Kapitola 2

Pohyb částic v elektromagnetických polích

2.1 Úvod

Studium pohyb nabitých částic v silových polích umožňuje získat fyzikální náhled na dynamické procesy v plazmatu, protože přírodní i laboratorní plazmata jsou často ovlivňována externími silovými poli. Zároveň to umožňuje získat informace o některých makroskopických jevech, které jsou výsledkem kolektivního chování velkého počtu částic.

Magnetické pole $\boldsymbol{B}$ udržuje nabité částice v plazmatu, a tím udržuje samotné plazma. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ je v laboratoři často využíváno pro generaci plazmatu. Pohybová rovnice pro Lorentzovu sílu $\boldsymbol{F}$ je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \,, \tag{2.1}$$

kde $\boldsymbol{p}$ je moment hybnosti částice a $\boldsymbol{v}$ jeho rychlost. Rovnice je relativisticky správná pokud

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v} \,, \tag{2.2}$$

kde m je klidová hmotnost částice a γ je *Lorentzův faktor* definovaný

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\,. \tag{2.3}$$

V mnoha případech však vystačíme s nerelativistiským přiblížením

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,. \tag{2.4}$$

Řešení v homogenním elektrostatickém poli je triviálním opakováním. Stručně si tedy v následující kapitole zopakujeme řešení v homogenním magnetostatickém poli a v kombinaci obou.

2.2 Homogenní magnetostatické pole

2.2.1 Formální řešení pohybové rovnice

V případě neexistence elektrického pole řešíme pohybovou rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,. \tag{2.5}$$

Je výhodné rozložit rychlost $\boldsymbol{v}$ na komponentu $\boldsymbol{v}_\parallel$ paralelní se směrem $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}_\perp$ kolmou na $\boldsymbol{B}$. Pak pro tyto dvě komponenty rychlosti dostaneme následující formální řešení

$$\boldsymbol{v}_\parallel = \mathrm{konst} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{\Omega}_c \times \boldsymbol{r}_c\,, \tag{2.7}$$

kde

$$\boldsymbol{\Omega}_c = -\frac{q\boldsymbol{B}}{m} = \frac{|q|B}{m}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_c = \Omega_c\hat{\boldsymbol{\Omega}}_c\,. \tag{2.8}$$

Výsledná trajektorie částice je superpozicí pohybu s konstantní rychlostí podél $\boldsymbol{B}$ a kruhového pohybu v rovině kolmé na $\boldsymbol{B}$, takže částice opisuje šroubovici. Úhel mezi $\boldsymbol{B}$ a směrem pohybu částice (úhel sklonu)

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{v_\perp}{v}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v_\perp}{v_\parallel}\right) . \tag{2.9}$$

Poloměr kruhové dráhy nazývaný též *gyrační*, *cyklotronový* nebo *Larmorův poloměr* je

$$r_c = \frac{v_\perp}{\Omega_c} = \frac{m v_\perp}{|q|B} . \tag{2.10}$$

2.2.2 Řešení v kartézských souřadnicích

V předchozím odstavci se řešení pohybové rovnice nevázalo na žádný konkrétní souřadný systém. Nyní budeme uvažovat kartézskou soustavu souřadnic (x, y, z) takovou, že $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. V tomto případě jsou složky rychlosti v rovině kolmé na $\boldsymbol{B}$ dány vztahy

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_\perp \sin(\Omega_c t + \Theta_0) \\ v_y(t) &= v_\perp \cos(\Omega_c t + \Theta_0) , \end{aligned} \tag{2.11}$$

kde

$$\tan(\Theta_0) = v_x(0)/v_y(0) \tag{2.12}$$

a trajektorie částice je popsána jako

$$x(t) = -\frac{v_\perp}{\Omega_c}\cos(\Omega_c t + \Theta_0) + X_0 \tag{2.13}$$

$$y(t) = \frac{v_\perp}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t + \Theta_0) + Y_0 \tag{2.14}$$

$$z(t) \;=\; v_\parallel t + z_0\,,$$

kde

$$\begin{aligned} X_0 \;&=\; x_0 + \frac{v_\perp}{\Omega_c}\cos(\Theta_0) \\ Y_0 \;&=\; y_0 - \frac{v_\perp}{\Omega_c}\sin(\Theta_0)\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Vektor $\boldsymbol{r} = x_0\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}}$ udává počáteční polohu částice. Vidíme, že

$$(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 = (v_\perp/\Omega_c)^2 = r_c^2\,. \tag{2.16}$$

