

## **II. Vlny**

### **1. Harmonické vlny v 1dm**

- 1.1. Základní vlastnosti harmonické vlny**
- 1.2. Princip superpozice**
- 1.3. Interference vln**
- 1.4. Grupová rychlost**
- 1.5. Vlnová rovnice**
- 1.6. Energie a tok energie vlny**
- 1.7. Matematická poznámka**
- 1.8. Tlumená harmonická vlna**
- 1.9. Podélné vlny**
- 1.10. Vlny v disperzním prostředí**

### **2. Harmonické vlny ve 3dm**

- 2.1. Rovinná vlna**
- 2.2. Kulová vlna**
- 2.3. Vlnová rovnice**

### **3. Obecná vlna**

- 3.1. Příklady složitějších vln**
- 3.2. Periodická funkce**
- 3.3. Neperiodické funkce**
- 3.4. Vlnové klubko v čase a prostoru**

## II. Vlny

Vlnami rozumíme šíření změny fyzikální veličiny v čase a prostoru. Na rozdíl od kmitů, které do jisté míry můžeme považovat za speciální případ vln, je vlna zpravidla nelokalizovaná. V této souvislosti je možné připomenout, že za základní fyzikální objekty můžeme považovat částice a vlny. Ty se liší zpravidla právě představou, že částice je silně lokalizovaná a naopak vlna zcela delokalizována. Ve skutečnosti mezi nimi existuje velmi těsný vztah a dokonce v kvantové fyzice představa jejich vzájemné ekvivalence. U vln je vždy podstatné co se vlní, může to být např. intenzita elektrického pole, hustota prostředí, poloha částice atd. Tvar vln může být velmi různý, ale zpravidla se snažíme vlnové jevy popsat harmonickou vlnou, případně sumou harmonických vln.

V kapitole I. Kmity jsme v případě soustav o více stupních volnosti již zavedli pojem vlny, respektive stojaté vlny. Studovali jsme však především ohraničený systém. Kmity takového systému lze popsat jako superpozici stojatých vln. Tvar a vlastnosti takových vln jsou především určeny okrajovými podmínkami a disperzními vztahy. Základní vlastností stojatých vln je, že všechny elementy soustavy kmitají se stejnou fází a jejich energie je lokalizována uvnitř tohoto systému.

V případě vln nebo přesněji v případě pohybujících se vln, používá se termín postupná vlna, volíme zpravidla neohraničený systém. Pro takové vlny je typické, že jednotlivé elementy soustavy mají různé fáze. Lze ukázat, že příslušné disperzní vztahy zůstávají stejné pro oba typy vln. Postupná vlna přenáší energii a impulz v prostoru, ve kterém se šíří.

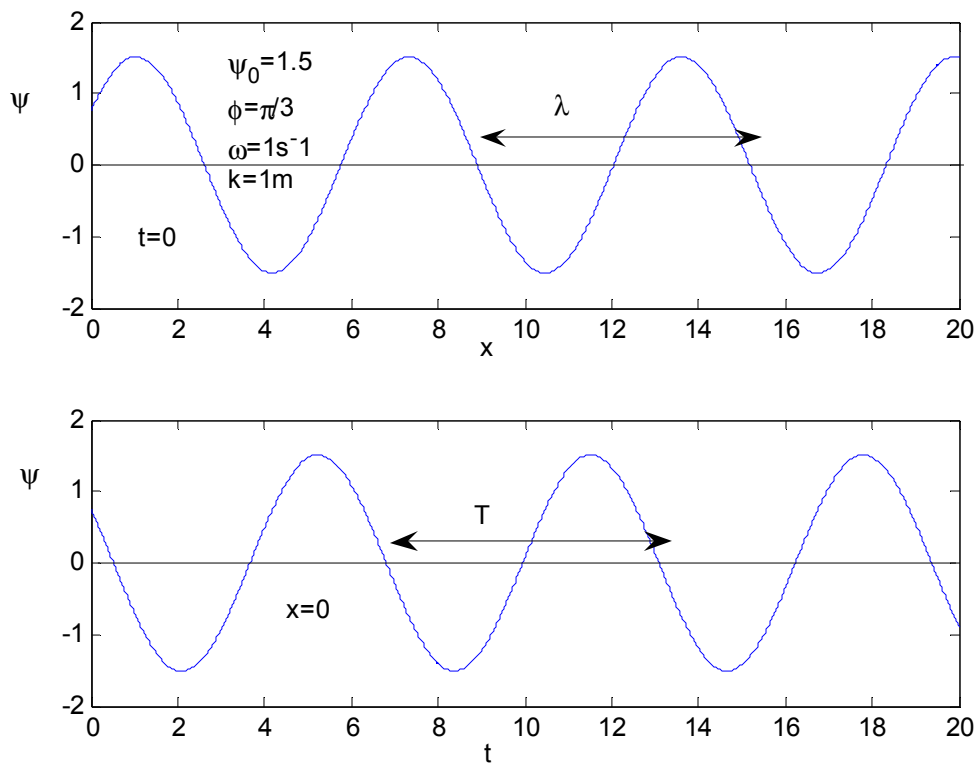
### 1. Harmonické vlny v 1dm

#### 1.1. Základní vlastnosti harmonické vlny

Harmonickou vlnou rozumíme vlnu, kterou lze popsat pomocí funkcí typu sin a cos. Její základní matematický popis v 1dm má tvar

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (1.1.1)$$

Tvar velmi připomíná funkci při popisu kmitů.



Obr. 1.1.1. Harmonická vlna, prostorová a časová závislost.

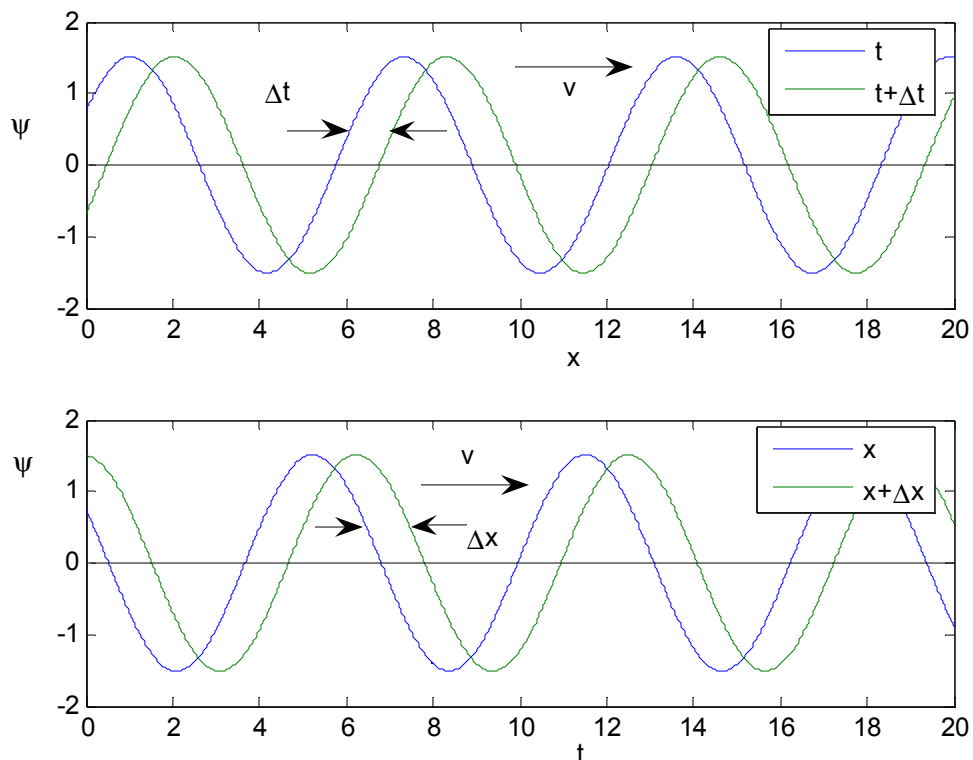
Příslušná fyzikální veličina  $\psi$  (např. mechanická výchylka) je funkcí dvou proměnných  $x$  a  $t$  (viz. obr. 1.1.1.),  $\psi_0$  je amplituda,  $\omega$  je časová frekvence (úhlová frekvence) s časovou periodou  $T$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.1.2)$$

a  $k$  je prostorová frekvence (úhlový vlnčet) s prostorovou periodou  $\lambda$  (vlnová délka)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.1.3)$$

$\phi$  je posuv fáze, výraz  $(\omega t - kx + \phi)$  se nazývá fáze vlny.



Obr.1.1.2. Posuv harmonické vlny v prostoru a čase.

Chceme-li určit rychlost posuvu takové vlny je nutné sledovat jeden bod vlnění (např. maximum) a pro ten platí

$$\omega t - kx + \varphi = \text{konst} \quad (1.1.4)$$

Pak

$$\omega dt - k dx = 0 \quad (1.1.5)$$

Rychlost tohoto bodu, označujeme ji jako fázovou rychlost  $v_f$ , je

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (1.1.6)$$

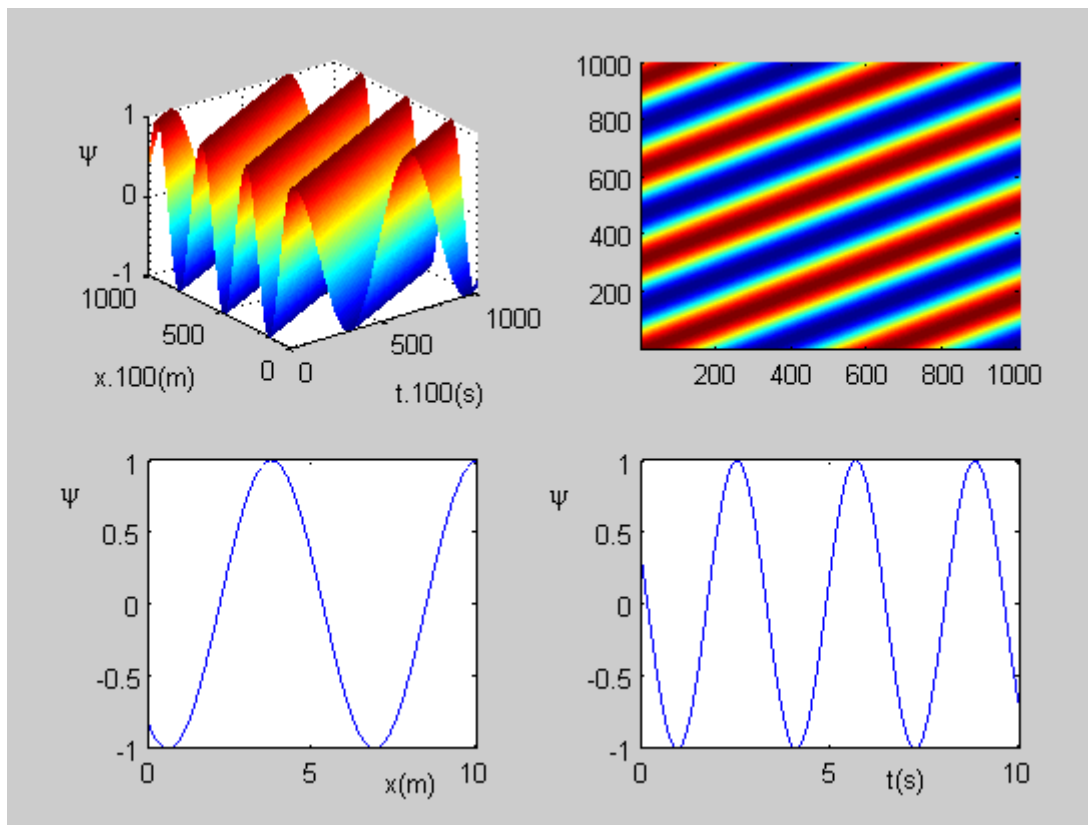
Vlna se pohybuje touto rychlostí ve směru osy  $x$ , pro fázi

