkční hodnota $P(A)$ se nazývá **pravděpodobnost jevu** A a trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá **pravděpodobnostní prostor**.

Věta (vlastnosti pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ libovolné jevy. Pak pravděpodobnost P má 17 následujících vlastností:

(P1): $P(\emptyset) = 0$

(P2): $P(A) \geq 0$

(P3): $P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

(P4): $1 + P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2)$

(P5): $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$

(P6): $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

(P7): $P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

(P8): $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1)$

(P9): $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$

(P10): $P(\Omega) = 1$

(P11): $P(A) + P(A') = 1$

(P12): $P(A) \leq 1$

(P13): $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

(P14): $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$

(P15): $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

(P16): $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$

(P17): $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

Věta (další vlastnosti pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ libovolné jevy. Pak platí:

a) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$

b) $\max\limits_{1\le i\le n} P(A_i) \le P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \le \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

c) $1 - n + \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \le P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) \le \min\limits_{1\le i\le n} P(A_i)$

Jsou-li jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ neslučitelné, pak $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

3. Konstrukce diskrétní pravděpodobnosti

Označení

Nechť $M \neq \emptyset, B \subseteq M, g : M \mapsto (-\infty, \infty)$ je všude nulová s výjimkou nejvýše spočetné množiny $G \subseteq M$. Pak symbol $\sum\limits_{x\in B} g(x)$ má následující význam:

a) Je-li $B \cap G = \emptyset$, pak $\sum\limits_{x\in B} g(x) = 0$

b) Je-li $B \cap G$ konečný průnik, jeho prvky uspořádáme do konečné posloupnosti $(x_1, \ldots, x_n)$. Pak $\sum\limits_{x\in B} g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)$ a tento součet na zvoleném uspořádání nezávisí.

c) Je-li $B \cap G$ spočetný průnik, jeho prvky uspořádáme do nekonečné posloupnosti $(x_1, x_2, \ldots)$. Pak $\sum\limits_{x\in B} g(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i)$, pokud tato řada absolutně konverguje (pak totiž tento součet na zvoleném uspořádání nezávisí). Není-li splněna podmínka absolutní konvergence, nemá uvedený symbol smysl.

Je-li $B = (-\infty, \infty)$ resp. $B = (-\infty, x\rangle$, pak píšeme $\sum\limits_{x\in B} g(x) = \sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} g(x)$ resp. $\sum\limits_{x\in B} g(x) = \sum\limits_{t\le x} g(t)$.

Definice (definice diskrétní pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $\Gamma \subseteq \Omega$ nejvýše spočetná podmnožina základního prostoru. Funkce $g : \Omega \mapsto R$, která kladná pouze na Γ a jinak je nulová a vyhovuje podmínce $\sum\limits_{\omega\in\Omega} g(\omega) = 1$, se nazývá **váhová funkce**.

Množinová reálná funkce $P : \mathcal{A} \mapsto R$ daná vzorcem
$\forall A \in \mathcal{A} : P(A) = \sum\limits_{\omega\in A} g(\omega)$ se nazývá **diskrétní pravděpodobnost**.

Věta (vlastnosti diskrétní pravděpodobnosti)

Diskrétní pravděpodobnost je pravděpodobnost ve smyslu axiomatické definice pravděpodobnosti a má tedy vlastnosti P1 až P17.

Definice (definice klasické pravděpodobnosti)

Nechť Ω je konečný základní prostor, $\mathcal{A}$ libovolné jevové pole na Ω. Klasickou pravděpodobností rozumíme funkci $P : \mathcal{A} \mapsto R$ danou vzorcem

$\forall A \in \mathcal{A} : P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, kde $m(A)$ je počet možných výsledků příznivých nastoupení jevu A a $m(\Omega)$ je počet všech možných výsledků.

Věta (vlastnosti klasické pravděpodobnosti)
Klasická pravděpodobnost je pravděpodobnost ve smyslu axiomatické definice pravděpodobnosti a má tedy vlastnosti P1 až P17. Kromě toho pro ni platí: $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset, P(A) = 1 \Leftrightarrow A = \Omega$.

4. Stochastická nezávislost jevů

Definice (definice stochastické nezávislosti dvou jevů)
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A, B \in \mathcal{A}$. Řekneme, že jevy A, B jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k P), právě když $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Věta (vlastnosti dvou stochasticky nezávislých jevů)
Pro libovolné jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí:
a) $\emptyset$ a A jsou stochasticky nezávislé.
b) Ω a A jsou stochasticky nezávislé.
c) Jsou-li A, B stochasticky nezávislé, pak jsou stochasticky nezávislé i jevy A', B; A, B'; A', B'.

Definice (definice stochastické nezávislosti konečně a spočetně mnoha jevů)
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ libovolné jevy, $n \geq 2$ přirozené číslo. Řekneme, že jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k P), právě když platí multiplikativní vztahy:
$\forall 1 \leq i < j \leq n : P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$
$\forall 1 \leq i < j < k \leq n : P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$
...
$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n)$
Řekneme, že jevy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k P), právě když pro všechna přirozená $n \geq 2$ jsou stochasticky nezávislé jevy $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

Věta (vlastnosti stochasticky nezávislých jevů)
a) Jestliže z třídy n stochasticky nezávislých jevů vybereme libovolnou podtřídu r jevů ($2 \leq r \leq n$), pak dostaneme opět třídu stochasticky nezávislých jevů.
b) Jestliže ve třídě n stochasticky nezávislých jevů nahradíme r jevů ($1 \leq r \leq n$) jevy opačnými, pak dostaneme opět třídu stochasticky nezávislých jevů.
c) Jestliže z třídy n stochasticky nezávislých jevů vybereme r disjunktních podtříd jevů ($2 \leq r \leq n$) a členy uvnitř těchto podtříd buď sjednotíme nebo pronikneme, pak vzniklá sjednocení a průniky jsou opět stochasticky nezávislé jevy.
d) Neslučitelné jevy nemohou být stochasticky nezávislé, pokud nemají všechny nulovou pravděpodobnost (s případnou jednou výjimkou).