2.2.3 Magnetický moment

Magnetický moment $\boldsymbol{m}$ asociovaný s cirkulačním pohybem náboje, tj. proudem I, je kolmý k ploše A, kterou definuje trajektorie cirkulujícího náboje a má opačný směr než externě aplikované pole $\boldsymbol{B}$. Jeho velikost je dána

$$|\boldsymbol{m}| = I\,A\,. \tag{2.17}$$

Proud můžeme vyjádřit jako tok náboje:

$$I = \frac{|q|}{T_c} = \frac{|q|\Omega_c}{2\pi}\,, \tag{2.18}$$

kde $T_c = 2\pi/\Omega_c$ je perioda orbitálního pohybu (*cyklotronová* nebo *Larmorova perioda*). Velikost $\boldsymbol{m}$ může tedy vyjádřit i jako

$$|\boldsymbol{m}| = \frac{|q|\Omega_c}{2\pi}\pi r_c^2 = \frac{1}{2}|q|\Omega_c r_c^2 \tag{2.19}$$

nebo použitím vztahu $\Omega_c = |q|B/m$ a $r_c = v_\perp/\Omega_c$ jako

$$|\boldsymbol{m}| = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B}\,, \tag{2.20}$$

kde $W_\perp$ vyjadřuje část kinetické energie částice asociované s transverzální rychlostí $v_\perp$. Ve vektorové podobě pak můžeme psát

$$\boldsymbol{m} = -\frac{W_\perp}{B^2}\boldsymbol{B}\,. \tag{2.21}$$

2.2.4 Magnetizační proud

Uvažujme nyní soubor nabitých částic, kladných a záporných ve stejném počtu (např. případ plazmatu s malou hustotou, kde můžeme zanedbat srážky částic). Pak platí, že střední doba mezi srážkami je mnohem větší než gyrační perioda (tato podmínka je splněna pro mnoho plazmat ve vesmíru). Pak magnetické momenty, které jsou spojené s pohybem částic (hustotou proudu), vytváří vnitřní magnetické pole, které může být tak silné, že významně mění vnější magnetické pole.

Abychom vyjádřili výslednou hustotu el. proudu, uvažujme makroskopický objem, který obsahuje velké množství částic. Nechť S je část plochy v tomto objemu a křivka C tuto plochu ohraničuje. Na rozdíl od částic na trajektoriích, které protínající plochu S jedenkrát (trajektorie 1 na obrázku), částice na trajektoriích protínající S dvakrát (trajektorie 2 na obrázku) nepřispívají k výslednému proudu.

Označíme $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ element křivky C. Počet trajektorií, které obkrouží $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ je $n\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, kde n je počet trajektorií odpovídajících proudu I na jednotkový objem a $\boldsymbol{A}$ je orientovaná plocha, kterou každá trajektorie uzavírá. Výsledný proud protínající S je pak dán integrací proudu kolem $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ přes celou křivku C:

$$I_n = \oint I n \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\,. \tag{2.22}$$

Protože $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$ je magnetický moment na jednotku objemu, je *magnetizační vektor* $\boldsymbol{M}$ dán

$$\boldsymbol{M} = n\boldsymbol{m} = nI\boldsymbol{A}\,, \tag{2.23}$$

takže

$$I_n = \oint \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{M})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,. \tag{2.24}$$

Můžeme definovat průměrnou *hustotu magnetizačního proudu* protínající plochu S:

$$I_n = \int_S \boldsymbol{J}_M \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,, \tag{2.25}$$

takže dostáváme

$$\boldsymbol{J}_M = \nabla \times \boldsymbol{M}\,, \tag{2.26}$$

kde

$$\boldsymbol{M} = n\boldsymbol{m} = -\left(\frac{nW_\perp}{B^2}\right)\boldsymbol{B}\,. \tag{2.27}$$

Hustotu náboje ρ_M spojenou s hustotou magnetizačního proudu $\boldsymbol{J}_M$ můžeme vyjádřit z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J}_M = 0\,. \tag{2.28}$$

Protože $\boldsymbol{J}_M = \nabla \times \boldsymbol{M}$ a protože pro libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ platí $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0$, je hustota náboje ρ_M konstantní v čase.

V Maxwellově rovnici

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{2.29}$$

můžeme rozdělit celkovou hustotu proudu $\boldsymbol{J}$ na dvě složky: magnetizační hustotu proudu $\boldsymbol{J}_M$ a hustotu $\boldsymbol{J}'$ odpovídající jiným zdrojům, tj.