$$\omega t + kx + \varphi = \text{konst} \quad (1.1.7)$$

bude rychlost záporná a vlnění se šíří na opačnou stranu.

V kapitole o kmitěch jsme zjistili, že obecně vztah mezi  $\omega$  a  $k$  (disperzní vztah) může být složitá funkce. Pokud platí vztah (1.1.6) jedná se o nedisperzní vlny, pokud je závislost složitější, mluvíme o disperzních vlnách. (Příkladem jsou systémy s více stupni volnosti studované v kapitole I. Kmitý nebo prostředí, kdy index lomu závisí na vlnové délce,  $n(\lambda)$ , protože  $n=c/v$ , je  $v(\lambda)$  respektive  $v(k)$ ).

Podobně jako u kmitů, může být vlnění podélné (výhybka  $x$  je směru šíření vlny) nebo příčné (výhybka  $x$  je kolmo na směr šíření).



Obr. 1.1.3. Zobrazení harmonické vlny v časoprostoru (osy horních obrázků jsou stejné, spodní obrázky jsou řezy v polovině stupnice).

## 1.2. Princip superpozice

Podobně jako v případě kmitů předpokládáme platnost principu superpozice, který dovoluje sčítání jednotlivých vln. Platí

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) \quad (1.2.1)$$

Jeho platnost je dána experimentální zkušeností a neplatí vždy samozřejmě. V prostoru a čase, kde se vyskytují dvě nebo více vln, dojde ke vzniku nové vlny, jako součtu jednotlivých částí. Velkou výhodou, jak uvidíme později, je možnost vyjádřit i velmi složité formy vln pomocí Fourierovy analýzy, jako součet harmonických vln o různých amplitudách a fázích.

## 1.3. Interference vln

Princip superpozice dovoluje studovat sečítání – interferenci dvou a více vln ve velmi různých situacích. Tento jednoduchý postup má celou řadu vynikajících aplikací. Podrobně probereme tyto jevy v akustice a optice. Pro dvě vlny obecně platí

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = \psi_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1) + \psi_{02} \cos(\omega_2 t - k_2 x + \phi_2) \quad (1.3.1)$$

Pro jednoduchost se omezíme na diskusi dvou speciálních, ale důležitých případů.

1. Dvě vlny se stejnými amplitudami, frekvencemi, vlnovými délkami, lišící se pouze fázovým posuvem.

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = \psi_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1) + \psi_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_2) \quad (1.3.2)$$

Pak platí

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = 2\psi_{01} \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cos\left(\omega_1 t - k_1 x + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (1.3.3)$$

Označíme

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 \quad (1.3.4)$$

Pak výsledek silně závisí na tomto rozdílu fází viz. obr.1.3.1. Pro

$$\frac{\Delta\phi}{2} = n\pi \quad \text{je amplituda maximální – konstruktivní interference} \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\Delta\phi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{je amplituda nulová – destruktivní interference.} \quad (1.3.6)$$

Podobně budeme postupovat i ve složitějších případech.

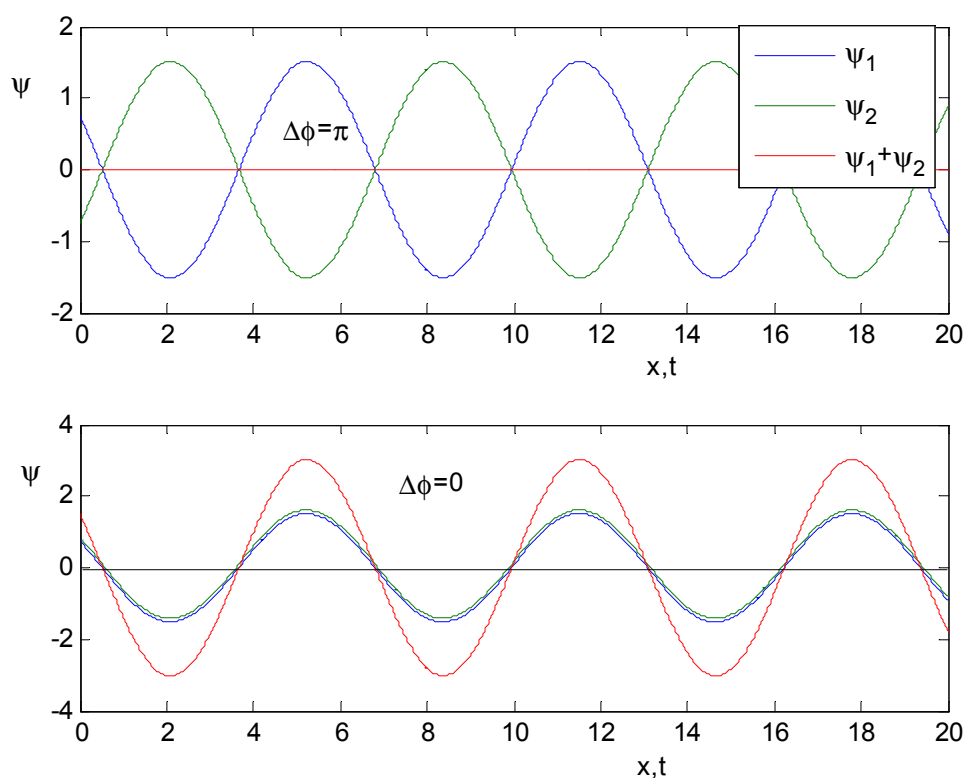
2. Dvě stejné vlny lišící se pouze směrem postupu. Pak analogicky k (1.3.2)

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = \psi_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1) + \psi_{01} \cos(\omega_1 t + k_1 x + \phi_1) \quad (1.3.7)$$

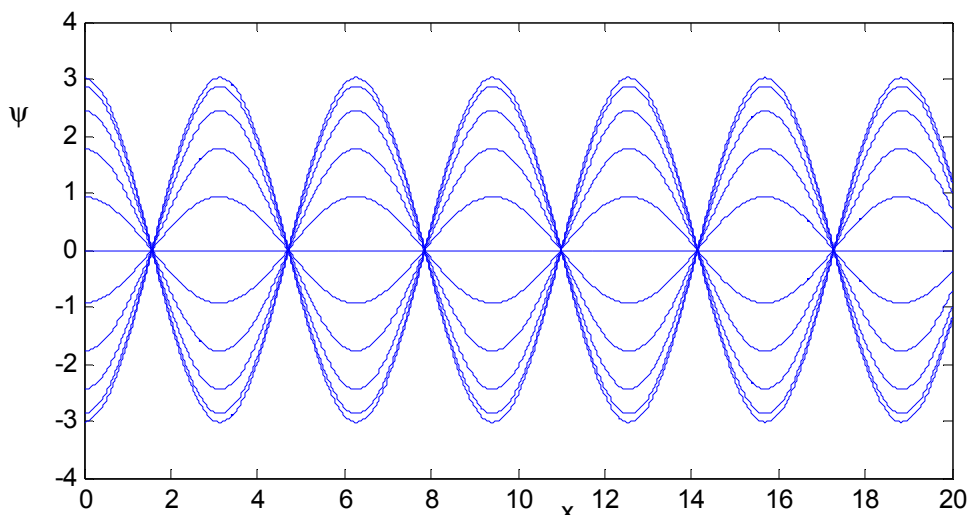
A po úpravě

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = 2\psi_{01} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \cos(k_1 x) \quad (1.3.8)$$

Dostáváme vlnu, která se nepohybuje, tedy tzv. stojatou vlnu (obr.1.3.2.), kterou jsme podrobně studovali v kapitole o kmitech v souvislosti se strunou.



Obr. 1.3.1. Destruktivní a konstruktivní interference.



Obr. 1.3.2. Stojaté vlnění v prostoru pro různé časové okamžiky.

