Kapitola 10

Některé základní jevy v plazmatu

10.1 Elektronové plazmové oscilace

Pro studium charakteristických plazmových oscilací elektronů použijeme model studeného plazmatu, tj. nebudeme uvažovat tepelný pohyb částic a gradienty tlaku. Dále zanedbáme pohyb iontů a uvažujeme velmi malou perturbaci v koncetrace elektronů:

$$n_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t) = n_0 + n'_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t), \tag{10.1}$$

kde n_0 je konstantní hustota elektronů a $|n'_{\mathrm{e}}| \ll n_0$. Podobně uvažujeme, že vzniklé el. pole $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ a průměrná rychlost elektronů $\mathbf{u}_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t)$ jsou perturbace prvního řádu, takže můžeme použít linearizované rovnice - linearizovanou rovnici kontinuity a rovnici hybnosti

$$\frac{\partial n'_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{10.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{10.3}$$

V rovnice hybnosti jsme předpokládali, že změna momentu hybnosti elektronů v důsledku srážek je zanedbatelná. Za předpokladu jedenkrát ionizovaných iontů je hustota náboje

$$\rho(\mathbf{r},t) = -e\left[n_0 + n'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t)\right] + en_0 = -en'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t), \tag{10.4}$$

kde jsme předp. konstantní a homogenní hustotu iontů rovnou n_0. Proto

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0} = -\frac{e}{\epsilon_0} n'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t) \tag{10.5}$$

Rovnice (10.2),(10.3) a (10.5) tvoří kompletní sadu, kterou je třeba vyřešit pro neznámé $n'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{u}_\mathrm{e}(\mathbf{r},t)$ a $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Uděláme divergenci (10.3), abych ji mohli dosadit do (10.2)

$$\frac{\partial^2 n'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \frac{en_0}{m_\mathrm{e}} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathrm{r},t) = 0 \tag{10.6}$$

Kombinujeme (10.5) a (10.6), abychom vyloučili $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}$

$$\frac{\partial^2 n'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} + \omega_\mathrm{pe}^2 n'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{10.7}$$

kde

$$\omega_\mathrm{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\epsilon_0}\right)^{1/2} \tag{10.8}$$

se nazývá elektronová plazmová frekvence. Rovnice (10.7) ukazuje, že $n'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t)$ se mění harmonicky v čase s plazmovou frekvencí

$$n'_\mathrm{e}(\mathbf{r},t) = n'_\mathrm{e}(\mathbf{r})\, \exp(-i\omega_\mathrm{pe} t) \tag{10.9}$$

Všechny perturbace prvního řádu se mění harmonicky v čase s plazmovou frekvencí ω_{pe}. Abychom to dokázali, je vhodné začít s předpokladem, že se tyto veličiny mění harmonicky v čase jako $\exp(-i\omega t)$. Rovnice (10.2) a (10.3) jsou pak

$$n'_{\mathrm{e}} = -\frac{i}{\omega} n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{e}} \tag{10.10}$$

$$\mathbf{u}_{\mathrm{e}} = -\frac{ie}{\omega m_{\mathrm{e}}} \mathbf{E}, \tag{10.11}$$

což můžeme zkombinovat jako

$$n'_{\mathrm{e}} = -\frac{n_0 e}{\omega^2 m_{\mathrm{e}}} \nabla \cdot \mathbf{E}. \tag{10.12}$$

Nahrazením tohoto výrazu pro n'_{e} do (10.5) dostáváme

$$\left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{10.13}$$

Netriviální řešení této rovnice vyžaduje $\omega = \omega_{\mathrm{pe}}$. Perturbace navíc nemění fázi v prostoru, takže se nešíří žádná vlna a oscilace jsou stacionární a podélné (rychlost ve stejném směru jako pole).