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_M + \boldsymbol{J}'\,. \tag{2.30}$$

Když vyjádříme $\boldsymbol{J}_M$ pomocí $\boldsymbol{M}$, dostaneme

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\nabla \times \boldsymbol{M} + \boldsymbol{J}' + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\,, \tag{2.31}$$

což můžeme ještě přeuspořádat jako

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \right) = \boldsymbol{J}' + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \,. \tag{2.32}$$

Definujeme-li *efektivní* magnetické pole $\boldsymbol{H}$ vztahem

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{2.33}$$

můžeme rovnici (2.32) napsat jako

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}' + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \,. \tag{2.34}$$

Pokud je $\boldsymbol{M}$ úměrné $\boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \,, \tag{2.35}$$

existuje jednoduchý lineární vztah mezi $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$. Konstanta χ_M se nazývá *magnetická susceptibilita* prostředí. Pro plazma je však $M \propto 1/B$ (viz rovnice (2.27)), takže není výhodné popisovat plazma jako magnetické prostředí.

2.3 Homogenní elektrostatické a elektromagnetické pole

2.3.1 Formální řešení pohybové rovnice

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{2.36}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Omega}_c \times \boldsymbol{r}_c + \frac{\boldsymbol{E}_\perp \times \boldsymbol{B}}{B^2} + \frac{q\boldsymbol{E}_\parallel}{m}t + \boldsymbol{v}_\parallel(0)\,. \tag{2.37}$$

První člen představuje gyrační kruhový pohyb, druhý člen je drift $\boldsymbol{v}_E$ gyračního středu ve směru kolmém na $\boldsymbol{E}_\perp$ a $\boldsymbol{B}$), třetí člen je konstantní zrychlení gyračního středu podél $\boldsymbol{B}$ a poslední člen je počáteční rychlost rovnoběžná s $\boldsymbol{B}$. Rychlost $\boldsymbol{v}_E$ nezávisí na hmotnosti ani znaménku náboje a často se nazývá *plazmová driftová rychlost* nebo *elektromagnetický plazmový drift*. Protože $\boldsymbol{E}_\parallel \times \boldsymbol{B} = 0$, můžeme psát

$$\boldsymbol{v}_E = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2}\,. \tag{2.38}$$

2.3.2 Řešení v kartézských souřadnicích

$$\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{E} = E_x\hat{\boldsymbol{x}} + E_y\hat{\boldsymbol{y}} + E_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.40}$$

$$v_x(t) = v'_\perp \sin(\Omega_c t + \theta_0) + \frac{E_y}{B} \tag{2.41}$$

$$v_y(t) = \frac{1}{\Omega_c}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} - \frac{E_x}{B} = v'_\perp \cos(\Omega_c t + \theta_0) - \frac{E_x}{B} \tag{2.42}$$

$$x(t) = -\frac{v'_\perp}{\Omega_c}\cos(\Omega_c t + \theta_0) + \frac{E_y}{B}t + X_0 \tag{2.43}$$

$$y(t) = \frac{v'_\perp}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t + \theta_0) - \frac{E_x}{B}t + Y_0 \tag{2.44}$$

2.3.3 Drift způsobený externí silou

Jestliže je přítomna nějaká další externí síla (gravitační nebo inerciální, pokud uvažujeme neinerciální souřadný systém), musí se pohybová rovnice modifikovat:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{F}\,. \tag{2.45}$$

Efekt této síly je formálně podobný působení el. síly. Předpokládejme, že $\boldsymbol{F}$ je homogenní a konstantní v čase. Potom analogicky k elektromagnetické driftové rychlosti, tato síla způsobí drift, jehož komponenta kolmá na $\boldsymbol{B}$ je

$$\boldsymbol{v}_F = \frac{\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B}}{qB^2}\,. \tag{2.46}$$

V případě homogenního magnetického pole $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$

$$\boldsymbol{v}_g = \frac{m}{q}\frac{\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{B}}{B^2}\,. \tag{2.47}$$

2.4 Prostorově nehomogenní magnetické pole

Pro prostorově nehomogenní pole je integrace pohybové rovnice matematicky náročný problém. Pokud nás však nezajímají detaily pohybu částice a můžeme předpokládat, že magnetické pole je silné a pomalu se měnící, zatímco el. pole je slabé. Prostorovou škálou je v tomto případě gyrační poloměr:

$$\frac{|\nabla B|}{B} r_c \ll 1 \,. \tag{2.48}$$

Řešení pohybu částic založeném na této aproximaci se často říká *aproximace gyračního středu* nebo *Alfvénova aproximace*.