### 1.4. Grupová rychlost

Samotná harmonická vlna nenese žádnou informaci, protože se stále stejně opakuje. K přenosu informace je nutná její modulace (amplitudy, fáze, frekvence...). Velmi složité formy vln můžeme dostat interferencí různých harmonických vln. Pro jednoduchost zvolme dvě vlny se stejnými amplitudami typu (1.3.1)

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = \psi_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + \psi_{01} \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) \quad (1.4.1)$$

Po běžné úpravě

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = 2\psi_{01} \cos\left(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} x + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos(\omega_{\text{st}} t - k_{\text{st}} x + \varphi_{\text{st}}) \quad (1.4.2)$$

Kde

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad k_{\text{mod}} = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad \omega_{\text{st}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad k_{\text{st}} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \varphi_{\text{st}} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (1.4.3)$$

Můžeme tuto vlnu přepsat do tvaru

$$\psi(x, t) = \psi_{\text{mod}}(x, t) \cos(\omega_{\text{st}} t - k_{\text{st}} x + \varphi_{\text{st}}) \quad (1.4.4)$$

Kde pro modulovanou amplitudu platí

$$\psi_{\text{mod}}(x, t) = 2\psi_{01} \cos\left(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} x + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (1.4.5)$$

Zřejmě tato amplituda přenáší možnou informaci. Hledáme rychlost tohoto přenosu, pak analogicky k hledání fázové rychlosti (1.1) položíme

$$\left(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} x + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \text{konst} \quad (1.4.6)$$

Pak po diferenciaci

$$\omega_{\text{mod}} dt - k_{\text{mod}} dx = 0 \quad (1.4.7)$$

Pak příslušná rychlost, nazveme ji grupová,  $v_g$

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk} \quad (1.4.8)$$

Pro dvě vlny vystačíme s rozdílem frekvencí a vlnočtů, v obecném případě spojitě disperzní závislosti platí

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.4.9)$$

Připomeňme, že pro fázovou rychlost (1.1.6) platí

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (1.4.10)$$

A tedy pro jednoduché disperzní vztahy ( $\omega/k = \text{konst}$ ) platí

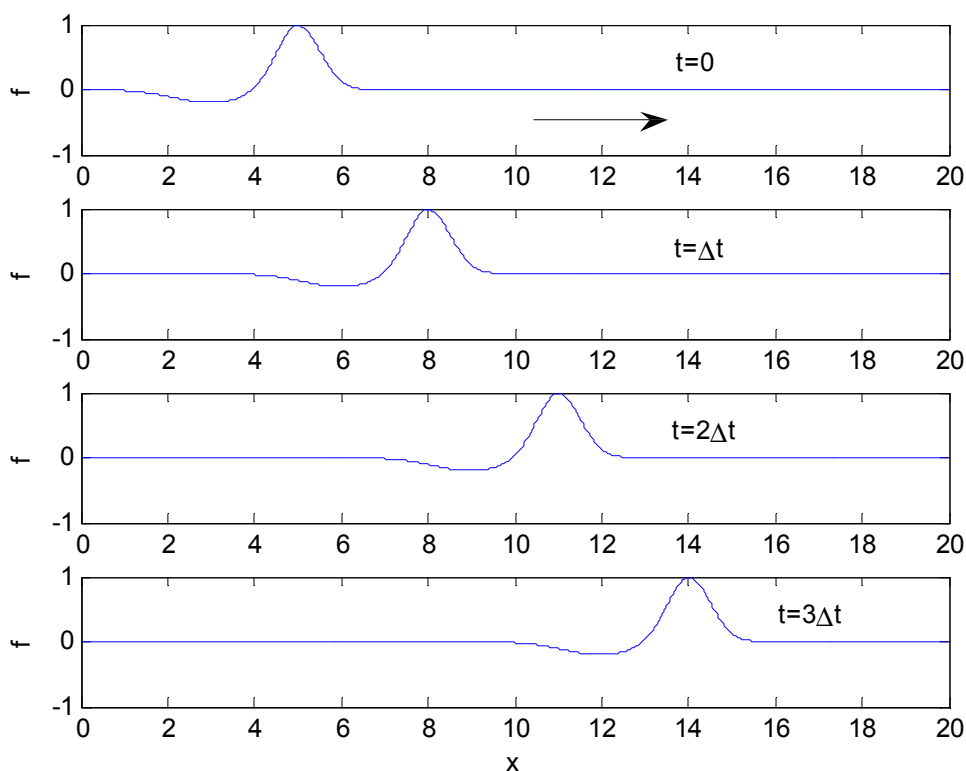
$$v_f = v_g \quad (1.4.11)$$

Obecně je souvislost mezi  $\omega$  a  $k$  určena příslušným disperzním vztahem (viz I.Kmity).

## 1.5. Vlnová rovnice

Vlnovou rovnici rozumíme diferenciální rovnici jejímž řešením je vlna.

V případě struny jsme odvodili tvar vlnové rovnice (3.1.12), která dává řešení pro obecný pohyb struny, např. pro šíření jednoduchého pulzu na struně – viz obr.1.5.1.



Obr. 1.5.1. Pohyb pulzu na struně (ve směru šipky).

Předpokládáme, že tvar pulzu se nemění ani v čase ani v prostoru, pouze se mění jeho poloha s rychlostí  $v$ .

Takové obecné řešení pro postupnou vlnu, respektive pulz, má v 1dm tvar

$$\psi(x, t) = f(vt \mp x) \quad (1.5.1)$$

kde znaménko určuje směr pohybu pulzu. V případě platnosti (1.4.10), tj.  $v_f = \omega/k$  má řešení tvar

$$\psi(x, t) = f(\omega t \mp kx) \quad (1.5.2)$$

Pro harmonické vlny (1.1.1) má řešení tvar

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t \mp kx + \varphi) \quad (1.5.3)$$

V obecném případě (1.5.1) budeme tuto funkci derivovat podle času a souřadnice a označíme



$$Z = vt \mp x \quad f' = \frac{\partial f}{\partial Z} \quad f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = vf' \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \mp f' \quad (1.5.4)$$

Porovnáním dostaneme rovnici platnou pro postupné vlny

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \pm \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.5.5)$$

Někdy se používá název rovnice postupné vlny. Postup opakujeme pro druhou derivaci, pak

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 f'' \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f'' \quad (1.5.6)$$

Podobně dostaneme

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.5.7)$$

Tím spíše má tato rovnice stejný tvar pro (1.5.2) nebo (1.5.3). Podobně jako v případě struny tuto rovnici budeme nazývat vlnovou, případně bezdisperzní vlnovou rovnicí.

## **1.6. Energie a tok energie vlny**

S pohybem struny, respektive s pohybem pulzu na struně je spojen přenos energie. Pro hustotu kinetické energie  $E_k$  platí

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad (1.6.1)$$

Potenciální energie souvisí s napětím struny  $T$  a se změnou délky elementu  $\Delta x$ . Tato změna délky, viz obr.I. 3.1.1. bude

$$\left( \Delta x^2 + \Delta \psi^2 \right)^{1/2} - \Delta x = \Delta x \left[ 1 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} - \Delta x \approx \Delta x \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] - \Delta x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \Delta x \quad (1.6.2)$$

Pak hustota potenciální energie  $E_p$

$$E_p = \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad (1.6.3)$$

a hustota celkové energie  $w(z,t)$

$$w(x,t) = E_k + E_p = \frac{1}{2} \rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\rho_0}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (1.6.4)$$

Vzhledem k rovnosti (1.5.5) je zřejmé, že v libovolném bodě struny v daném čase jsou hodnoty hustoty kinetické a potenciální energie stejné.

Podle I (3.1.10) působí v každém bodě na strunu síla

$$F(x,t) \cong -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \pm \frac{T_0}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm Z \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.6.5)$$

kde jsme využili (1.5.5), Veličina  $Z=T_0/v$  se nazývá impedance. Pak výkon, přenášený strunou, se bude rovnat

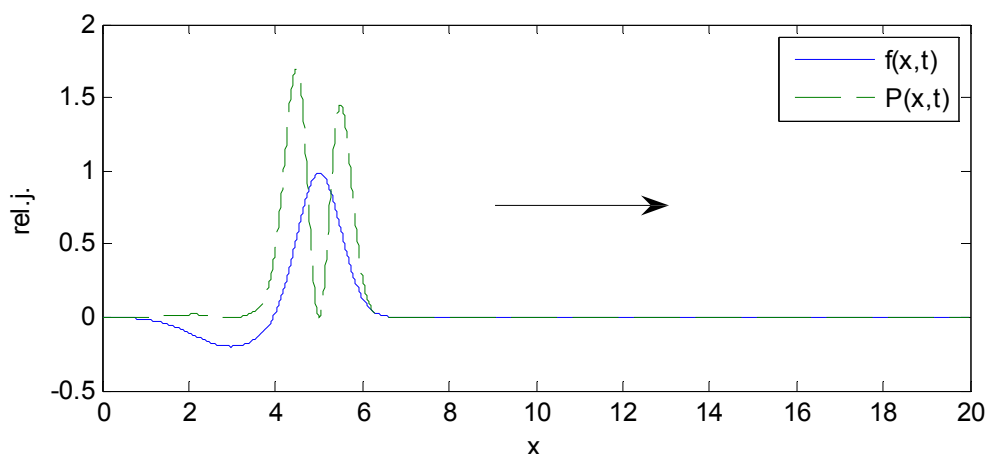
$$P(x,t) = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm \frac{T_0}{v} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \pm v T_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad (1.6.6)$$

Kde jsme využili vztah (1.5.5). Zcela analogické výsledky dostaneme pro podélné kmity. Jen jako dříve nahradíme veličinu  $T_0$  výrazem  $Ka$ . Využitím (1.5.5) ve vztahu (1.6.4) můžeme pro výkon předávaný ve směru pohybu vlny dostat

$$P(x, t) = \pm v w(x, t) \quad (1.6.7)$$

Znaménko + znamená, že přenášený výkon pro vlnu šířící se zleva doprava je kladný a naopak pro vlnu v opačném směru (-) je záporný.

V konkrétním případě postupné vlny, pulzu na obr.1.5.1, je průběh výkonu na obr.1.6.1.



Obr.1.6.1. Postup pulzu a přenášeného výkonu (hodnoty jsou v relativních jednotkách).

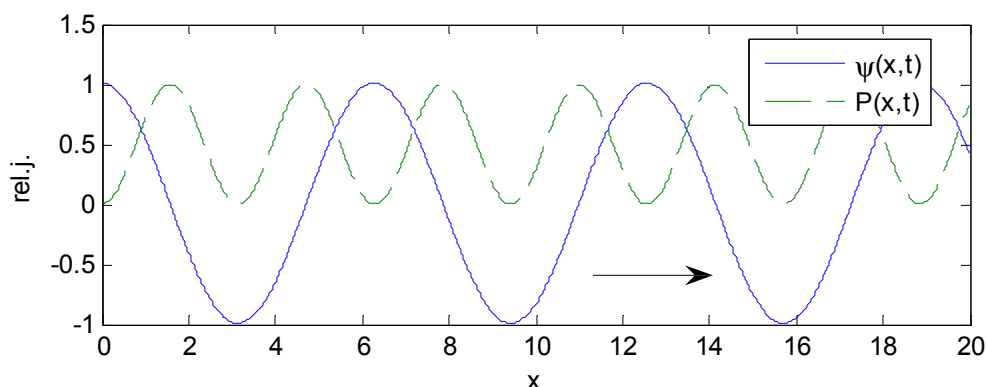
Pro případ harmonické vlny

$$\psi = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (1.6.8)$$

Je výkon podle (1.6.6)

$$P(x, t) = \omega k T_0 \psi_0^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (1.6.9)$$

viz obr. 1.6.2.