5. Podmíněná pravděpodobnost

Definice (definice podmíněné pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $H \in \mathcal{A}$ takový jev, že $P(H) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobností** (odvozenou z pravděpodobnosti P) za podmínky H rozumíme funkci $P(./H) : \mathcal{A} \mapsto R$ danou vzorcem:

$\forall A \in \mathcal{A} : P(A) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$.

Věta (vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti)

Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost ve smyslu axiomatické definice pravděpodobnosti a má tedy vlastnosti P1 až P17. Kromě toho pro libovolné jevy $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ platí:

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1)$ pro $P(A_1) > 0$.

b) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)P(A_1/A_2)$ pro $P(A_2) > 0$.

c) Jevy A_1, A_2 jsou stochasticky nezávislé $\Leftrightarrow$ $P(A_1/A_2) = P(A_1)$ nebo $P(A_2) = 0$.

d) Jevy A_1, A_2 jsou stochasticky nezávislé $\Leftrightarrow$ $P(A_2/A_1) = P(A_2)$ nebo $P(A_1) = 0$.

Věta (věta o násobení pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ takové jevy, že $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Pak

$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$.

Věta (vzorec úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $H_i \in \mathcal{A}, i \in I$ (kde I je nejvýše spočetná indexová množina) takové jevy, že $P(H_i) > 0, H_i \cap H_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i \in I} H_i = \Omega$. (Říkáme, že jevy $H_i, i \in I$ tvoří úplný systém hypotéz.)

a) Pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$ platí vzorec úplné pravděpodobnosti:

$P(A) = \sum\limits_{i \in I} P(H_i)P(A/H_i)$.

b) Pro libovolnou hypotézu $H_k, k \in I$ a libovolný jev $A \in \mathcal{A}, P(A) > 0$ platí Bayesův vzorec:

$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$.

6. Geometrická pravděpodobnost

Definice (definice borelovského pole a borelovské množiny)

Nechť n je přirozené číslo. Množinu $R^n = (-\infty, \infty) \times \ldots \times (-\infty, \infty) = (-\infty, \infty)^n$ nazýváme **n-rozměrným prostorem**. Minimální jevové pole na R^n obsahující třídu všech polouzavřených intervalů typu $(-\infty, x_1\rangle \times \ldots \times (-\infty, x_n\rangle$ pro $(x_1, \ldots x_n) \in R^n$ nazýváme **n-rozměrným borelovským polem** $\mathcal{B}^n$ a prvky tohoto pole nazýváme **(n-rozměrnými) borelovskými množinami**. Dvojice $(R^n, \mathcal{B}^n)$ je tedy měřitelný prostor.

Věta (věta o borelovských množinách)

Mezi borelovské množiny náleží zejména: prázdná množina, n-rozměrný prostor, všechny jednobodové, konečné a spočetné množiny, všechny otevřené a uzavřené oblasti a všechna nejvýše spočetná sjednocení a průniky těchto množin. Rovněž kartézský součin borelovských množin je borelovská množina, ovšem vyšší dimenze.

Definice (definice objemu borelovské množiny)

Nechť $(R^n, \mathcal{B}^n)$ je měřitelný prostor a $G \in \mathcal{B}^n$ je borelovská množina. **Objemem** borelovské množiny G rozumíme číslo

$mes(G) = \int\limits_G \ldots \int dx_1 \ldots dx_n$, pokud Riemannův integrál vpravo existuje.

Definice (definice geometrické pravděpodobnosti)

Nechť objem $mes(G)$ borelovské množiny G je nenulový a konečný. **Geometrickou pravděpodobností** soustředěnou na množině G rozumíme funkci $Q : \mathcal{B}^n \mapsto R$ danou vzorcem

$\forall B \in \mathcal{B}^n, B \subseteq G : Q(B) = \frac{mes(B)}{mes(G)}$, pokud $mes(B)$ existuje.

Věta (vlastnosti geometrické pravděpodobnosti)

Geometrická pravděpodobnost je pravděpodobnost ve smyslu axiomatické definice pravděpodobnosti a má tedy vlastnosti P1 až P17. Trojice $(R^n, \mathcal{B}^n, Q)$ je tudíž pravděpodobnostní prostor.

7. Náhodné veličiny

Definice (definice borelovsky měřitelného zobrazení)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}), (R^n, \mathcal{B}^n)$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $\mathbf{X} : \Omega \mapsto R^n$ se nazývá **borelovsky měřitelné** (vzhledem k $\mathcal{A}$), právě když úplný vzor každé n-rozměrné borelovské množiny je jev, tj.

$\forall B \in \mathcal{B}^n : \mathbf{X}^{inv}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

Ve speciálním případě, kdy $\Omega = R^m$ a $\mathcal{A} = \mathcal{B}^m, \mathbf{X} = \mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, tj.

$\forall B \in \mathcal{B}^n : \mathbf{g}^{inv}(B) =$

$\{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m; (g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)) \in B\} \in \mathcal{B}^m$, hovoříme o **borelovské funkci**.