Pokud se může libovolná ze tří komponent vektoru $\boldsymbol{B}$ měnit v prostoru, máme celkem 9 parametrů.

$$\nabla \boldsymbol{B} = (\hat{\boldsymbol{x}} \quad \hat{\boldsymbol{y}} \quad \hat{\boldsymbol{z}}) \begin{pmatrix} \partial B_x/\partial x & \partial B_y/\partial x & \partial B_z/\partial x \\ \partial B_x/\partial y & \partial B_y/\partial y & \partial B_z/\partial y \\ \partial B_x/\partial z & \partial B_y/\partial z & \partial B_z/\partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

Pouze 8 jich je však nezávislých, protože

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{2.50}$$

V následujícím budeme předpokládat kartézský systém souřadnic, v němž

$$\boldsymbol{B}(0,0,0) = \boldsymbol{B}_0 = B_0 \hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.51}$$

Devět komponent tenzoru $\nabla \boldsymbol{B}$ můžeme seskupit do čtyř skupin:

- divergentní členy $\partial B_x/\partial x, \quad \partial B_y/\partial y, \quad \partial B_z/\partial z$
- gradientní členy $\partial B_z/\partial x, \quad \partial B_z/\partial y$
- členy zakřivení $\partial B_x/\partial z, \quad \partial B_y/\partial z$
- smykové členy $\partial B_x/\partial y, \quad \partial B_y/\partial x$

2.4.1 Divergentní členy

Abychom lépe rozumněli prostorové nehomogenitě magnetického pole, je dobré si znázornit magnetické siločáry pro jednotlivé případy. Diferenciální element siločáry vyjádříme jako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.52}$$

Pak musí platit, že

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.53}$$

což dává vztah

$$\frac{\mathrm{d}x}{B_x} = \frac{\mathrm{d}y}{B_y} = \frac{\mathrm{d}z}{B_z}\,. \tag{2.54}$$

Protože nás nyní zajímá jen divergentní člen a kolem počátku směřuje pole především podél osy z, můžeme rozvést B_x a B_y do Taylorovy řady:

$$B_x(x_1, 0, 0) = B_x(0, 0, 0) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right) x_1 = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right) x_1 \tag{2.55}$$

$$B_y(0, y_1, 0) = B_y(0,0,0) + \left(\frac{\partial B_y}{\partial y}\right) y_1 = \left(\frac{\partial B_y}{\partial y}\right) y_1 \tag{2.56}$$

Magnetické siločáry protínající rovinu $z = 0$ v bodě $(x_1, y_1, 0)$ splňují následující rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{B_x}{B_z} = \frac{1}{B_z}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right) x_1 \qquad (y = 0) \tag{2.57}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{B_y}{B_z} = \frac{1}{B_z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial y}\right) y_1 \qquad (x = 0) \tag{2.58}$$

2.4.2 Gradient a zakřivení

Magnetické pole vyjádřené následujícím vztahem vykazuje *gradient* ve směru x

$$\boldsymbol{B} = B_z \hat{\boldsymbol{z}} = B_0(1 + \alpha x)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.59}$$

Musíme si uvědomit, že v oblasti, kde $\boldsymbol{J} = 0$, by toto pole nesplňovalo Maxwellovu rovnici $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$, takže musíme přidat i člen zakřivení $B_x \hat{\boldsymbol{x}} = B_0 \alpha z \hat{\boldsymbol{x}}$ a magnetické pole vyjádříme jako.

$$\boldsymbol{B} = B_0 \left[\alpha z \hat{\boldsymbol{x}} + (1 + \alpha x)\hat{\boldsymbol{z}}\right] \tag{2.60}$$

Většinou ovšem nastává situace, kdy jsou přítomny všechny členy odpovídající divergenci, gradientu a zakřivení (např. magnetické pole Země). Smykové členy nevyvolávají v aproximaci prvního řádu žádné drifty, a proto se jimi dále nebudeme zabývat.

2.5 Aproximativní řešení pohybové rovnice v nehomogenním magnetostatickém poli

Opět uvažujeme případ

$$\boldsymbol{B}(0,0,0) \equiv \boldsymbol{B}_0 = B_0 \hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.61}$$

Blízko počátku můžeme provést Taylorův rozvoj

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{B}) + ... \tag{2.62}$$

a předpokládáme

$$\delta B = |\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{B})| \ll |\boldsymbol{B}_0| \, . \tag{2.63}$$

takže magnetické pole působící na částici se liší velmi málo od pole ve gyračním středu. Člen prvního řádu Taylorova rozvoje $\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{B})$ můžeme explicitně zapsat jako

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{B} = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \boldsymbol{B} = \\ \left(x \frac{\partial B_x}{\partial x} + y \frac{\partial B_x}{\partial y} + z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{x}} + \left(x \frac{\partial B_y}{\partial x} + y \frac{\partial B_y}{\partial y} + z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{y}} + \\ \left(x \frac{\partial B_z}{\partial x} + y \frac{\partial B_z}{\partial y} + z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{z}}\end{gathered} \tag{2.64}$$

přičemž derivace musí být provedeny v počátku souřadného systému.

