Příklady z Fyziky plazmatu

5 Rovnovážný stav

Pro výpočty různých integrálů je užitečné si zapamatovat následující relace:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad x > 0 \ ,$$

$$\Gamma(x+1) = x! \quad \text{pro celočíselné}\, x, \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \ .$$

5.1 Příklad (3b.)

Určete konstantní koeficienty C, a_2 a $\mathbf{v}_0$ v Maxwellově rozdělovací funkci

$$f = C \exp[-\frac{1}{2} m a_2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2] \ . \tag{1}$$

Tyto konstanty mohou být vyjádřeny pomocí pozorovatelných fyzikálních vlastností systému, jako je hustota částic n, střední rychlost $\mathbf{u}$ a kinetická teplota T.
(a) Vyjděte z definice hustoty částic

$$n = \int_v f \mathrm{d}^3 v \ ,$$

a ukažte, že

$$n = C \left(\frac{2\pi}{m a_2} \right)^{3/2} \ . \tag{2}$$

(b) Vyjděte z definice střední rychlosti částic

$$\mathbf{u} = <\mathbf{v}> = \frac{1}{n} \int_v f \mathbf{v} \mathrm{d}^3 v \ ,$$

a ukažte, že

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \ . \tag{3}$$

(Rychlost částice $\mathbf{v}$ se dá vyjádřit jako součet náhodné (tepelné) rychlosti $\mathbf{V}$ a střední rychlosti $\mathbf{u}$, tedy $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$)
(c) Vyjděte z termodynamické definice kinetické teploty T

$$\frac{3}{2} n k T = \frac{1}{2} n m < V^2 > = \frac{1}{2} m \int_v f V^2 \mathrm{d}^3 V \ ,$$

a ukažte, že

$$kT = \left(\frac{C}{n a_2} \right) \left(\frac{2\pi}{m a_2} \right)^{3/2} \ . \tag{4}$$

Vyjádřete z rovnic (2) a (4) konstanty C a a_2. Ty dosaďte do vztahu (1) a dostaneme Maxwellovo rozdělení náhodných rychlostí:

$$f(\mathbf{V}) = n \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m \mathbf{V}^2}{2kT} \right) \ . \tag{5}$$

5.2 Příklad (1b.)

Pro Maxwellovo rozdělení rychlostí určete střední velikost rychlosti částic.

5.3 Příklad (1b.)

Pro Maxwellovo rozdělení rychlostí určete střední kvadratickou velikost rychlosti částic.

5.4 Příklad (1b.)

Pro Maxwellovo rozdělení rychlostí určete nejpravděpodobnější velikost rychlosti částic.

5.5 Příklad (1b.)

Rozdělovací funkce (tepelných) kinetických energií E pro plyn popsaný Maxwellovou rozdělovací funkcí je dána vztahem:

$$G(E) = \frac{2nE^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}(kT)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) .$$

Spočtěte nejpravděpodobnější energii a ukažte, že velikost rychlosti částic, které mají tuto energii, je rovna $(kT/m)^{1/2}$.

5.6 Příklad (1b.)

Máme plazma s jedním typem iontů v termodynamické rovnováze s neutrálním plynem. Určete jeho teplotu, pokud z experimentu známe hustotu iontů (rovna hustotě elektronů) a neutrálů. Ionty s hustotou $n_\mathrm{i} = 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$ jsou v rovnováze s neutrály ve stavu s ionizačním potenciálem 2 eV, jejichž populace je $10^{15}\,\mathrm{m}^{-3}$.