Obr.1.6.2. Postup harmonické vlny a přenášeného výkonu (hodnoty jsou v relativních jednotkách).

Pro stojaté vlnění platí

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) + \psi_0 \cos(\omega t + kx + \varphi) \quad (1.6.10)$$

A pro výkon

$$P(x, t) = P_1(x, t) + P_2(x, t) = \omega k T_0 \psi_0^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi) - \omega k T_0 \psi_0^2 \sin^2(\omega t + kx + \varphi) = 0 \quad (1.6.11)$$

Celkový přenesený výkon se skládá ze dvou stejných, které směřují, stejně jako postupné vlny, proti sobě a tedy se navzájem ruší.

## **1.7. Matematická poznámka**

Někdy je výhodné použít poněkud jiný tvar zápisu harmonických funkcí.

## 1. Vyjádření pomocí komplexních čísel

Vyjdeme ze známého tvaru komplexního čísla

$$z = a + ib = |z|(\cos(\Phi) + i \sin(\Phi)) \quad \text{kde} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{tg}(\Phi) = b/a \quad (1.7.1)$$

Pak harmonickou funkci (1.1.1) je možné psát ve tvaru

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = \text{Re} \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \quad (1.7.2)$$

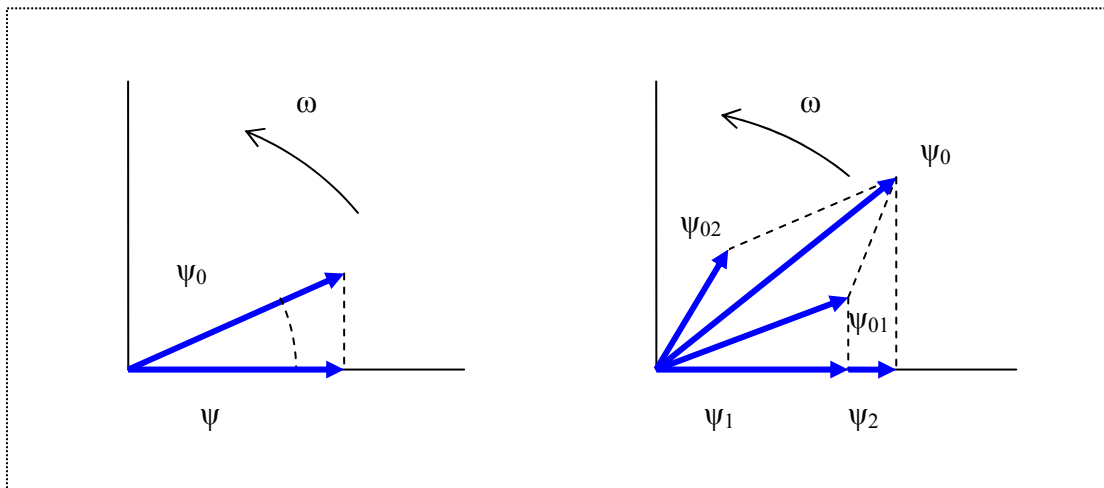
Běžně počítáme s výrazem

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \quad (1.7.3)$$

Což má řadu praktických výhod. V závěru výpočtu přejdeme vždy k reálné části výsledku.

## 2. Fázory

Pro názorné sečítání vln se používají někdy tzv. fázorové diagramy. Fázorem vlny ve tvaru (1.1.1) se rozumí vektor o velikosti amplitudy (pro  $x = \text{konst}$  (např.  $x=0$ )) svírající s osou souřadné soustavy úhel  $(\omega t + \varphi)$ . Vektor tedy rotuje s úhlovou rychlostí  $\omega$  a jeho průmět do osy je okamžitá výchylka, viz. obr.1.6.1. Pak vlny typu (1.3.2) jsou zobrazeny vektory, které trvale svírají úhel  $\Delta\varphi$ . Výsledná vlna je vektorový součet obou složek. Analogicky můžeme postupovat při sečítání vln v prostoru, kdy zvolíme  $t = \text{konst}$ .



Obr. 1.7.1. Fázor harmonické vlny a jejich sečítání.

## 1.8. Tlumená harmonická vlna

V reálném prostředí vždy dochází ke ztrátě energie vlivem např. tření a výsledkem je vlna u které klesá amplituda. Analogicky k pohybové rovnici netlumené vlny I(3.1.12) můžeme napsat pohybovou rovnici, kde k vratné síle přidáme sílu, která způsobuje ztráty. Stejně jako u tlumeného oscilátoru předpokládáme, že je úměrná rychlosti a koeficient útlumu označíme  $\Gamma$ . Pak výsledná pohybová rovnice, kterou můžeme považovat za vlnovou, má tvar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} + v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1.8.1)$$

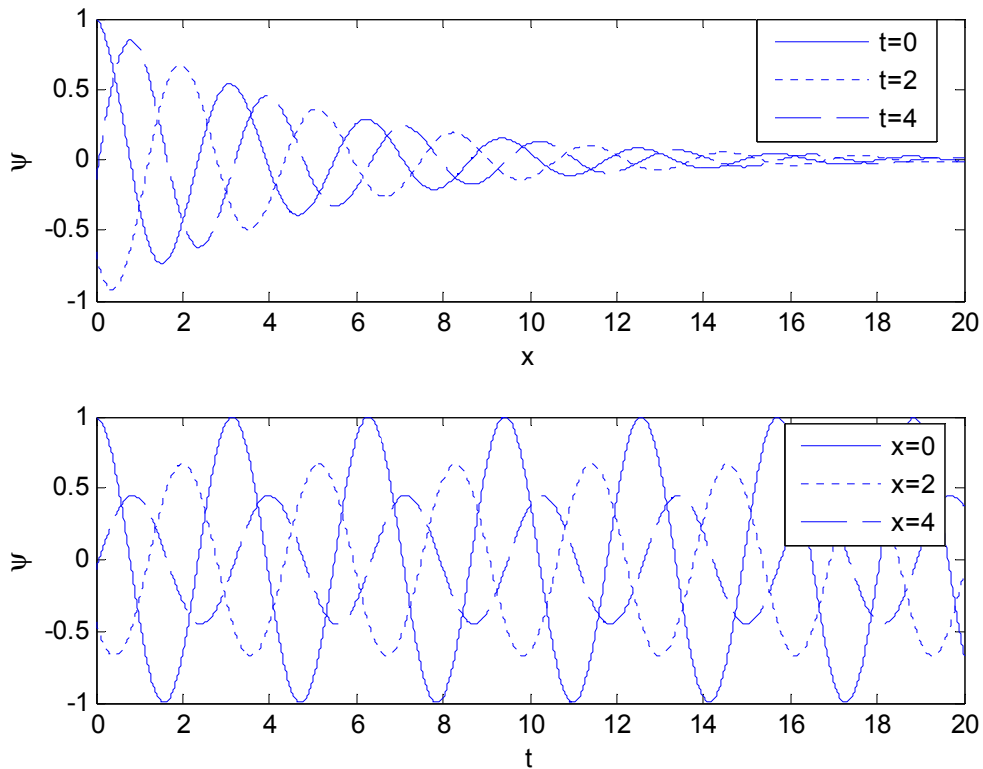
Předpokládáme řešení ve tvaru (1.7.3), ale budeme předpokládat, že  $k$  je komplexní číslo ve tvaru

$$k = k' - ik'' \quad (1.8.2)$$

Tedy po dosazení do (1.7.3) dostaneme

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \psi_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x + \varphi)} \quad (1.8.3)$$

Volba znaménka ve výrazu pro  $k$  je dána požadavkem, aby amplituda se vzdáleností klesala (opak je nerealistický). Jedná se tedy o harmonickou vlnu s exponenciálně klesající amplitudou, viz obr. 1.8.1.



Obr 1.8.1. Vlna (1.7.3) s hodnotami ( $\psi_0=1$ ,  $\omega=2s^{-1}$ ,  $k'=2m^{-1}$ ,  $k''=0.2m^{-1}$ ) v čase  $t=0,2,4$  a pro souřadnici  $x=0,2,4$ .

Je vhodné obrázek srovnat s netlumenou harmonickou vlnou (1.1.1).

Dosadíme-li (1.7.3) do (1.8.1) dostaneme

$$\omega^2 - i\Gamma\omega = v^2 k^2 \quad (1.8.4)$$

porovnáním reálných a imaginárních částí

$$\omega^2 = v^2 (k'^2 - k''^2) \quad \Gamma\omega = 2k'k''v^2 \quad (1.8.5)$$

odkud je možné získat vztahy mezi  $k'$ ,  $k''$  a  $\omega$ ,  $\Gamma$ .

Pro velmi slabý útlum ( $\Gamma \ll \omega$ ) upravíme (1.8.4)

$$\omega^2 (1 - i\Gamma/\omega) = v^2 k^2 \quad (1.8.6)$$

$$\omega(1 - i\Gamma/2\omega) \cong \pm v(k' - ik'') \quad (1.8.7)$$

porovnáním získáme

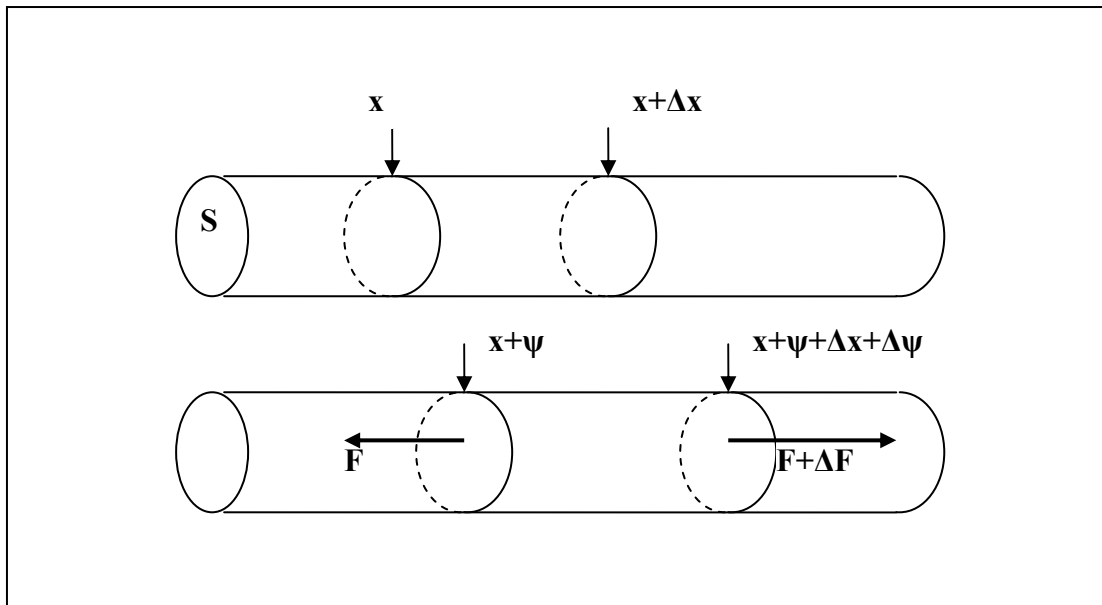
$$k' = \pm\omega/v \quad k'' = \pm\Gamma/2v \quad (1.8.8)$$

Tomu dobře odpovídá obr. 1.8.1. Jedná se prakticky o původní harmonickou vlnu s nezměněnou frekvencí, navíc slabě tlumenou.