Jestliže dosadíme aproximativní vyjádření $\boldsymbol{B}$ (2.62) do pohybové rovnice, dostáváme

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) + q\boldsymbol{v} \times [\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{B})] \tag{2.65}$$

Rychlost částice je přibližně součtem

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(0)} + \boldsymbol{v}^{(1)} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{(0)}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{(1)}}{\mathrm{d}t} \tag{2.66}$$

kde $\boldsymbol{v}^{(1)}$ je porucha prvního řádu

$$\left|\boldsymbol{v}^{(1)}\right| \ll \left|\boldsymbol{v}^{(0)}\right| \tag{2.67}$$

a $\boldsymbol{v}^{(0)}$ je řešením rovnice nulového řádu

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(0)}}{\mathrm{d}t} = q\left(\boldsymbol{v}^{(0)} \times \boldsymbol{B}_0\right) \tag{2.68}$$

které již bylo diskutováno dříve. Pokud dosadíme rozvoj rychlosti do rovnice (2.65) a zanedbáme členy druhého řádu

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) + q\boldsymbol{v}^{(0)} \times [\boldsymbol{r}^{(0)} \cdot (\nabla \boldsymbol{B})] \tag{2.69}$$

Druhý člen představuje jakousi dodatečnou sílu k případu homogenního magnetického pole. Tato síla však není konstantní a závisí na okamžité poloze částice. Proto se během jedné gyrační periody objeví malé oscilace. Pokud nás zajímá jen pohyb gyračního středu, stačí se zajímat o tuto sílu vystředovanou přes jednu gyrační periodu.

2.6 Průměrná síla na částici v nehomogenním magnetostat. poli během gyrační periody

Zavedeme souřadný systém, jehož počátek se pohybuje počáteční rychlostí částice ve směru rovnoběžném s $\boldsymbol{B}$. V homogenním poli by pak částice konala kruhový pohyb. V uvažovaném slabě nehomogenním poli se trajektorie částice nebude příliš lišit. Pokud by ale byly siločáry mg pole zakřivené, nebyl by náš zvolený souřadný systém inerciální, museli bychom uvažovat inerciální síly a v důsledku toho by se projevil další drift. Prozatím budeme předpokládat, že siločáry zakřiveny nejsou a tomuto problému se budeme věnovat v jedné z dalších kapitol.

Vzhledek k výše uvedeným předpokladům se vektory nulového řádu, $\boldsymbol{v}^{(0)}$ a $\boldsymbol{r}^{(0)}$, nachází v rovině (x, y). Silový člen

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}^{(0)} \times \left[\boldsymbol{r}^{(0)} \cdot (\nabla \boldsymbol{B})\right] \tag{2.70}$$

můžeme rozdělit na komponentu $\boldsymbol{F}_\parallel$ podél $\boldsymbol{B}_0$ (osy z) a komponentu $\boldsymbol{F}_\perp$ kolmou k $\boldsymbol{B}_0$. Použijeme-li lokální válcové souřadnice (r, θ, z), jejichž osa z míří ve směru $\boldsymbol{B}_0$, máme

$$\boldsymbol{r}^{(0)} \cdot (\nabla \boldsymbol{B}) = r^{(0)} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial r} \,. \tag{2.71}$$

Protože θ-složka mg pole je rovnoběžná s $\boldsymbol{v}^{(0)}$, nepřispívá k $\boldsymbol{F}$, zatímco $B_\mathrm{r}\hat{\boldsymbol{r}}$ přispívá k $\boldsymbol{F}_\parallel$ a $B_\mathrm{z}\hat{\boldsymbol{z}}$ k $\boldsymbol{F}_\perp$. Proto

$$\boldsymbol{F}_\parallel = q\left(\boldsymbol{v}^{(0)} \times \hat{\boldsymbol{r}}\right) r^{(0)} \frac{\partial B_r}{\partial r} = |q| v^{(0)} r^{(0)} \frac{\partial B_r}{\partial r} \hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.72}$$

$$\boldsymbol{F}_\perp = q\left(\boldsymbol{v}^{(0)} \times \hat{\boldsymbol{z}}\right) r^{(0)} \frac{\partial B_z}{\partial r} = -|q| v^{(0)} r^{(0)} \frac{\partial B_z}{\partial r} \hat{\boldsymbol{r}} \,, \tag{2.73}$$

kde $r^{(0)}$ je cyklotronový poloměr odpovídající $\boldsymbol{B}_0$

$$r^{(0)} = \frac{v^{(0)}}{\Omega_c} = \frac{mv^{(0)}}{|q|B_0}\,. \tag{2.74}$$

Použijeme-li vztah pro velikost magnetického momentu (2.20), můžeme vztahy přepsat

$$\boldsymbol{F}_\parallel = 2|\boldsymbol{m}|\frac{\partial B_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.75}$$

$$\boldsymbol{F}_\perp = -2|\boldsymbol{m}|\frac{\partial B_z}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.76}$$