Elektronové plazmové oscilace mají také elektrostatický charakter. Uvažujme Maxwellovy rovnice rotace

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \tag{10.14}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} - i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}\right) \tag{10.15}$$

Hustota el. proudu je

$$\mathbf{J} = -e n_0 \mathbf{u}_{\mathrm{e}} = \frac{i n_0 e^2}{\omega m_{\mathrm{e}}} \mathbf{E} \tag{10.16}$$

kde jsme použili (10.11) pro $\mathbf{u}_\mathrm{e}$. Proto

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}\mathbf{E} \tag{10.17}$$

kde definujeme relativní permitivitu

$$\epsilon_\mathrm{r} = 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2} \tag{10.18}$$

V případě el. plazmových oscilací $\omega = \omega_\mathrm{pe}$, takže $\epsilon_\mathrm{r} = 0$ a (10.17) se redukuje na

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \tag{10.19}$$

Protože rotace gradientu je rovna nule, můžeme psát

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \tag{10.20}$$

kde ψ je magnet. skalární potenciál. Dosazením (10.20) do (**??**) a divergencí obou stran dostáváme Lablaceovou rovnici

$$\nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla^2\psi = 0 \tag{10.21}$$

Jediné řešení této rovnice, které není singulární a konečné v nekonečnu je $\psi =$ konst., takže $\mathbf{B} = 0$.

Elektronové plazmové (Langmuirovy) oscilace jsou tedy stacionární, podélné a elektrostatické. Pokud by se uvažovala existence gradientů tlaku a sada rovnic doplnila adiabatickou rovnicí energie, staly by se tyto oscilace šířícími se vlnami (vlny prostorového náboje nebo také Langmuirovy vlny).

10.2 Problém Debyeovského stínění

Uvažujme vliv el. pole přidané nabité částice. Testovací částice nechť má kladný náboj $+Q$. Zvolíme sférické souřadnice. Zajímá nás el. potenciál $\phi(\mathbf{r})$. Blízko částice bude $n_\mathrm{e}(\mathbf{r})$ a $n_\mathrm{i}(\mathbf{r})$ mírně odlišné, zatímco ve velkých vzdálenostech elstat. potenciál mizí $n_{\mathrm{e}}(\infty) = n_{\mathrm{i}}(\infty) = n_0$. Protože jde o ustálený stav a konzervativní pole

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \tag{10.22}$$

a platí

$$n_{\mathrm{e}}(\mathbf{r}) = n_0 \exp\left[\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right] \tag{10.23}$$

$$n_{\mathrm{i}}(\mathbf{r}) = n_0 \exp\left[-\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right] \tag{10.24}$$

kde předpokládáme stejnou elektronovou i iontovou teplotu T.

Celková hustota náboje $\rho(\mathbf{r})$ včetně testovacího náboje Q

$$\rho(\mathbf{r}) = -e\left[n_{\mathrm{e}}(\mathbf{r}) - n_{\mathrm{i}}(\mathbf{r})\right] + Q\,\delta(\mathbf{r}) \tag{10.25}$$

kde $\delta(\mathbf{r})$ je Diracova delta funkce. Použitím (10.23) a (10.24)

$$\rho(\mathbf{r}) = -en_0\left\{\exp\left[\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right] - \exp\left[-\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right]\right\} + Q\,\delta(\mathbf{r}) \tag{10.26}$$

Substitucí (10.22) a (10.26) do následující Maxwell. rce

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \tag{10.27}$$

dává

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) - \frac{en_0}{\epsilon_0}\left\{\exp\left[\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right] - \exp\left[-\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right]\right\} = -\frac{Q}{\epsilon_0}\,\delta(\mathbf{r}) \tag{10.28}$$

která umožní vyjádřit elstat. potenciál $\phi(\mathbf{r})$.

Abychom mohli postupovat analyticky, předpokládáme, že rušivý náboj je slabý, takže potenciální energie je mnohem menší než střední tepelná energie

$$e\phi(\mathbf{r}) \ll kT \tag{10.29}$$

Za těchto předpokladů

$$\exp\left[\pm\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right] \simeq 1 \pm \frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT} \tag{10.30}$$

a tedy

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) - \frac{2}{\lambda_\mathrm{D}^2}\phi(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0}\,\delta(\mathbf{r}) \tag{10.31}$$

kde λ_D je Debyeova délka

$$\lambda_\mathrm{D} = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{n_0 e^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega_\mathrm{pe}}\left(\frac{kT_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}\right)^{1/2} \tag{10.32}$$

Protože problém má sférickou symetrii, elstat. potenciál závisí jen na velikosti r. Vztah (10.31) se může přepsat (pro $\mathbf{r} \neq 0$) jako