Definice (definice náhodné veličiny)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}), (R^n, \mathcal{B}^n)$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $\mathbf{X} : \Omega \mapsto R^n$ se nazývá **náhodná veličina** (vzhledem k $\mathcal{A}$), právě když je borelovsky měřitelné (vzhledem k $\mathcal{A}$). Pro $n = 1$ hovoříme o **skalární náhodné veličině**, pro $n \geq 2$ o **náhodném vektoru**. Přitom zobrazení $X_1 : \Omega \to R, \ldots, X_n : \Omega \mapsto R$ se nazývají **složky náhodného vektoru**. Obraz $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ se nazývá **číselná realizace** náhodné veličiny $\mathbf{X}$ příslušná možnému výsledku ω.

Označení

a) Jestliže nehrozí nebezpečí nedorozumění, zapisujeme náhodnou veličinu i její číselnou realizaci týmž symbolem $\mathbf{X}$.

b) Množinu $\{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) \in B\}$ zkráceně zapisujeme $\{\mathbf{X} \in B\}$ a čteme: náhodná veličina $\mathbf{X}$ se realizovala v borelovské množině B. Ve speciálním případě, kdy $B = \{\mathbf{x}\}$ resp. $B = (-\infty, \mathbf{x}\rangle$, píšeme $\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}$ resp. $\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}$.

c) Zápis pravděpodobnosti zkrátíme takto:

$P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) \in B\}) = P(\mathbf{X} \in B)$

$P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) \in B\} / \{\omega \in \Omega; \mathbf{Y}(\omega) \in C\}) = P(\mathbf{X} \in B / \mathbf{Y} \in C)$.

Věta (věta o transformované náhodné veličině)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}), (R^n, \mathcal{B}^n), (R^m, \mathcal{B}^m)$ jsou měřitelné prostory. Nechť $\mathbf{X} : \Omega \mapsto R^n$ je náhodná veličina a $\mathbf{g} : R^n \mapsto R^m$ je borelovská funkce. Pak složené zobrazení $\mathbf{Y} : \Omega \mapsto R^m$ dané vzorcem $\forall \omega \in \Omega : \mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(\omega))$ je náhodná veličina. Nazývá se **transformovaná náhodná veličina**, pro $m = 1$ skalární, pro $m \geq 2$ vektorová.

8. Distribuční funkce náhodné veličiny

Definice (definice distribuční funkce náhodné veličiny)

a) Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $X : \Omega \mapsto R$ je skalární náhodná veličina. Funkce $\Phi : R \mapsto R$ daná vzorcem:

$\forall x \in R : \Phi(x) = P(X \leq x)$

se nazývá **distribuční funkce** náhodné veličiny X.

b) Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \mapsto R^n$ je náhodný vektor. Funkce $\Phi : R^n \mapsto R$ daná vzorcem:

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \Phi(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \leq x_n)$

se nazývá **distribuční funkce** náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Věta (vlastnosti distribuční funkce skalární náhodné veličiny)

Nechť $\Phi(x)$ je distribuční funkce skalární náhodné veličiny X. Pak $\Phi(x)$ má následující vlastnosti:

a) $\Phi(x)$ je neklesající, tj. $\forall x_1 < x_2 : \Phi(x_1) \leq \Phi(x_2)$.

b) $\Phi(x)$ je zprava spojitá, tj. pro libovolné, ale pevně dané $x_0 \in R$ je $\lim\limits_{x \to x_0+} \Phi(x) = \Phi(x_0)$.

c) $\Phi(x)$ je normovaná, tj. $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$.

d) $\forall a, b \in R, a < b \Rightarrow P(a < X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.
e) Pro libovolné, ale pevně dané $x_0 \in R : P(X = x_0) = \Phi(x_0) - \lim_{x \to x_0-} \Phi(x)$.

Věta (vlastnosti distribuční funkce náhodného vektoru)
Nechť $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ je distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Pak $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ má následující vlastnosti:
a) $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ je neklesající vzhledem ke každé jednotlivé proměnné.
b) $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ je zprava spojitá vzhledem ke každé jednotlivé proměnné.
c) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} \Phi(x_1, \dots, x_n) = 1$

$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \lim\limits_{x_i \to -\infty} \Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$
d) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \forall (h_1, \dots, h_n) \in R^n_+ :$
$P(x_1 < X_1 \le x_1 + h_1 \wedge \dots \wedge x_n < X_n \le x_n + h_n) = \Phi(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_1 + h_1, \dots, x_i, \dots, x_n + h_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \Phi(x_1 + h_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n + h_n) - \dots + (-1)^n \Phi(x_1, \dots, x_n)$
e) $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_{i-1} \to \infty \\ x_{i+1} \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} \Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi_i(x_i)$.

Funkce $\Phi_i(x_i)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Nazývá se **marginální distribuční funkce** a $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ se v této souvislosti nazývá **simultánní distribuční funkce**. Analogicky lze zavést marginální distribuční funkce k proměnných, $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$.

Věta (existenční věta)
a) Skalární případ: Jestliže funkce $\Phi(x)$ má vlastnosti (a), (b), (c) z věty o vlastnostech distribuční funkce skalární náhodné veličiny, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaná skalární náhodná veličina X tak, že $\Phi(x)$ je její distribuční funkce.

b) Vektorový případ: Jestliže funkce $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ má vlastnosti (a), (b), (c) z věty o vlastnostech distribuční funkce náhodného vektoru, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaný náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ tak, že $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ je jeho distribuční funkce.