Střední hodnoty $\boldsymbol{F}_\parallel$ a $\boldsymbol{F}_\perp$ přes jednu gyrační periodu jsou

$$\langle \boldsymbol{F}_\parallel \rangle = 2|\boldsymbol{m}|\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial B_r}{\partial r}\mathrm{d}\theta\right) = 2|\boldsymbol{m}|\hat{\boldsymbol{z}}\langle\left(\frac{\partial B_r}{\partial r}\right)\rangle \tag{2.77}$$

$$\langle \boldsymbol{F}_\perp \rangle = -2|\boldsymbol{m}|\left(\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial B_z}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\theta\right) = -2|\boldsymbol{m}|\langle\left(\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\rangle\,. \tag{2.78}$$

Vlivem střední síly $\langle \boldsymbol{F}_\parallel \rangle$ dané vztahem (2.78) dochází ke *zrychlení* gyračního středu ve směru *paralelním* k $\boldsymbol{B}_0$. Jde o efekt *divergentních* členů $\boldsymbol{B}$. Střední síla $\langle \boldsymbol{F}_\perp \rangle$ je odpovědná za *drift* gyračního středu ve směru *kolmém*. Jde o vliv *gradientních* členů $\boldsymbol{B}$.

2.6.1 Paralelní síla

Maxwellova rovnice $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ve válcových souřadnicích zní

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(B_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(B_z) = 0\,. \tag{2.79}$$

První člen můžeme rozepsat

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r}\,. \tag{2.80}$$

Protože pro $r = 0$ máme $B_\mathrm{r} = 0$ a protože blízko počátku se B_r mění jen málo, můžeme psát

$$\frac{B_r}{r} = \frac{\partial B_r}{\partial r} \tag{2.81}$$

a využitím předchozích dvou rovnic máme z $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\,. \tag{2.82}$$

Nyní vyjádříme střední hodnotu přes jednu gyrační periodu:

$$\langle\left(\frac{\partial B_r}{\partial r}\right)\rangle = -\frac{1}{2}\langle\frac{1}{r}\left(\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}\right)\rangle - \frac{1}{2}\langle\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\rangle\,. \tag{2.83}$$

Dále platí

$$\langle\frac{1}{r}\left(\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}\right)\rangle = \frac{1}{2\pi}\oint\frac{1}{r}\left(\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\theta = 0 \tag{2.84}$$

a protože $\partial B/\partial z$ je uvnitř trajektorie částice pomalu se měnící funkce, můžeme ji vytknout před integrál

$$\langle\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\rangle = \frac{1}{2\pi}\oint\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial z}\,. \tag{2.85}$$

Navíc jsme nahradili B_z polem B, protože všechny prostorové změny jsou velmi malé. Konečně tedy dostáváme

$$\left\langle \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} \right) \right\rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right) , \tag{2.86}$$

což využijeme pro vyjádření střední hodnoty paralelní síly

$$\langle \boldsymbol{F}_{\parallel} \rangle = -|\boldsymbol{m}| \frac{\partial B}{\partial z} \hat{\boldsymbol{z}} = -|\boldsymbol{m}| (\nabla B)_{\parallel} \tag{2.87}$$

nebo

$$\langle \boldsymbol{F}_{\parallel} \rangle = (\boldsymbol{m} \cdot \nabla) B \hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{|\boldsymbol{m}|}{B} \left[(\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \boldsymbol{B} \right]_{\parallel} . \tag{2.88}$$

2.6.2 Kolmá síla

V rovině (x, y) budeme nyní uvažovat kartézskou soustavu souřadnic $x = r\cos(\theta)$ a $y = r\sin(\theta)$. Pak

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \cos(\theta) \hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{y}} \tag{2.89}$$

a

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} . \tag{2.90}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\boldsymbol{r}} \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \right\rangle &= \left\langle \left[\cos(\theta) \hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{y}} \right] \left[\cos(\theta) \frac{\partial B_z}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial B_z}{\partial y} \right] \right\rangle \\ &= \langle \cos^2(\theta) \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\boldsymbol{x}} \rangle + \langle \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\boldsymbol{y}} \rangle + \end{aligned}$$

$$+\langle\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{\boldsymbol{x}}\rangle + \langle\sin^2(\theta)\frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}\rangle\,. \tag{2.91}$$