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi(\mathbf{r})\right] - \frac{2}{\lambda_\mathrm{D}^2}\phi(\mathbf{r}) = 0 \qquad (r \neq 0) \tag{10.33}$$

Abychom to vyřešili, uvědomme si, že el. pole izolované částice je

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{10.34}$$

takže elstat. Coulombovský potenciál

$$\phi_{\mathrm{c}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{10.35}$$

Ve velmi těsné blízkosti testovací částice má být potenciál přibližně stejný jako okolo textovací částice ve vakuu. Takže je vhodné hledat řešení v tomto tvaru.

$$\phi(r) = \phi_{\mathrm{c}}(r)\,F(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{F(r)}{r} \tag{10.36}$$

kde $F(r) \to 1$ pokud $r \to 0$. Dále se vyžaduje, aby $\phi \to 0$ pro $r \to \infty$. Substitucí předpokládaného tvaru potenciálu (10.36) do (10.33)

$$\frac{\mathrm{d}^2 F(r)}{\mathrm{d}r^2} = \frac{2}{\lambda_{\mathrm{D}}^2}F(r) \tag{10.37}$$

Tato jednoduchá diferenciální rovnice pro $F(r)$ má řešení

$$F(r) = A\exp\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right) + B\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right). \tag{10.38}$$

Podmínka, že $\phi(r)$ vymizí pro velké hodnoty r vyžaduje $A = 0$. Podmínka, že $F(r)$ se blíží jedniččce pro r jdoucí k nule vyžaduje $B = 1$. Řešení rovnice (10.33) je tedy

$$\phi(r) = \phi_{\mathrm{c}}(r)\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right). \tag{10.39}$$

Tento výsledek je všeobecně známý jako *Debyovský potenciál*, protože toto řešení bylo poprvé ukázáno pány Debye a Huckel v jejich teorii o elektrolytech. Z tohoto řešení vyplývá, že $\phi(r)$ je mnohem menší než Coulombovský potenciál, jestliže vzdálenost r překročí vzdálenost λ_{D}, nazývanou *Debyova délka*.

Náboj Q je neutralizován rozložením náboje v okolí. Z (10.26) a (10.30) dostáváme hustotu náboje ve tvaru

$$\rho(\mathbf{r}) = -2\frac{n_0 e^2 \phi(\mathbf{r})}{kT} + Q\,\delta(\mathbf{r}). \tag{10.40}$$

Dosazením $\phi(r)$ Debyovského potenciálu (10.39) dostáváme

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{2\pi r \lambda_{\mathrm{D}}^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right) + Q\,\delta(\mathbf{r}). \tag{10.41}$$

Celkový náboj zísáme integrací přes celý prostor

$$q_{\mathrm{t}} = \iiint \rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3 r = -\frac{Q}{2\pi\lambda_{\mathrm{D}}^2}\int_0^\infty \frac{1}{r}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right) 4\pi r^2\,\mathrm{d}r + Q\iiint \delta(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3 r \tag{10.42}$$

První integrál je roven $-Q$ zatímco druhý dává $+Q$. Celkový náboj je tedy $q_{\mathrm{t}} = 0$.

Měli bychom si uvědomit, že Debyevský potenciál se stává zančně velký pro $r \to 0$ a podmínka $e\phi(r) \ll kT$ již zřejmě není splněna. Abychom ověřili platnost této aproximace a tedy vztahu (10.39), poznamenejme, že za použití (10.39) pro $Q = e$ máme

$$\frac{e\phi}{kT} = \frac{e^2 \exp\left(-\sqrt{2}\,r/\lambda_{\mathrm{D}}\right)}{4\pi\epsilon_0 r kT} = \frac{\lambda_{\mathrm{D}}}{3N_{\mathrm{D}}}\frac{\exp\left(-\sqrt{2}\,r/\lambda_{\mathrm{D}}\right)}{r} \tag{10.43}$$

kde N_D je počet částic v Debyově sféře. Protože tento počet je v plazmatu velmi velký, je zřejmě, že poměr $e\phi/kT \ll 1$ s vyjímkou $r < \lambda_D/N_D$. Musíme se tedy omezit na vzdálenosti od testovací částice větší než λ_D/N_D