9. Diskrétní a spojité náhodné veličiny

Definice (definice diskrétní náhodné veličiny)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X náhodná veličina definovaná na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, která má distribuční funkci $\Phi(x)$. Řekneme, že náhodná veličina X je **diskrétní** (vzhledem k P), právě když existuje reálná funkce $\pi(x)$, která je nulová v R s výjimkou nejméně jednoho a nejvýše spočetně mnoha bodů, kde je kladná a platí pro ni: $\forall x \in R : \Phi(x) = \sum_{t \leq x} \pi(t)$. Tato funkce se nazývá **pravděpodobnostní funkce** diskrétní náhodné veličiny X.

Věta (vlastnosti pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny)

Nechť $\pi(x)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny X. Pak platí:

a) $\forall x \in R : \pi(x) \geq 0$ (vlastnost D1 - nezápornost)

b) $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \pi(x) = 1$ (vlastnost D2 - normovanost)

c) $\forall x \in R : \pi(x) = P(X = x)$

d) $\forall B \in \mathcal{B} : P(X \in B) = \sum_{x \in B} \pi(x)$.

Definice (definice diskrétního náhodného vektoru)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ náhodný vektor definovaný na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Nechť $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho distribuční funkce. Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ je **diskrétní** (vzhledem k P), právě když existuje reálná funkce $\pi(x_1, \ldots, x_n)$, která je nulová v R^n s výjimkou nejméně jednoho a nejvýše spočetně mnoha bodů, kde je kladná a platí pro ni:

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t_1 \leq x_1} \ldots \sum_{t_n \leq x_n} \pi(t_1, \ldots, t_n)$. Tato funkce se nazývá **pravděpodobnostní funkce** diskrétního náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Věta (vlastnosti pravděp. funkce diskrétního náhodného vektoru)

Nechť $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Pak platí:

a) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \pi(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ (vlastnost D1 - nezápornost)

b) $\sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \pi(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (vlastnost D2 - normovanost)

c) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \pi(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge X_n = x_n)$

d) $\forall B \in \mathcal{B}^n : P(\mathbf{X} \in B) = \sum \ldots \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in B} \pi(x_1, \ldots, x_n)$

e) $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{x_{i-1}=-\infty}^{\infty} \sum_{x_{i+1}=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi_i(x_i)$.

Funkce $\pi_i(x_i)$ je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X_i. Nazývá se **marginální pravděpodobnostní funkce**. Funkce $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ se v této souvislosti nazývá **simultánní pravděpodobnostní funkce**. Podobně lze zavést marginální pravděpodobnostní funkce k proměnných, kde $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

Věta (existenční věta)
a) Skalární případ: Jestliže funkce $\pi(x)$ má vlastnosti D1, D2 z věty o vlastnostech pravděpodobnostní funkce skalární náhodné veličiny, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaná skalární diskrétní náhodná veličina X tak, že $\pi(x)$ je její pravděpodobnostní funkce.

b) Vektorový případ: Jestliže funkce $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ má vlastnosti D1, D2 z věty o vlastnostech pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaný diskrétní náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ tak, že $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho pravděpodobnostní funkce.

Definice (definice spojité náhodné veličiny)
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X náhodná veličina definovaná na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, která má distribuční funkci $\Phi(x)$. Řekneme, že náhodná veličina X je **spojitá** (vzhledem k P), právě když existuje po částech spojitá nezáporná reálná funkce $\varphi(x)$ tak, že pro $\forall x \in R : \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$. Tato funkce se nazývá **hustota pravděpodobnosti** spojité náhodné veličiny X.

Věta (vlastnosti hustoty spojité náhodné veličiny)
Nechť $\varphi(x)$ je hustota spojité náhodné veličiny X. Pak platí:
a) $\forall x \in R : \varphi(x) \geq 0$ (vlastnost S1 - nezápornost)
b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$ (vlastnost S2 - normovanost)
c) $\forall x \in R, \forall h > 0 : P(x < X \leq x + h) = \int\limits_{x}^{x+h} \varphi(t)dt$
d) Pro libovolné, ale pevně dané $x \in R : P(X = x) = 0$.
e) $\varphi(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$ ve všech bodech spojitosti funkce $\varphi(x)$.

Definice (definice spojitého náhodného vektoru)
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ náhodný vektor definovaný na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Nechť $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho distribuční funkce. Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ je **spojitý** (vzhledem k P), právě když existuje po částech spojitá nezáporná reálná funkce $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tak, že pro
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} \varphi(t_1, \ldots, t_n)dt_1 \ldots dt_n$. Tato funkce se nazývá **hustota pravděpodobnosti** spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Věta (vlastnosti hustoty spojitého náhodného vektoru)
Nechť $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je hustota spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Pak platí:

a) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \varphi(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ (vlastnost S1 - nezápornost)

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = 1$ (vlastnost S2 - normovanost)

c) $\forall B \in \mathcal{B}^n : P(\mathbf{X} \in B) = \int \ldots \int\limits_{B} \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$

d) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n \Phi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ ve všech bodech spojitosti funkce $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

e) $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n = \varphi_i(x_i)$.

Funkce $\varphi_i(x_i)$ je hustota náhodné veličiny X_i. Nazývá se **marginální hustota**. Funkce $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ se v této souvislosti nazývá **simultánní hustota**. Podobně lze zavést marginální hustoty k proměnných, kde $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

Věta (existenční věta)
a) Skalární případ: Jestliže funkce $\varphi(x)$ má vlastnosti S1, S2 z věty o vlastnostech hustoty skalární náhodné veličiny, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaná skalární spojitá náhodná veličina X tak, že $\varphi(x)$ je její hustota.

b) Vektorový případ: Jestliže funkce $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ má vlastnosti S1, S2 z věty o vlastnostech hustoty náhodného vektoru, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaný spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ tak, že $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho hustota.