Pro velmi silný útlum ( $\Gamma \gg \omega$ ), podobně jako pro tlumený oscilátor, se ztrácí vlnový charakter funkce  $\psi$  a výchylka rychle klesá k nulové hodnotě.

## 1.9. Podélné vlny

Dosud jsme vycházeli z představy příčných vln a to především příčných vln na struně. Analogicky k podélným kmitům je možné studovat podélné vlny, kdy směr šíření vlny a amplitudy jsou rovnoběžné.



Obr. 1.9.1. Část struny v klidu a v případě podélné deformace.

Předpokládáme strunu ve formě tenkého drátu. Uvažujeme element struny o délce  $\Delta x$ , který se při deformaci posune o  $\psi$  a deformuje o  $\Delta\psi$  ( $\Delta\psi \ll \Delta x$ ), průřez  $S$  předpokládáme neměnný. Zrychlení elementu způsobí síla  $\Delta F$ . Podle Hookova zákona, pro malé deformace, platí

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta\psi}{\Delta x} \cong E \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1.9.1)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $\Delta\psi/\Delta x$  relativní deformace elementu. Pak

$$\Delta F = SE \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \Delta x \quad (1.9.2)$$

pak podle 2. Newtonova zákona a pro hmotnost elementu  $\Delta m = S\Delta x\rho_0$

$$S\Delta x\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \Delta x \quad (1.9.3)$$

Po úpravě dostaneme vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (1.9.4)$$

kde pro rychlost podélných vln  $v$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (1.9.5)$$

Číselné odhady dávají dobrou shodu se skutečností. Např. pro ocel je  $\rho_0 = 800 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$  odtud  $v$  je asi  $5000 \text{ m s}^{-1}$ . Příčné vlny mají prakticky vždy hodnoty nižší. Podobně lze odvodit vlnovou rovnici a rychlost šíření vln pro akustické vlny – viz část III.

### 1.10. Vlny v disperzním prostředí

Reálné prostředí, zejména pevné látky případně kapaliny, přináší při studiu šíření vln řadu komplikací. To je dáno složitým vztahem mezi deformací a napětím ve formě tenzoru. Dosud jsme předpokládali vesměs platnost Hookova zákona, tedy jednoduchý skalární lineární vztah. Rovněž jsme dostali jednoduchý lineární vztah mezi prostorovou frekvencí  $k$  a časovou frekvencí  $\omega$ . To je tzv. nedisperzní chování vln. Důležitým důsledkem je, že všechny harmonické vlny se šíří stejnou rychlostí a tedy i složitější vlny, jako např. pulzy nemění svůj tvar.

V případě struny je detailní výpočet poměrně složitý, spokojíme se s odhadem, že jedna z významných složek vratné síly souvisí s křivostí deformované struny a nutí ji zaujmout původní tvar. Křivost je úměrná  $\partial^2 \psi / \partial x^2$  a příslušná složka

$$\Delta f \approx df \approx \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \quad (1.10.1)$$

pak pohybová, respektive vlnová rovnice bude mít tvar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \alpha \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right) \right] \quad (1.10.2)$$

kde  $\alpha$  je příslušná materiálová konstanta. Předpokládáme řešení ve tvaru harmonické vlny

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (1.10.3)$$

Po dosazení získáme disperzní vztah

$$\omega = \pm vk(1 + \alpha k^2)^{1/2} \quad (1.10.4)$$

Pro fázovou rychlost  $v_f$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \pm v(1 + \alpha k^2)^{1/2} \quad (1.10.5)$$

kteří závisí na prostorové frekvenci  $k$ , respektive vlnové délce, nelineárně. Jedním z důsledků je deformace vlnového pulzu při pohybu na struně.

Ve slabě disperzním prostředí předpokládáme  $\alpha k^2 \ll 1$ , rovněž zvolíme směr šíření (tedy znaménko +), pak

$$\omega \cong vk \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha k^2 \right) = vk + ck^3 \quad (1.10.6)$$

V tomto případě pro fázovou rychlost dostaneme

$$v_f = \frac{\omega}{k} = v \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha k^2 \right) = v + ck^2 \quad (1.10.7)$$

a pro grupovou rychlost

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = v + 3ck^2 \quad (1.10.8)$$

Na rozdíl od bezdisperzního prostředí jsou obě rychlosti různé a dojde k postupnému rozplývání pulzu. Obecně  $\alpha$ , respektive  $c$ , může nabývat různé znaménko a tím se mění i vzájemná velikost obou rychlostí. V případě  $v_f > v_g$  se někdy hovoří o normální disperzi a v opačném případě  $v_f < v_g$  o anomální disperzi. Tyto pojmy jsou spojeny spíše s optikou.

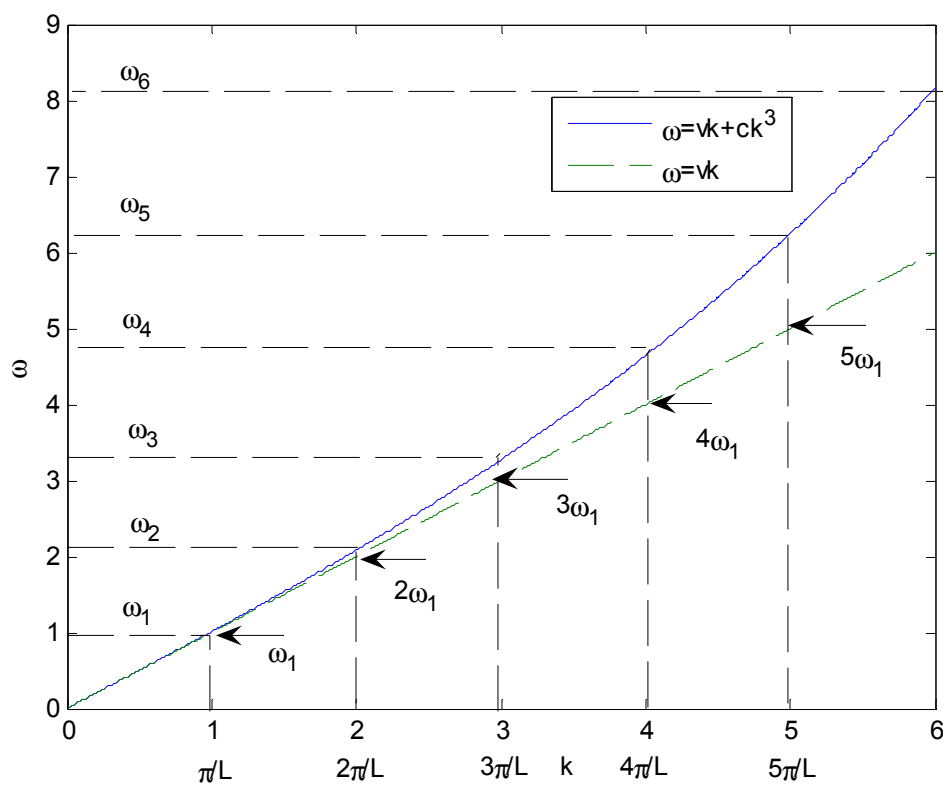
V případě kovových strun je  $\alpha$  kladné a tedy i  $v_f < v_g$ . Důsledkem je posuv „harmonických“ frekvencí  $k$  vyšším frekvencím proti bezdisperznímu případu. Pro disperzní vztah

$$\omega_n = vk_n + ck_n^3 \quad (1.10.9)$$

a pro strunu uchycenou pevně v bodech  $x=0$  a  $x=L$  platí stejné okrajové podmínky jako dříve ( $k_n = n\pi/L$ ), pak

$$v_n = n \frac{v}{2L} + n^3 \frac{c\pi^2}{2L^3} \quad (1.10.10)$$

Struna již nevydává harmonické frekvence, tj. násobek základní, ale poněkud frekvence vyšší, viz obr. 1.10.1. Poznamenejme, že současně amplituda vyšších harmonických se poměrně rychle zmenšuje a tedy rozdíly v barvě tónů nemusí být příliš markantní.



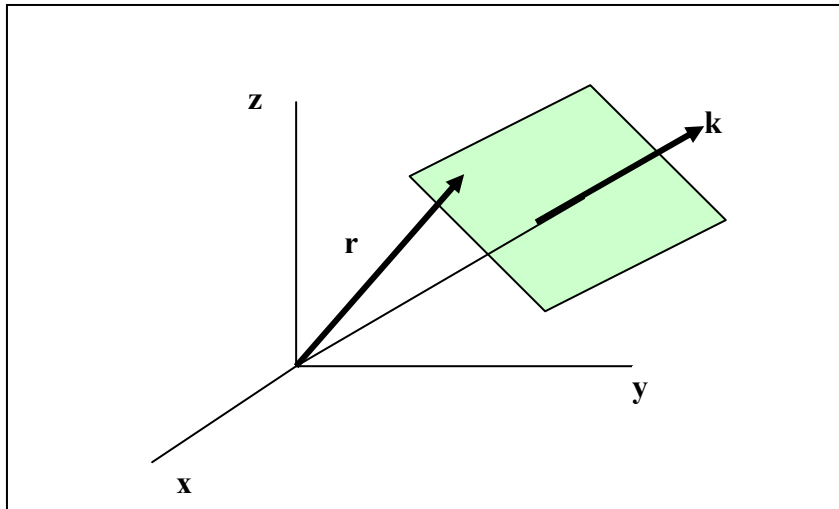
Obr. 1.10.1. Závislost časové frekvence  $\omega$  na prostorové frekvenci  $k$  pro „nedisperzní“ strunu a pro „disperzní“ strunu s vyznačenými harmonickými a posunutými „harmonickými“ frekvencemi.