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}\exp\left(-r/\lambda_\mathrm{D}\right) \tag{10.44}$$

10.2.1 Debyova délka pomocí Vlasovovy rovnice

$$\mathbf{v}\cdot\nabla f_e + \frac{e}{m_e}(\nabla\phi)\cdot\nabla_v f_e = 0$$

$$\mathbf{v}\cdot\nabla f_i - \frac{e}{m_i}(\nabla\phi)\cdot\nabla_v f_i = 0$$

$$n_\alpha(\mathbf{r}) = \int_v f_\alpha(\mathbf{r},v)\,\mathrm{d}^3v$$

$$\rho(\mathbf{r}) = -e\int_v (f_e - f_i)\,\mathrm{d}^3v + Q\delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla^2\phi - \frac{e}{\epsilon_0}\int_v (f_e - f_i)\,\mathrm{d}^3v = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

$$f_\alpha(\mathbf{r},v) = f_{0\alpha}(v)\exp\left(-\frac{q_\alpha\phi(\mathbf{r})}{kT}\right)$$

$$\nabla^2\phi - \frac{e}{\epsilon_0}\left[\exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right)\int_v f_{0e}\mathrm{d}^3v - \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right)\int_v f_{0i}\mathrm{d}^3v\right] = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

$$n_0 = \int_v f_{0\alpha}(v)\,\mathrm{d}^3v \qquad \alpha = e, i$$

$$\nabla^2\phi - \frac{en_0}{\epsilon_0}\left[\exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right)\right] = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

10.2.2 Stěnová vrstva

Když je nějaký pevný povrch vnořen do plazmatu, získává automaticky záporný náboj, a tedy záporný potenciál vzhledem k plazmatu. Blízko tohoto povrchu je tzv. stěnová vrstva, v níž je rozdílná hustota elektronů a iontů. Uvnitř stěnové vrstvy roste potenciál monotónně ze záporné hodnoty u stěny až na hodnotu plazmového potenciálu. Tloušťka vrstvy, v niž není splněna kvazineutralita je řádově rovna Debyově délce.

Řešení problému silně závisí na geomterii. Ukážeme si aproximativní řešení pro nekonečnou plochu $x = 0$.

Fyzikální mechanismus jejího vzniku

Nabité částice, které dopadají z plazmatu na stěnu, jsou většinou ztraceny. Ionty rekombinují a vrací se do plazmatu jako neutrály. Elektrony buď rekombinují nebo vstupují do vodivostního pásu pevné látky, pokud jde o kov. Již dříve jsme odvodili, že tok částic na jednu stranu desky, je v případě izotropní rozdělovací funkce dán vztahem:

$$\Gamma_\alpha = \frac{n_\alpha \langle v \rangle_\alpha}{4}, \tag{10.45}$$

kde $\langle v \rangle_\alpha$ je střední rychlost částic α. Pro Maxwell-Boltzmannovo rozdělení jsme zjistili, že

$$\langle v \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT_\alpha}{m_\alpha}} \tag{10.46}$$

a tok částic je tedy

$$\Gamma_\alpha = n_\alpha \sqrt{\frac{kT_\alpha}{2\pi m_\alpha}}. \tag{10.47}$$

Je zřejmé že, pokud je hustota elektronů a iontů stejná, tok elektronů na plochu značně převýší tok iontů protože člen $\sqrt{T_e/m_e}$ je mnohem vyšší než $\sqrt{T_i/m_i}$. Pro nejméně hmotný iont, tj. iont vodíku, je $m_e/m_i = 1836$. Proto stěna v kontaktu s plazmatem rychle akumuluje záporný náboj, protože na počátku na ni dopadne mnohem více elektronů. Záporný potenciál začne elektrony postupně odpuzovat až se tok elektronů a iontů vyrovná a stěna získá záporný potenciál, který se nazývá *plovoucí*.