10. Stochastická nezávislost náhodných veličin

Definice (definice n stochasticky nezávislých náhodných veličin)
a) Obecný případ: Řekneme, že náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ s marginálními distribučními funkcemi $\Phi_1(x_1), \ldots, \Phi_n(x_n)$ a simultánní distribuční funkcí $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ jsou **stochasticky nezávislé**, právě když
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_1(x_1) \ldots \Phi_n(x_n)$.

b) Diskrétní případ: Řekneme, že diskrétní náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ s marginálními pravděpodobnostními funkcemi $\pi_1(x_1), \ldots, \pi_n(x_n)$ a simultánní pravděpodobnostní funkcí $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ jsou **stochasticky nezávislé**, právě když
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi_1(x_1) \ldots \pi_n(x_n)$.

c) Spojitý případ: Řekneme, že spojité náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ s marginálními hustotami $\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)$ a simultánní hustotou $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jsou **stochasticky nezávislé**, právě když
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n)$ s případnou výjimkou na množině bodů neovlivňujících integraci.

Definice (definice spočetně mnoha stochasticky nezávislých náhodných veličin)

Řekneme, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin**, právě když pro všechna přirozená n jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$.

Definice (definice n stochasticky nezávislých náhodných vektorů)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X}_1 = (X_{11}, \ldots, X_{p_1 1}), \ldots, \mathbf{X}_n = (X_{1n}, \ldots, X_{p_n n})$ náhodné vektory definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Řekneme, že tyto náhodné vektory jsou **stochasticky nezávislé**, právě když každá složka náhodného vektoru $\mathbf{X}_i$ je stochasticky nezávislá se všemi složkami náhodného vektoru $\mathbf{X}_k$ pro $\forall i \neq k$.

Věta (věta o stochastické nezávislosti transformovaných náhodných veličin)

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $g_1, \ldots, g_n$ borelovské funkce. Pak transformované náhodné veličiny $Y_1 = g_1(X_1), \ldots, Y_n = g_n(X_n)$ jsou opět stochasticky nezávislé náhodné veličiny.

(Tvrzení lze zobecnit i pro transformované náhodné vektory.)

11. Rozložení transformovaných náhodných veličin

Věta (věta o transformaci diskrétní náhodné veličiny)

Nechť X je diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $\pi(x)$. Nechť g je borelovská ryze monotónní funkce, tedy v oblasti $C \subseteq R$ existuje inverzní funkce $g^{-1} = \tau$. Pak pro pravděpodobnostní funkci $\pi_*(y)$ transformované náhodné veličiny $Y = g(X)$ platí: $\pi_*(y) = \pi(\tau(y))$ pro $y \in C$, $\pi_*(y) = 0$ jinak.

Věta (věta o transformaci spojité náhodné veličiny)

Nechť X je spojitá náhodná veličina s hustotou $\varphi(x)$. Nechť g je borelovská ryze monotónní funkce se spojitou a nenulovou derivací v R, tedy v oblasti $C \subseteq R$ existuje inverzní funkce $g^{-1} = \tau$ se spojitou a nenulovou derivací. Pak pro hustotu $\varphi_*(y)$ transformované náhodné veličiny $Y = g(X)$ platí: $\varphi_*(y) = \varphi(\tau(y))|\tau'(y)|$ pro $y \in C$, $\varphi_*(y) = 0$ jinak.

Věta (věta o transformaci pomocí funkce, která není ryze monotónní)

Není-li transformační funkce g ryze monotónní, pak mezi X a Y nexxistuje vzájemně jednoznačný vztah. V takovém případě pro distribuční funkci transformované náhodné veličiny Y platí: $\Phi_*(y) = P(X \in \Delta_1) + P(X \in \Delta_2) + \ldots$, kde $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ jsou ty intervaly, pro něž $Y \leq y$.

Věta (věta o transformaci náhodného vektoru na náhodnou veličinu)

a) Nechť $(X_1, \ldots, X_n)$ je diskrétní náhodný vektor s pravděpodobnostní funkcí $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ a $g : R^n \mapsto R$ je borelovská funkce. Pak pravděpodobnostní funkce $\pi_*(y)$ transformované náhodné veličiny $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ je dána vztahem:

$$\pi_*(y) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in S(y)} \ldots \sum \pi(x_1, \ldots, x_n),$$

kde $S(y) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n; g(x_1, \ldots, x_n) = y\}$

b) Nechť $(X_1, \ldots, X_n)$ je spojitý náhodný vektor s hustotou $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a $g : R^n \mapsto R$ je borelovská funkce. Pak hustota $\varphi_*(y)$ transformované náhodné veličiny $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ je dána vztahem:

$$\varphi_*(y) = \frac{d}{dy} \int_{S(y)} \ldots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

kde $S(y) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n; g(x_1, \ldots, x_n) \leq y\}$.