V části I.Kmity jsme řešili chování struny I.3.1. a I.3.2., jedno a dvoučásticového řetězce I.3.4., případně dutiny I.4.1. z hlediska kmitů nebo stojatého vlnění. Použili jsme prakticky vždy okrajové podmínky ve formě pevně uchyceného prostředí na začátku a konci. Přírodním důsledkem byla výběrová pravidla pro prostorovou frekvenci  $k$  (např.  $k_n L = n\pi$ ) a přes disperzní vztah rovněž diskretní hodnoty pro časové frekvence  $\omega_n$ . Z hlediska šíření vln v takovém prostředí je možné postupovat podobně, jen neuplatníme okrajové podmínky. Dostaneme stejné disperzní vztahy, tentokrát platné pro libovolné  $k$ .

## 2. Harmonické vlny ve 3dm

### 2.1. Rovinná vlna

Rovinnou vlnou budeme rozumět harmonickou vlnu jejíž stav je stejný na rovině.



Obr.2.1.1. Rovinná vlna.

Budeme ji psát ve tvaru

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)} = \psi_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi)} \quad (2.1.1)$$

Kde  $\mathbf{r}(x, y, z)$  je polohový vektor,  $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$  je vlnový vektor ve směru šíření vlny, platí

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi/\lambda \quad (2.1.2)$$

Z obr.2.1.1. je zřejmé, že v daném čase pro každý vektor  $\mathbf{r}$  na příslušné rovině platí

$$(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \text{konst} \quad (2.1.3)$$

## 2.2. Kulová vlna

Touto vlnou rozumíme harmonickou vlnu, která má stejný stav vlnění na kulové ploše, viz obr. . Taková vlna má tvar

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{\Psi_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \varphi)} \quad (2.2.1)$$

Amplituda ubývá nepřímou úměrou od středu šíření vlny, vektorové vyjádření  $\mathbf{k}$  a  $\mathbf{r}$  je zbytečné, protože ve všech směrech na kouli je stav stejný. Pro fázi na kouli platí

$$(\omega t - kr + \varphi) = K = \text{konst} \quad (2.2.2)$$

Po umocnění a úpravě dostaneme

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \frac{(\omega t + \varphi - K)^2}{k^2} \quad (2.2.3)$$

Což je rovnice koule se středem  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Tyto dvě vlny, rovinná a kulová, jsou nejjednodušší vlny v 3dm a ve většině případů s nimi vystačíme.

## 2.3. Vlnová rovnice

Uvedeme jen jednoduché zobecnění 1dm vlnové rovnice (1.5.4) ve tvaru

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.3.1)$$

Kde  $\psi(x, y, z, t)$ .

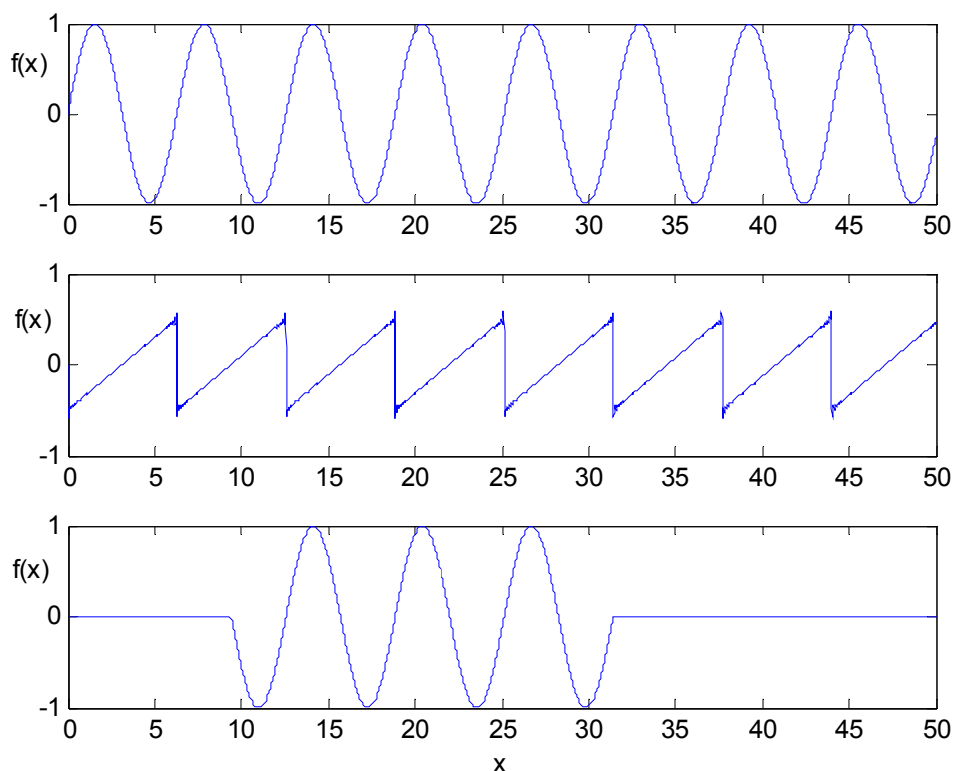


### 3. Obecná vlna

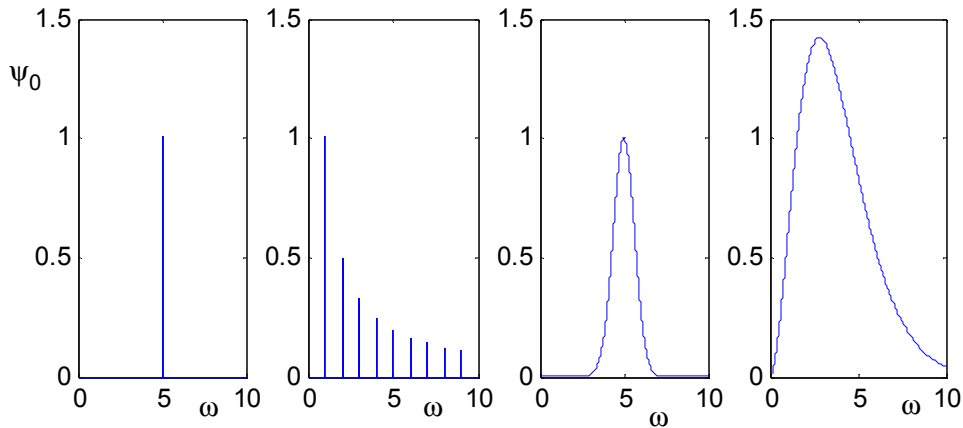
#### 3.1. Příklady složitějších vln

Příkladem harmonické vlny je (1.1.1), amplituda je konstanta, obě proměnné  $x$  a  $t$  jsou v intervalu  $(-\infty, +\infty)$ . Příklad neharmonické periodické vlny je na obr.3.1.1., kde amplituda se mění ve formě pilových kmitů. Omezíme-li harmonickou vlnu v čase nebo prostoru, viz. rovněž obr.3.1.1. dostaneme rovněž neharmonickou vlnu. Takových příkladů je bezpočet. Velkou výhodou pro zacházení s těmito vlnami je možnost pomocí Fourierovy analýzy je považovat za nekonečné součty harmonických vln. Pak díky principu superpozice zůstávají předchozí závěry a postupy platné i pro tyto typy obecnějších vln.

Z praktického hlediska, ale i vzhledem k užití Fourierovy analýzy, je vhodné mimo grafické vyjádření výchylky na čase a souřadnici, rovněž uvažovat spektrální složení vlny, respektive závislost amplitudy  $\psi_0$  na frekvenci. Na obr.3.1.2. je schematicky znázorněna monochromatická vlna (amplituda závisí pouze na jedné frekvenci), diskrétní spektrum (závislost na diskrétních hodnotách frekvence, např. struna), spektrální čára (spojitá závislost amplitudy na frekvenci v úzkém intervalu, např. spektrální čára výboje v plynu), spojité spektrum (spojitá závislost na frekvencích v širokém intervalu hodnot, např. záření absolutně černého tělesa).



Obr. 3.1.1. Příklady harmonické funkce, neharmonické (pilové kmity), neharmonické – omezené v prostoru.



Obr. 3.1.2. Spektrální složení: monochromatická vlna, diskrétní čárové spektrum (struna), spojité spektrum (Gaussova křivka- spektrální čára), spojité spektrum (záření absolutně černého tělesa ).

### 3.2. Periodická funkce

V případě periodických funkcí typu

$$f(s) = f(s + b) \quad (3.2.1)$$

kde  $s$ , je proměnná,  $b$  perioda a za předpokladu, že funkce  $f$  je kvadraticky integrovatelná, tj. že integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2 ds \quad (3.2.2)$$

existuje, pak tuto funkci je možné vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$f(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\Omega s} \quad (3.2.3)$$

kde  $\Omega$  je frekvence a  $m$  je celé číslo

$$\Omega = \frac{2\pi}{b} \quad (3.2.4)$$

$a_m$  je komplexní amplituda

$$a_m = \frac{1}{b} \int_0^b f(s) e^{-im\Omega s} ds \quad (3.2.5)$$

Pro vlny je běžné označení sledujeme-li časovou závislost:

$$s = t \quad b = T \quad \Omega = \omega = 2\pi/T \quad (3.2.6)$$

V případě prostorové závislosti:

$$s = x \quad b = \lambda \quad \Omega = k = 2\pi/\lambda \quad (3.2.7)$$

Jako příklad uveďme zmíněné pilové kmity v prostorových souřadnicích, viz obr.3.2.1.