Záporný potenciál na stěně

Chceme odhadnout potenciál na stěně v ustáleném stavu, kdy se vytvořila stěnová vrstva. Tento potenciál pro $x = 0$ označíme

$$\phi(0) = \phi_w. \tag{10.48}$$

Referenční potenciál v nekonečnu:

$$\phi(\infty) = 0. \tag{10.49}$$

Elektrony a ionty budou v termodynamické rovnováze, mají teplotu T, a působí na ně pole konzervativních sil nabité desky. V $x \to \infty$ je plazma neporušené a jeho hustota je n_0. Platí tedy

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 \exp\left(\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right), \tag{10.50}$$

$$n_i(\mathbf{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{e\phi(\mathbf{r})}{kT}\right). \tag{10.51}$$

V těchto vztazích nebereme v úvahu driftovou rychlost částic, ačkoliv nabité částice jsou na stěně ztraceny, takže musí existovat jejich ustálený tok vyrovnávající hustotu. Později, když budeme aproximativně studovat vnitřní strukturu stěnové vrstvy pomocí hydrodynamických rovnic, vezmeme tuto driftovou rychlost do úvahy.

Jedna z okrajových podmínek problému je skutečnost, že v ustáleném stavu se nesmí měnit potenciál stěny, takže

$$J_e(0) = J_i(0). \tag{10.52}$$

Použijeme rovnice (10.47), (10.50) a (10.51)

$$\sqrt{\frac{1}{m_e}} \exp\left(\frac{e\phi_w}{kT}\right) = \sqrt{\frac{1}{m_i}} \exp\left(-\frac{e\phi_w}{kT}\right), \tag{10.53}$$

což přepíšeme jako

$$\exp\left(-\frac{2e\phi_w}{kT}\right) = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \tag{10.54}$$

a dále

$$\phi_w = -\left(\frac{kT}{4e}\right) \ln\left(\frac{m_i}{m_e}\right). \tag{10.55}$$

Ačkoliv jsme udělali zanedbání driftové rychlosti, tento výsledek souhlasí s přesnějším odvozením pro případ $T_e = T_i$.

Poznamenejme, že velikost potenciální energie blízko stěny $|e\phi_w|$ je stejného řádu jako střední tepelná energie částic v plazmatu, neboť

$$\frac{|e\phi_w|}{kT} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{m_i}{m_e}\right). \tag{10.56}$$

Např. pro vodíkový iont je tento poměr roven dvěma, zatímco pro těžší ionty se blíží třem.

Vnitřní struktura stěnové vrstvy

Abychom něco zjistili o vnitřní struktuře stěnové vrstvy vezmeme do úvahy rovnici zachování částic a hybnosti pro elektrony a ionty za ustálených podmínek a s prostorovou závislostí pouze ve směru osy x. Rovnice kontinuity zapíšeme pro $\alpha = e, i$

$$\frac{\mathrm{d}(n_\alpha u_\alpha)}{\mathrm{d}x} = n_\alpha \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x} + u_\alpha \frac{\mathrm{d}n_\alpha}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{10.57}$$

V rovnici hybnosti zanedbáme viskózní jevy, takže aproximujeme tenzor tlaku skalárem. Použijeme ideální rovnici plynu $p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha$, abychom zavedli teplotu, o které předpokládáme, že je konstantní. Zanedbáme srážky, protože tkoušťka stěnové vrstvy je mnohem menší než střední volná dráha částic. Za těchto předpokladů, bez magnetického pole a uvážíme-li $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$, $D/Dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{u}_a lpha\dot{\nabla} = u_\alpha d/dx$

$$m_\alpha u_\alpha \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x} = -\frac{kT_\alpha}{n_\alpha}\frac{\mathrm{d}n_\alpha}{\mathrm{d}x} - q_\alpha \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}. \tag{10.58}$$

Pro zjednodušení ještě uděláme dvě aproximace. Ze vztahu (10.57) máme

$$\frac{\mathrm{d}n_\alpha}{\mathrm{d}x} = -\frac{n_\alpha}{u_\alpha}\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}.x} \tag{10.59}$$

Pak můžeme poměr levé strany rovnice (10.58) a prvního členu její pravé strany vyjádřit jako

$$\frac{\left|m_\alpha u_\alpha \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x}\right|}{\left|\frac{kT_\alpha}{n_\alpha}\frac{\mathrm{d}n_\alpha}{\mathrm{d}x}\right|} = \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{kT_\alpha}. \tag{10.60}$$