Dále budeme aproximovat $(\partial B_z/\partial x)$ výrazem $(\partial B/\partial x)$ a $(\partial B_z/\partial y)$ výrazem $(\partial B/\partial y)$. Protože jde o pomalu se měnící členy, můžeme je vytknout před integrál střední hodnoty a s využitím $\langle\sin(\theta)\cos(\theta)\rangle = 0$, $\langle\sin^2(\theta)\rangle = \langle\cos^2(\theta)\rangle = 1/2$ dostaneme

$$\langle\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial B_z}{\partial r}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}\,. \tag{2.92}$$

Tento výraz dosadíme do (2.78) pro sílu

$$\langle\boldsymbol{F}_\perp\rangle = -|\boldsymbol{m}|\left(\frac{\partial B}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial B}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}\right) = -|\boldsymbol{m}|(\nabla B)_\perp\,. \tag{2.93}$$

2.6.3 Celková střední síla

S využitím výsledků předchozím dvou odstavců můžeme napsat výslednou střední sílu

$$\langle\boldsymbol{F}\rangle = -|\boldsymbol{m}|(\nabla B)_\parallel - |\boldsymbol{m}|(\nabla B)_\perp = -|\boldsymbol{m}|\nabla B\,. \tag{2.94}$$

Alternativně můžeme využít vektorové identity

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \nabla\left(\frac{1}{2}B^2\right) \tag{2.95}$$

a psát

$$\langle\boldsymbol{F}\rangle = -\frac{|\boldsymbol{m}|}{B}\left[(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - (\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\right]\,. \tag{2.96}$$

Protože $\boldsymbol{m} = -|\boldsymbol{m}|\boldsymbol{B}/B$, dostáváme

$$\langle \boldsymbol{F} \rangle = (\boldsymbol{m} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{m} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) \,. \tag{2.97}$$

Toto je obvyklý tvar pro sílu působící na malý prstencový proud vnořený v nehomogenním magnetickém poli. První člen na pravé straně udává sílu působící jen na magnetický dipól.

2.7 Gradientní drift $\nabla \cdot B$

Ze vztahů (2.46) a (2.93) vidíme, že síla $\langle \boldsymbol{F}_\perp \rangle$ způsobí drift gyračního středu s rychlostí

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{\langle \boldsymbol{F}_\perp \rangle \times \boldsymbol{B}}{qB^2} = -\frac{|\boldsymbol{m}|}{q}\frac{(\nabla B) \times \boldsymbol{B}}{B^2} \,. \tag{2.98}$$

Tento gradientní drift je kolmý na $\boldsymbol{B}$ a jeho gradient. Jeho směr závisí na znaménku náboje, což může způsobit elektrický proud.

Fyzikální důvod gradientního driftu: gyrační poloměr klesá, když se pole zvětšuje $\rightarrow$ poloměr zakřivení dráhy se zmenšuje v místech se silnějším $\boldsymbol{B}$. Kladné ionty rotují po směru hodinových ručiček pro $\boldsymbol{B}$ směřující k pozorovateli, záporné náboje opačně (viz obr. **??**) $\rightarrow$ kladné ionty driftují vlevo, elektrony vpravo.

V případě bezsrážkového plazmatu je *hustota magnetizačního proudu* $\boldsymbol{J}_\mathrm{G}$ způsobená gradientním driftem dána vztahem

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{G} = \frac{1}{\delta V}\sum_i q_i \boldsymbol{v}_{Gi} \,, \tag{2.99}$$

kde sumace běží přes všechny nabité částice ve vhodně zvoleném objemovém elementu δV. Z předchozích dvou vztahů máme

$$\boldsymbol{J}_G = -\left(\frac{1}{\delta V}\sum_i |\boldsymbol{m}_i|\right)\frac{(\nabla B)\times \boldsymbol{B}}{B^2}\,. \tag{2.100}$$

2.8 Paralelní zrychlení gyračního středu

V případě existence divergentních členů nehomogenity magnetického pole, tj. jeho podélné podélné změny (divergence nebo konvergence siločar ve směru osy z) urychluje síla $\langle \boldsymbol{F}_\parallel\rangle$ částice ve směru klesajícího pole nezávisle na znaménku náboje (viz obr. **??**). V následující části budeme diskutovat některé důsledky tohoto odpuzování gyračního středu od oblastí konvergujících magnetických siločar.