Věta (věta o konvoluci)

a) Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé diskrétní náhodné veličiny s pravděpodobnostními funkcemi $\pi_1(x_1), \pi_2(x_2)$. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = X_1 + X_2$ má pravděpodobnostní funkci

$$\pi_*(y) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \pi_1(x_1)\pi_2(y - x_1) = \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} \pi_1(y - x_2)\pi_2(x_2).$$

b) Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé spojité náhodné veličiny s hustotami $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = X_1 + X_2$ má hustotu

$$\varphi_*(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1)\varphi_2(y - x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(y - x_2)\varphi_2(x_2)dx_2.$$

Věta (věta o lineární transformaci náhodného vektoru)

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)'$ je reálný vektor, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je reálná čtvercová pozitivně definitní matice řádu n. Prvky inverzní matice $\mathbf{B}^{-1}$ označíme b^{ij}.

a) Diskrétní případ: Je-li $\mathbf{X}$ diskrétní náhodný vektor s pravděpodobnostní funkcí $\pi(\mathbf{x})$, pak pravděpodobnostní funkce $\pi_*(\mathbf{y})$ transformovaného náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}$ je dána vztahem: $\pi_*(\mathbf{y}) = \pi(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a}))$.

b) Spojitý případ: Je-li $\mathbf{X}$ spojitý náhodný vektor s hustotou $\varphi(\mathbf{x})$, pak hustota $\varphi_*(\mathbf{y})$ transformovaného náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{X}$ je dána vztahem: $\varphi_*(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a}))|\mathbf{B}|^{-1}$.

Poznámka

Vybraná rozložení diskrétních a spojitých náhodných veličin a náhodných vektorů jsou uvedena v Příloze A skripta M. Budíková,Š. Mikoláš, P. Osecký: Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Sbírka příkladů.

12. Číselné charakteristiky náhodných veličin

Definice (definice kvantilu)

Nechť X je náhodná veličina aspoň ordinálního charakteru a $\alpha \in (0,1)$. Číslo $K_\alpha(X)$ se nazývá α-**kvantil** náhodné veličiny X, právě když splňuje nerovnosti: $P(X \leq K_\alpha(X)) \geq \alpha \wedge P(X \geq K_\alpha(X)) \geq 1-\alpha$. Kvantil $K_{0,50}(X)$ se nazývá **medián**, $K_{0,25}(X)$ je **dolní kvartil**, $K_{0,75}(X)$ je **horní kvartil** a jejich rozdíl $IQR = K_{0,75}(X) - K_{0,25}(X)$ se nazývá **kvartilová odchylka**. Kvantily $K_{0,10}(X), \ldots, K_{0,90}(X)$ jsou **decily**, $K_{0,01}(X), \ldots, K_{0,99}(X)$ jsou **percentily**. Kterýkoliv kvantil je charakteristikou polohy, kvartilová odchylka je charakteristikou variability.

Důsledek (pro spojitou náhodnou veličinu)

Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou $\varphi(x)$, pak $K_\alpha(X)$ je takové číslo, pro které platí: $\Phi(K_\alpha(X)) = \int_{-\infty}^{K_\alpha(X)} \varphi(x)dx = \alpha$.

Označení

Kvantily náhodných veličin s rozložením $N(0,1), \chi^2(n), t(n), F(n_1,n_2)$ označujeme stručně $u_\alpha, \chi^2_\alpha(n), t_\alpha(n), F_\alpha(n_1,n_2)$. Jejich hodnoty jsou uvedeny ve statistických tabulkách nebo je lze vypočítat pomocí statistického software.

Věta (věta o kvantilu transformované náhodné veličiny)

Nechť X je spojitá náhodná veličina s distribuční funkcí $\Phi(x)$, $\alpha \in (0,1)$, $g : R \mapsto R$ ryze monotónní borelovská funkce, $Y = g(X)$ je transformovaná náhodná veličina.

a) Je-li g rostoucí funkce, pak $K_\alpha(Y) = g(K_\alpha(X))$.

b) Je-li g klesající funkce, pak $K_\alpha(Y) = g(K_{1-\alpha}(X))$.

Definice (definice střední hodnoty)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina aspoň intervalového charakteru, která je definovaná na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. **Střední hodnota** $E(X)$ náhodné veličiny X je číslo, které je definováno takto:

a) Je-li X diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $\pi(x)$, pak $E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\pi(x)$, pokud součet vpravo je konečný nebo absolutně konvergentní. Jinak řekneme, že střední hodnota neexistuje.

b) Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou $\varphi(x)$, pak $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$, pokud integrál vpravo je konečný nebo absolutně konvergentní. Jinak řekneme, že střední hodnota neexistuje.

Věta (věta o střední hodnotě transformované náhodné veličiny)

a) Diskrétní případ: Nechť X je diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $\pi(x)$ (resp. $(X_1, \ldots, X_n)$ je diskrétní náhodný vektor s pravděpodobnostní funkcí $\pi(x_1, \ldots, x_n)$). Nechť $g : R \mapsto R$ je borelovská funkce,

$Y = g(X)$ je transformovaná náhodná veličina (resp. $g : R^n \mapsto R$ je borelovská funkce, $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ je transformovaná náhodná veličina). Pak $E(Y) = \sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\pi(x)$, pokud součet vpravo je konečný nebo absolutně konvergentní (resp. $E(Y) = \sum\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum\limits_{x_n=-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n)\pi(x_1, \ldots, x_n)$, pokud součet vpravo je konečný nebo absolutně konvergentní).

a) Spojitý případ: Nechť X je spojitá náhodná veličina s hustotou $\varphi(x)$ (resp. $(X_1, \ldots, X_n)$ je spojitý náhodný vektor s hustotou $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$). Nechť $g : R \mapsto R$ je borelovská funkce, $Y = g(X)$ je transformovaná náhodná veličina (resp. $g : R^n \mapsto R$ je borelovská funkce, $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ je transformovaná náhodná veličina). Pak $E(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx$, pokud integrál vpravo je konečný nebo absolutně konvergentní (resp.
$E(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$, pokud integrál vpravo je konečný nebo absolutně konvergentní).