Dvě aproximace, které uděláme:

- pro elektrony zanedbáme levou stranu (10.58), tj. setrvačnost elektronů:

$$\frac{kT_e}{n_e}\frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}x} - e\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{10.61}$$

- pro ionty zanedbáme 1. člen na pravé straně (10.58), tj. jejich teplotu:

$$m_i u_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x} + e\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{10.62}$$

Podle poměru (10.60) jsou tyto dvě aproximace splněny pouze pokud tepelná energie elektronů je mnohem větší než jejich kinetická energie a pokud tepelná energie iontů je mnohem menší než jejich kinetická energie, tj.

$$m_e u_e^2 \ll kT \ll m_i u_i^2. \tag{10.63}$$

Tento předpoklad dokážeme později.

Pro elektrony integrujeme (10.61) a dostáváme

$$e\phi(x) = kT \ln n_e(x) + (\mathrm{konst}). \tag{10.64}$$

Za předpokladu, že $n_e = n_i$ a pro $\phi = 0$ máme

$$n_e(x) = n_0 \exp\left(\frac{e\phi(x)}{kT}\right). \tag{10.65}$$

Tento výraz je identický k (10.50), což není překvapující, protože podmínka $m_e u_e^2 \ll kT$ odpovídá zanedbání setrvačnosti elektronu ($m_e = 0$) a následně jeho kinetické energie.

Pro ionty nejprve integrujeme (10.57) a dostáváme

$$n_i(x) u_i(x) = C_1. \tag{10.66}$$

Pak integrujeme (10.62) a máme

$$e\phi(x) + \frac{1}{2}m_i u_i^2(x) = C_2, \tag{10.67}$$

kde C_1 a C_2 jsou konstanty. Okrajové podmínky vyžadují, že pro že pro $x \rightarrow \infty$ musí $\phi(\infty) = 0$, $n_i(\infty) = n_0$ a $u_i(\infty) = u_{0i}$. Takže

$$C_i = n_0 u_{0i}; \qquad C_2 = \frac{1}{2}m_i u_{0i}^2 \tag{10.68}$$

a využitím těchto rovností v (10.66) a (10.67) dostáváme

$$n_i(x)u_i(x) = n_0 u_{0i}, \tag{10.69}$$

$$e\phi(x) + \frac{1}{2}m_i u_i^2(x) = \frac{1}{2}m_i u_{0i}^2. \tag{10.70}$$

Tyto dvě rovnice můžeme zkombinovat, abychom eliminovali $u_i(x)$ a získali $n_i(x)$:

$$n_i(x) = n_0 \left(1 - \frac{2e\phi(x)}{m_i u_{0i}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} . \tag{10.71}$$

Tento vztah se podstatně liší od vztahu (10.51) pro $n_i(x)$, protože se projeví vliv driftové rychlosti iontů. Odtud pak vyplývá, že $n_i(x)$ ve stěnové vrstvě, kde plattí $\phi(x) < 0$, pomalu klesá ačkoliv vztah (10.51) předpovídal růst. Fyziálně to znamená, že záporný potenciál na stěně zvyšuje $u_i(x)$, jak se ionty ke stěně přibližují, a protože tok iontů $n_i(x)u_i(x)$ musí zůstat podle vztahu (10.69) konstantní, musí se $n_i(x)$ snižovat. Ttot chování je znázorněno na obrázku.

Abychom dostali rovnici pro potenciál $\phi(x)$ dosadíme (10.65) a (10.71) do Poissonovy rovnice

$$\nabla^2\phi = \frac{e}{\epsilon_0}(n_e - n_i) \tag{10.72}$$

a dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{n_0 e}{\epsilon_0}\left[\exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right) - \left(1 - \frac{2e\phi}{m_i u_{0i}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{10.73}$$