Zvolme  $b = 2\pi$ , pak  $k=1$  a v každém intervalu platí  $y=x$ , pak

$$f(x) = \sum a_m e^{imx} = \sum a_m \cos(mx) + ia_m \sin(mx) \quad (3.2.8)$$

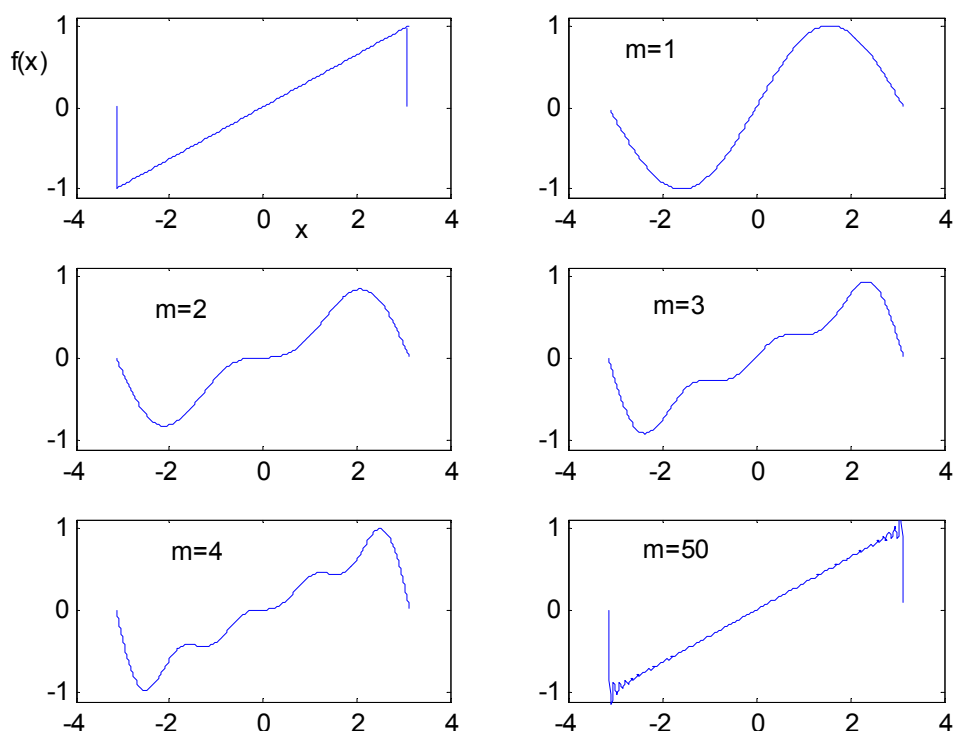
Kde

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x e^{-imx} dx = -\frac{i}{m} (-1)^{m+1} \quad (3.2.9)$$

Pak

$$f(x) = 2 \left[ \frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} \dots \right] \quad (3.2.10)$$

Na obr.3.2.1. je patrné jak s rostoucím m, je původní tvar lépe vystižen.



Obr. 3.2.1. Postupná náhrada pilového kmitu členy Fourierovy řady (3.2.10).

### 3.3. Neperiodické funkce

V tomto případě pro funkci  $f(s)$ , která je opět kvadraticky integrovatelná, platí Fourierova transformace ve tvaru

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-ius} du \quad (3.3.1)$$

Kde pro amplitudu, která je spojitou funkcí proměnné  $u$  platí

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{+ius} ds \quad (3.3.2)$$

Kde pro vlny je běžnější označení v případě časové závislosti:

$$s = t \quad u = \omega \quad (3.3.3)$$

A pro prostorovou závislost

$$s = x \quad u = k \quad (3.3.4)$$

Uvedeme jednoduché, ale časté příklady (zvolíme prostorovou závislost):

#### 1. Pravoúhlý puls

Ve shodě s obr.3.3.1. zvolíme funkci ve tvaru pravoúhlého pulsu s amplitudou  $A$ , šířkou  $h$  symetricky položeného kolem počátku. Pak

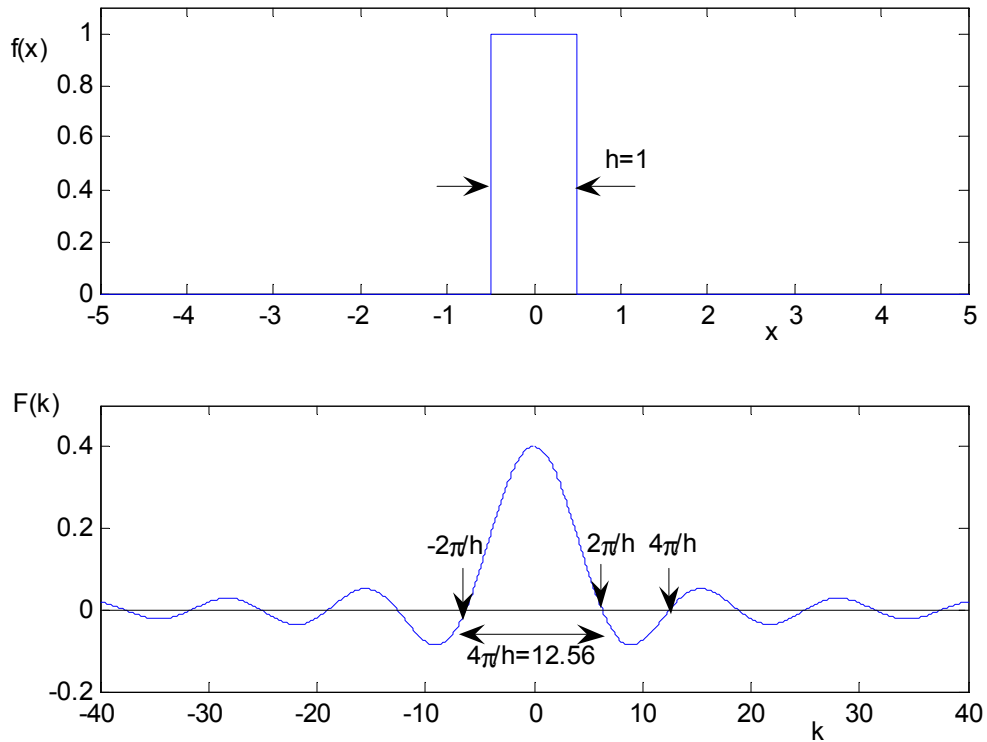
$$f(x) = A \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right) \quad \text{a } f(x) = 0 \quad \text{pro ostatní } x. \quad (3.3.4)$$

Pak

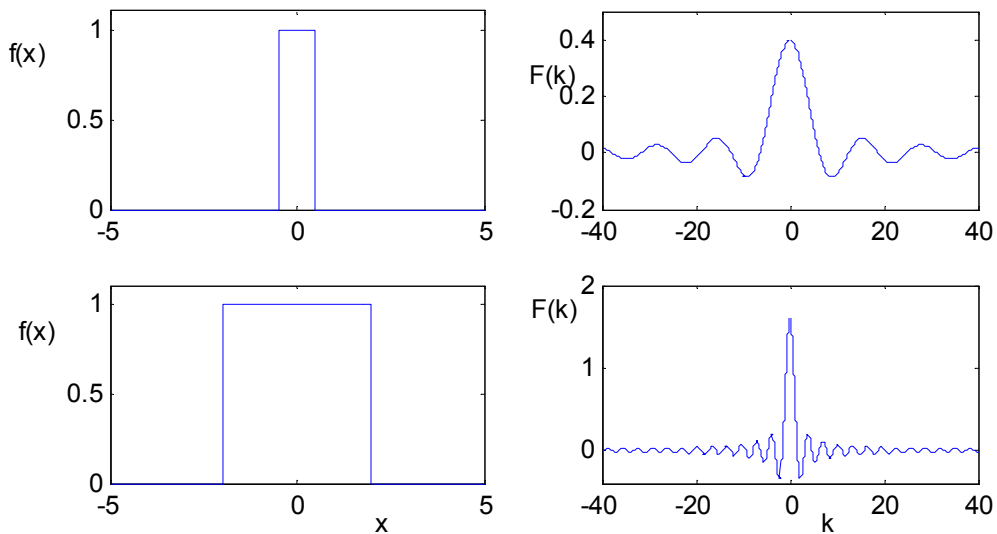
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{-ikx} dk \quad (3.3.5)$$

$$F(k) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h/2}^{+h/2} e^{+ikx} dx = \frac{Ah}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right) \quad (3.3.6)$$

Kde využíváme označení  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . Funkce  $f$  a příslušné  $F$  jsou na obr.3.3.1., důležitá je souvislost šířek obou křivek. Šířka funkce  $F$  je nepřímo úměrná  $h$ , tedy šířce funkce  $f$ , viz rovněž obr. 3.3.2.



Obr. 3.3.1. Fourierova transformace pravoúhlého pulzu.



Obr. 3.3.2. Srovnání výsledku Fourierovy transformace pro různě široké pulzy.

## 2. Diracova $\delta$ funkce.

To je předcházející funkce  $f$  pro  $h \rightarrow 0$ , tedy nekonečně úzký puls. Pak platí (zvolíme  $Ah/\sqrt{2\pi} = 1$ )

$$\lim F = \lim_{h \rightarrow 0} \sin c(kh/2) = 1 \quad (3.3.7)$$

A tedy funkce  $F$  nezávisí na  $k$ , je to konstanta.

## 3. Gaussova funkce

Zvolíme obvyklý tvar Gaussovy funkce

$$f(x) = \exp(-x^2 / 2\sigma^2) \quad (3.3.8)$$

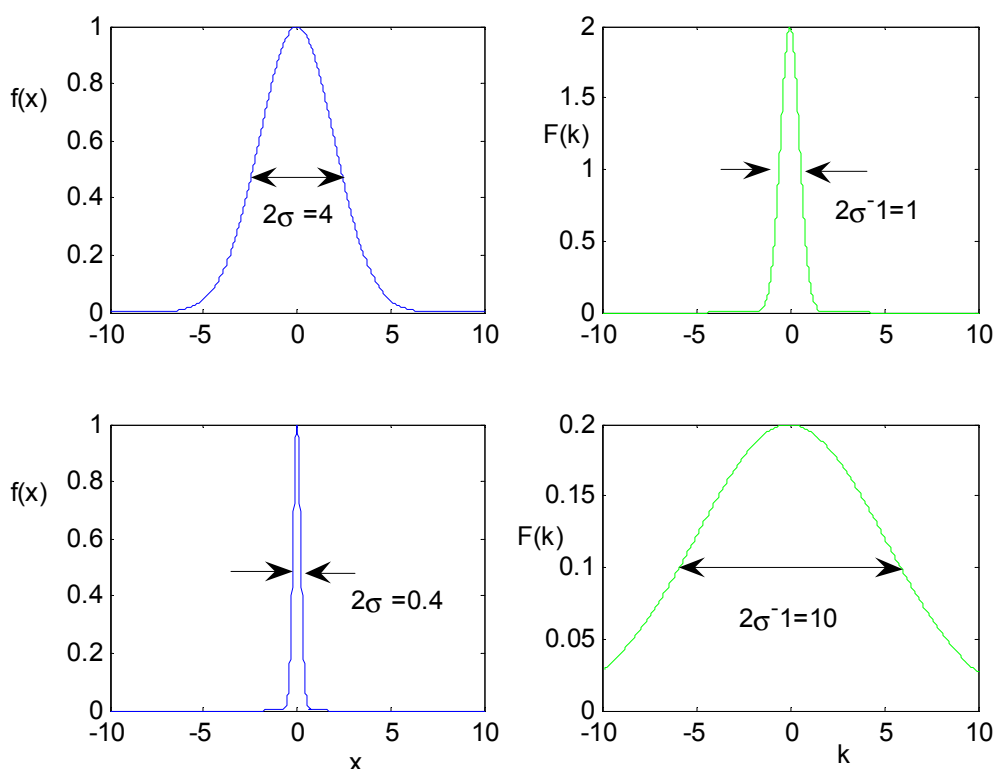
Pak

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 / 2\sigma^2) \exp(ikx) dx \quad (3.3.9)$$

Po výpočtu dostaneme

$$F(k) = \sigma \exp(-k^2 \sigma^2 / 2) \quad (3.3.10)$$

Obě funkce jsou na obr.3.3.3., opět je třeba si všimnout, že šířka funkce  $f$  je dána  $2\sigma$  a šířka  $F$  je určena  $2\sigma^{-1}$ .