Definice (definice rozptylu)
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina aspoň intervalového charakteru definovaná na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ se střední hodnotou $E(X)$. Číslo $D(X) = E([X - E(X)]^2)$ se nazývá **rozptyl** náhodné veličiny X (pokud střední hodnota vpravo existuje). Číslo $\sqrt{D(X)}$ se nazývá **směrodatná odchylka** náhodné veličiny X.

Důsledek (výpočet rozptylu v diskrétním a spojitém případě)
a) Je-li X diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $\pi(x)$, pak $D(X) = \sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2\pi(x)$ (pokud součet vpravo je konečný nebo absolutně konverguje).

b) Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou $\varphi(x)$, pak $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2\varphi(x)dx$ (pokud integrál vpravo je konečný nebo absolutně konverguje).

Definice (definice centrované a standardizované veličiny)
Nechť X náhodná veličina se střední hodnotou $E(X)$ a rozptylem $D(X)$. Transformovaná náhodná veličina $X - E(X)$ se nazývá **centrovaná náhodná veličina** a transformovaná náhodná veličina $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ se nazývá **standardizovaná náhodná veličina**.

Definice (definice kovariance a koeficientu korelace)
Nechť X_1, X_2 jsou náhodné veličiny definované na témž pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť mají střední hodnoty $E(X_1), E(X_2)$. Číslo $C(X_1, X_2) = E([X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)])$ se nazývá **kovariance** náhodných veličin X_1, X_2

(za předpokladu, že střední hodnota vpravo existuje). Číslo
$R(X_1, X_2) = E(\frac{X_1 - E(X_1)}{\sqrt{D(X_1)}} \frac{X_2 - E(X_2)}{\sqrt{D(X_2)}})$ pro $\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)} > 0$, $R(X_1, X_2) = 0$ jinak se nazývá **koeficient korelace** náhodných veličin X_1, X_2 (za předpokladu, že střední hodnota vpravo existuje). Jestliže $C(X_1, X_2) = 0$, pak řekneme, že náhodné veličiny X_1, X_2 jsou **nekorelované**.

Důsledek (výpočet kovariance v diskrétním a spojitém případě)

a) Je-li (X_1, X_2) diskrétní náhodný vektor s pravděpodobnostní funkcí $\pi(x_1, x_2)$, pak $C(X_1, X_2) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} [x_1 - E(X_1)][x_2 - E(X_2)]\pi(x_1, x_2)$ (pokud střední hodnoty vpravo existují a součet vpravo je konečný nebo absolutně konverguje).

b) Je-li (X_1, X_2) spojitý náhodný vektor s hustotou $\varphi(x_1, x_2)$, pak $C(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - E(X_1)][x_2 - E(X_2)]\varphi(x_1, x_2)dx_1 dx_2$ (pokud střední hodnoty vpravo existují a integrál vpravo je konečný nebo absolutně konverguje).

Definice (definice momentů náhodných veličin)

Nechť X, X_1, X_2 jsou náhodné veličiny, $k, k_1, k_2 \in R, r, s \in N$.

a) Číslo $E([X - k]^r)$ se nazývá ***r*-tý moment** náhodné veličiny X kolem konstanty k. Je-li $k = 0$, jde o ***r*-tý počáteční moment**, je-li $k = E(X)$, jedná se o ***r*-tý centrální moment**.

b) Číslo $E([X_1 - k_1]^r [X_2 - k_2]^s)$ se nazývá **$r \times s$-tý moment** náhodných veličin X_1, X_2 kolem konstant k_1, k_2. Je-li $k_1 = k_2 = 0$, jde o **$r \times s$-tý počáteční moment**, je-li $k_1 = E(X_1), k_2 = E(X_2)$, jedná se o **$r \times s$-tý centrální moment**.

Definice (definice číselných charakteristik náhodných vektorů)

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor. Reálný vektor
$E(\mathbf{X}) = (E(X_1), \ldots, E(X_n))'$ se nazývá **vektor středních hodnot**. Reálná čtvercová symetrická matice

$$var(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} D(X_1) & C(X_1, X_2) & \ldots & C(X_1, X_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C(X_n, X_1) & C(X_n, X_2) & \ldots & D(X_n) \end{pmatrix}$$

se nazývá **varianční matice** náhodného vektoru $\mathbf{X}$ a reálná čtvercová symetrická matice

$$cor(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & R(X_1, X_2) & \ldots & R(X_1, X_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R(X_n, X_1) & R(X_n, X_2) & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

se nazývá **korelační matice** náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

13. Vlastnosti číselných charakteristik náhodných veličin

Věta (vlastnosti střední hodnoty, kovariance, rozptylu, koeficientu korelace)

Nechť a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 jsou reálná čísla, $X, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ jsou náhodné veličiny definované na témž pravděpodobnostním prostoru. V následujících vzorcích vždy z existence číselných charakteristik na pravé straně vyplývá existence výrazu na levé straně.

Vlastnosti střední hodnoty

a) $E(a) = a$

b) $E(a + bX) = a + bE(X)$

c) $E(X - E(X)) = 0$

d) $E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$

e) Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ stochasticky nezávislé, pak $E(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i) = \prod\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$

Vlastnosti kovariance

a) $C(a_1, X_2) = C(X_1, a_2) = C(a_1, a_2) = 0$

b) $C(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = b_1b_2C(X_1, X_2)$

c) $C(X, X) = D(X)$

d) $C(X_1, X_2) = C(X_2, X_1)$

e) $C(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$

f) $C(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} C(X_i, Y_j)$

Vlastnosti rozptylu

a) $D(a) = 0$

b) $D(a + bX) = b^2D(X)$

c) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

d) $D(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} C(X_i, X_j)$

(Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nekorelované, pak $D(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i)$.)