Musíme nějak určit u_{0i} daleko od stěny. Navíc je rovnice nelineární, takže abychom ji mohli analyticky vyřešit, je nutné udělat další aproximaci. Viděli jsme, že $\mid e\phi \mid$ nabývá hodnot od nuly (v plazmatu) do hodnot řádu kT (na stěně). Dále jsme předpokládali, že je $m_i u_{0i}^2$ větší než kT. Proto se budeme zabývat jen oblastí blízko hranice plazma-stěnová vrstva a předpokládat dále, že $\mid e\phi \mid$ je malé ve srovnání s kT i $m_i u_{0i}^2$. Proto můžeme nahradit členy na pravé straně (10.73) pro $e\phi/kT \ll 1$ a $e\phi/(m_i u_{0i}^2 \ll 1$ vztahy

$$\exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right) \simeq 1 + \frac{e\phi}{kT} \tag{10.74}$$

$$\left(1 - \frac{2e\phi}{m_i u_{0i}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{e\phi}{m_i u_{0i}^2} \tag{10.75}$$

a diferenciální rovnice se zjednodušuje na

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\phi}{X^2}, \tag{10.76}$$

kde

$$X^2 = \lambda_D^2\left(1 - \frac{kT}{m_i u_{0i}^2}\right)^{-1}. \tag{10.77}$$

Řešení s okrajovou podmínkou $\phi(\infty) = 0$ je

$$\phi(x) = A\exp\left(-\frac{x}{X}\right), kde \tag{10.78}$$

A je konstanta. Protože jsme předpokládali, že $kT \ll m_i U_{0i}^2$, je X reálné číslo přibližně rovné λ_D.

Z řešení rovnice vyplývý, že absolutní hodnota $\phi(x)$ exponencielně klesá (protože je A záporné, $\phi(x)$ vlastně roste), jak se pohybujeme stěnovou vrstvou směrem k plazmatu a asymptoticky se blíží k nule. Protože $X \simeq \lambda_D$, dějí se tyto variace na vzdálenostech řádově Debyovy délky. Řešení je striktně řečeno platné jen pro hranici plazma-stěnová vrstva, ale pokud bychom jej extrapolovali až na stěnu s okrajovou podmínkou $\phi(0) = \phi_w$, platí $A = \phi_w$.

Kdyby kT bylo větší než $m_i u_{0i}^2$, bylo by X imaginární a el. potenciál by osciloval. Proto pro vytvoření stěnové vrstvy platí

$$kT < m_i u_{0i}^2, \tag{10.79}$$

tzv. Bohmovo kritérium.

Určit potenciál na stěně za použití hydrodynamických rovnic není triviální záležitost. Všechny přibližné metody navržené pro případ $T_e = T_i$ dávají řešení (**??**) již dříve odvozené za velmi zjednodušených předpokladů. Navíc neexistuje konzistentní způsob jak určit driftovou rychlost iontů pro $x = \infty$, ale můžeme ji aproximovat následovně. Tok iontů musí být konstantní, takže se rovná $n_0 u_{0i}$ toku na stěnu. Odtud

$$u_{0i} = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_i}} \exp\left(-\frac{e\phi_w}{kT}\right). \tag{10.80}$$

Podobně pro elektrony

$$u_{0e} = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\phi_w}{kT}\right). \tag{10.81}$$

a použitím (10.53)

$$u_{0e} = u_{0i} \tag{10.82}$$

Ještě bychom měli ověřit platnost předpokladu (10.63). Tok částic $n_\alpha(x)u_\alpha(x)$ je konstantní pro všechna x a je roven n_0u_0. Z (10.65) vidíme, že minimální hodnota $n_e(x)$ je $n_0 \exp(e\phi_w/kT)$, protože ϕ_w je záporné. Proto

$$u_e = \frac{n_0}{n_e}u_{0e} \leq u_{0e} \exp\left(-\frac{e\phi_w}{kT}\right) \tag{10.83}$$

a s použitím (10.81)

$$u_e \leq \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_e}} \tag{10.84}$$

nebo

$$\frac{kT}{m_e u_e^2} \geq 2\pi \tag{10.85}$$

v souhlasu s (10.63). Podobně pro ionty

$$u_i = \frac{n_0}{n_i}u_{0i} \geq u_{0i} \tag{10.86}$$

$$u_i \geq \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_i}} \exp\left(-\frac{e\phi_w}{kT}\right) \tag{10.87}$$

$$\frac{kT}{m_i u_i^2} \leq 2\pi \exp\left(\frac{2e\phi_w}{kT}\right) \simeq 0,1 \tag{10.88}$$