Obr. 3.3.3. Fourierova transformace pulzu ve tvaru Gaussovy křivky.

## 3.4. Vlnové klubko v čase a prostoru

Velmi častý a realistický případ je vlnové klubko, které je současně omezeno v čase i prostoru. Vlnovou funkci musíme brát jako funkci dvou proměnných. Předpokládáme, viz obr.3.4.1., harmonickou vlnu omezenou na časový interval  $\tau$  a prostorový interval  $L$

( $L = v\tau$ , kde  $v$  je rychlost šíření klubka). Pro jednoduchost jsme zvolili harmonickou vlnu s konstantní amplitudou, ale jsou možné složitější případy.

Platí

$$\psi(x, t) = A \exp(-i(\omega_0 t - k_0 x)) \quad A = 1 \quad \text{pro } t \in (-\tau/2, \tau/2) \quad x \in (-L/2, L/2) \quad (3.4.1)$$

Pro ostatní  $t$  a  $x$  je  $A=0$ .

Pak pro Fourierovu, respektive Laplaceovu, transformaci obecně platí

$$\psi(x, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk F(\omega, k) \exp(-i(\omega t - kx)) \quad (3.4.2)$$

$$F(\omega, k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dt \psi(x, t) \exp(+i(\omega t - kx)) \quad (3.4.3)$$

Po dosazení

$$F(\omega, k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-L/2}^{+L/2} dx \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt \exp(-i(\omega_0 t - k_0 x)) \exp(+i(\omega t - kx)) \quad (3.4.4)$$

Nebo

$$F(\omega, k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-L/2}^{+L/2} dx \exp(-i(k - k_0)x) \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt \exp(+i(\omega - \omega_0)t) \quad (3.4.5)$$

Výsledek dostaneme ve tvaru

$$F(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} L \operatorname{sinc} \frac{(k - k_0)L}{2} \tau \operatorname{sinc} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \quad (3.4.6)$$

To je Fourierův (Laplaceův) obraz zvoleného pulzu, respektive to je funkce dvou proměnných dávající předpis pro amplitudy spektra harmonických vln, kterými lze pulz nahradit. Grafické zobrazení je na obr.3.4.1., jsou to v podstatě funkce  $\operatorname{sinc}(x)$  středované v bodech  $\omega_0$  a  $k_0$ . Opět platí nepřímá úměrnost mezi „šířkami“ křivek. Podstatný příspěvek k příspěvku funkce  $F$  je z intervalu frekvencí

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{\tau} \quad (3.4.7)$$

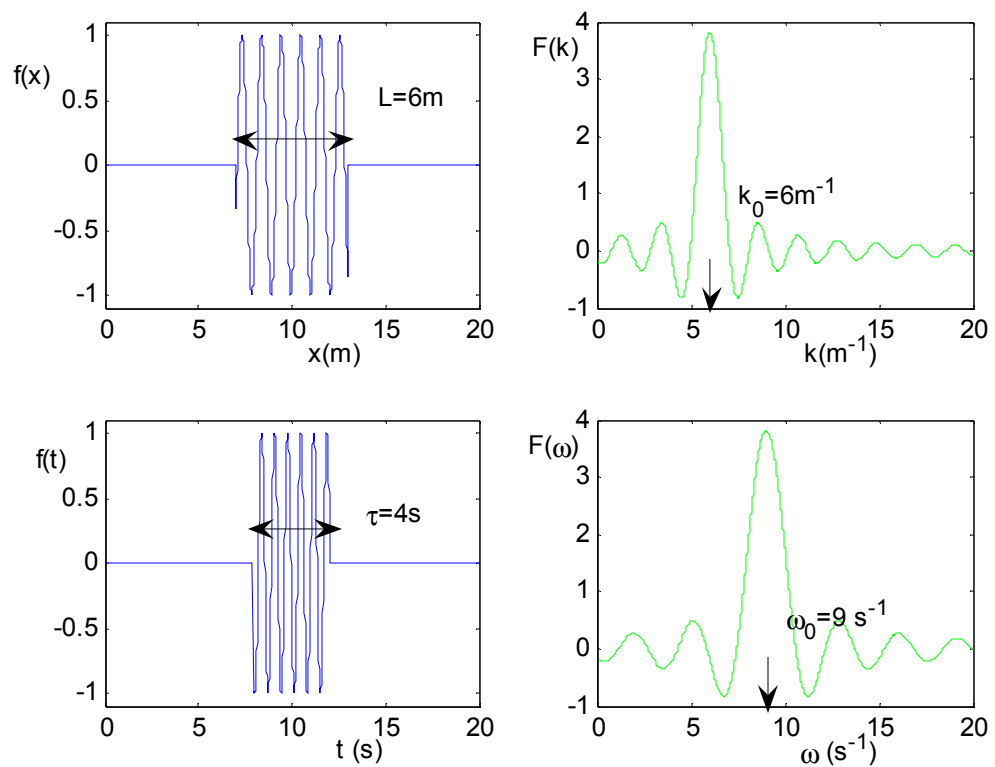
a z intervalu vlnočtů

$$\Delta k = \frac{4\pi}{L} \quad (3.4.8)$$

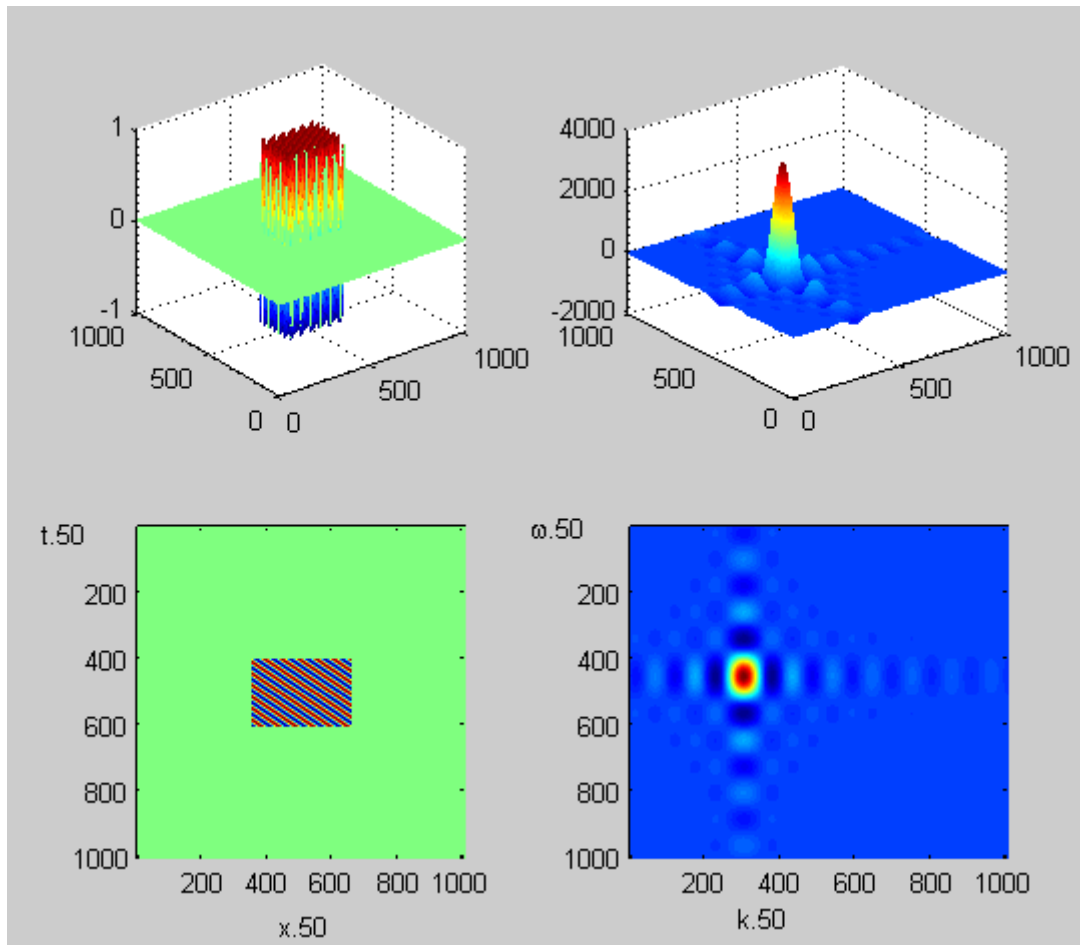
Pro délku vlnového klubka  $L$  platí

$$L = \frac{4\pi}{\Delta k} = \frac{2\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (3.4.9)$$

Což je stejný výraz jako pro koherenční délku, kterou zavedeme později. Zobrazení téhož vlnového klubka v časoprostoru je na obr. 3.4.2.



Obr. 3.4.1. Fourieriv (Laplaceiv) obraz vlnového klubka v prostoru a čase.



Obr. 3.4.2. Zobrazení vlnového klubka v čase a prostoru (viz obr. 3.4.1) ve 3d.