Vlastnosti koeficientu korelace

a) $R(a_1, X_2) = R(X_1, a_2) = R(a_1, a_2) = 0$

b) $R(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = sgn(b_1b_2)R(X_1, X_2)$

c) $R(X, X) = 1$ pro $\sqrt{D(X)} > 0$, $R(X, X) = 0$ jinak

d) $R(X_1, X_2) = R(X_2, X_1)$

e) $R(X_1, X_2) = \frac{C(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}$ pro $\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)} > 0$

$R(X_1, X_2) = 0$ jinak

Věta (Markovova nerovnost)
Nechť pro náhodnou veličinu X se střední hodnotou $E(X)$ je $P(X > 0) = 1$. Pak pro $\forall \varepsilon > 0$ platí: $P(X > \varepsilon E(X)) \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Věta (Čebyševova nerovnost)
Nechť X je náhodná veličina se střední hodnotou $E(X)$ a rozptylem $D(X)$. Pak pro $\forall t > 0$ platí: $P(|X - E(X)| > t\sqrt{D(X)}) \leq \frac{1}{t^2}$.

Věta (Cauchyho - Schwarzova - Buňakovského nerovnost)
Pro koeficient korelace $R(X_1, X_2)$ náhodných veličin X_1, X_2 platí: $-1 \leq R(X_1, X_2) \leq 1$ a rovnosti je dosaženo tehdy a jen tehdy, když existují konstanty a_1, a_2 tak, že $P(X_2 = a_1 + a_2 X_1) = 1$.

14. Zákon velkých čísel a centrální limitní věta

Definice (definice konvergence náhodné posloupnosti)
Nechť $X, X_1, X_2, \ldots,$ jsou náhodné veličiny definované na témž pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s distribučními funkcemi $\Phi(x), \Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2), \ldots$. Řekneme, že náhodná posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k náhodné veličině X
a) jistě: $\forall \omega \in \Omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$
b) podle pravděpodobnosti: $\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \in \Omega : \lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) = 0$
c) v distribuci (podle rozložení): $\forall x \in R : \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$, pokud je $\Phi(x)$ v bodě x spojitá.

Věta (ověření konvergence podle pravděpodobnosti ke konstantě)
Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je náhodná posloupnost vyhovující podmínkám:
$\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = \mu$, $\lim\limits_{n\to\infty} D(X_n) = 0$.
Pak náhodná posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje podle pravděpodobnosti ke konstantě μ, tj.
$\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \in \Omega : \lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n(\omega) - \mu| > \varepsilon) = 0$.

Věta (Čebyševova věta, slabý zákon velkých čísel)
Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je náhodná posloupnost vyhovující podmínkám:
a) náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$ jsou nekorelované,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$,
c) $\forall n \in N : D(X_n) \leq \delta$, kde $\delta > 0$ je konstanta.
Pak náhodná posloupnost aritmetických průměrů $\{\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje podle pravděpodobnosti ke konstantě μ, tj.
$\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \in \Omega : \lim\limits_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \mu| > \varepsilon) = 0$.

Důsledek (Bernoulliova věta)

Nechť náhodná veličina Y_n udává počet úspěchů v posloupnosti n opakovaných nezávislých pokusů, přičemž v každém pokusu nastává úspěch s pravděpodobností ϑ. Pak posloupnost relativních četností $\{\frac{Y_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje podle pravděpodobnosti k číslu ϑ, tj.

$\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \in \Omega : \lim\limits_{n\to\infty} P(|\frac{Y_n(\omega)}{n} - \vartheta| > \varepsilon) = 0.$

Věta (Sverdrupova věta)

Nechť náhodná posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině X. Nechť $g : R \mapsto R$ je všude rostoucí borelovská funkce s inverzní funkcí $g^{-1} = \tau$. Pak posloupnost transformovaných náhodných veličin $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $Y_n = g(X_n)$ konverguje v distribuci k transformované náhodné veličině $Y = g(X)$.

Věta (Lindebergova - Lévyova centrální limitní věta)

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin, které mají totéž rozložení se střední hodnotou $E(X_n) = \mu$ a rozptylem $D(X_n) = \sigma^2, n = 1, 2, \ldots$. Pak posloupnost standardizovaných součtů $\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v distribuci ke standardizované normální náhodné veličině, tj.

$\forall x \in R : \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$, kde $\Phi_n(x) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right)$ a $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Přitom tato konvergence je stejnoměrná pro $\forall x \in R$.

Důsledek (Moivre - Laplaceova integrální věta)

Nechť $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin, přičemž $Y_n \sim Bi(n, \vartheta)$. Pak posloupnost standardizovaných náhodných veličin $\left\{\frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v distribuci ke standardizované normální náhodné veličině, tj.

$\forall y \in R : \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}} \le y\right) = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Přitom tato konvergence je stejnoměrná pro $\forall y \in R$.

Věta (Poissonova věta)

Nechť $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin, přičemž $Y_n \sim Bi(n, \vartheta_n)$ a je splněna podmínka $\lim\limits_{n\to\infty} n\vartheta_n = \lambda$. Pak náhodná posloupnost $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině $Y \sim Po(\lambda)$, tedy pro $y = 0, 1, 2, \ldots$ platí:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{t=0}^{y} \binom{n}{t} \vartheta_n^t (1 - \vartheta_n)^{n-t} = \sum\limits_{t=0}^{y} \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}.$