2.8.1 Invariantnost magnetického orbitálního momentu a magnetického toku

Vyjdeme ze vztahu (2.87) pro $\langle \boldsymbol{F}_\parallel\rangle$

$$m\frac{\mathrm{d}v_\parallel}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}} = \langle \boldsymbol{F}_\parallel\rangle = -|\boldsymbol{m}|\frac{\partial B}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\,. \tag{2.101}$$

Jestliže vynásobíme obě strany rovnice $v_\parallel = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ a nahradíme $|\boldsymbol{m}| = W_\perp/B$ dostaneme

$$mv_\parallel\frac{\mathrm{d}v_\parallel}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_\parallel^2\right) = -\frac{W_\perp}{B}\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.102}$$

Protože v magnetostatickém poli platí

$$W_\parallel + W_\perp = \text{konst.} \tag{2.103}$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_\perp) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_\parallel) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_\parallel^2\right) , \tag{2.104}$$

dostaneme za pomoci (2.102)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_\perp) = \frac{W_\perp}{B}\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{W_\perp}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} , \tag{2.105}$$

kde $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ představuje změnu B, jak ji vidí pohybující se částice. Srovnáme-li tento výsledek s následující identitou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_\perp) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{W_\perp B}{B}\right) = \frac{W_\perp}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{W_\perp}{B}\right) , \tag{2.106}$$

dojdeme k závěru, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{W_\perp}{B}\right) = 0 \tag{2.107}$$

neboli

$$|\boldsymbol{m}| = \frac{W_\perp}{B} = \text{konst.} . \tag{2.108}$$

Jestliže se tedy částice pohybuje do oblasti konvergujícího nebo divergujícího B, mění se její gyrační poloměr, ale magnetický moment zůstává konstantní. Magnetický moment se ovšem zachovává pouze v použité aproximaci, tj. pokud jsou prostorové změny B uvnitř uzavřené části trajektorie malé ve srovnání s velikostí $\boldsymbol{B}$. Proto se říká, že v tomto případě je orbitální magnetický moment *adiabatickým* *invariantem*, obvykle se mluví o *prvním adiabatickém invariantu.*

Magnetický tok Φ_m plochou uzavřené části trajektorie částice je

$$\Phi_\mathrm{m} = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pi r_c^2 B = \pi \frac{m^2 v_\perp^2}{q^2 B^2} B = \frac{2\pi m}{q^2} \left(\frac{W_\perp}{B} \right) . \tag{2.109}$$

Proto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_\mathrm{m}) = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\boldsymbol{m}| = 0 \tag{2.110}$$

a částice pohybující se v oblasti konvergujícího pole $\boldsymbol{B}$ bude obíhat po dráze se stále menším poloměrem, aby magnetický tok uzavřený touto orbitou zůstal konstantní.

2.8.2 Efekt magnetického zrcadla

Částice pohybující se směrem ke konvergujícím magnetickým siločárám získává $W_\perp$ v důsledku adiabatické invariance $|\boldsymbol{m}|$ a Φ_m ($W_\perp / B$ = konst. a B roste). Protože celková kinetická energie je v magnetostatickém poli konstantní, klesá $W_\parallel$. $\Rightarrow$ Pro dostatečně silné mg pole se může částice zastavit a pohybovat zpět. $\Rightarrow$ odraz částice

Pokud máme dvě mg zrcadla, částice je uvězněna mezi nimi $\Rightarrow$ magnetická nádoba. Toto zachycení ale není úplně perfektní. Jeho účinnost se udává jako "poměr zrcadla" B_m/B_0, kde B_m je intenzita mg pole v bodě reflexe (zde je *úhel sklonu* šroubovice $\pi/2$) a B_0 je mg pole ve středu mg nádoby.

Uvažujme nabitou částici, která má ve středu nádoby úhel sklonu α_0. Nechť v je rychlost částice, která v magnetostatickém poli zůstává konstantní. Protože se ani magnetický moment $|\boldsymbol{m}| = W_\perp / B$

nemění, platí

$$\frac{1}{2}mv^2(\sin^2\alpha)/B = \frac{1}{2}mv^2(\sin^2\alpha_0)/B_0\,, \tag{2.111}$$

kde α je úhel sklonu částice v místě s mg indukcí B. Proto pro tuto částici v libovolném bodě mg nádoby platí

$$\frac{\sin^2\alpha(z)}{B(z)} = \frac{\sin^2\alpha_0}{B_0}\,. \tag{2.112}$$

Předpokládejme nyní, že částice se odráží u *ústí* zrcadla, tj. $\alpha = \pi/2$ pro $B(z) = B_\mathrm{m}$ a proto

$$(\sin^2\alpha_0)/B_0 = 1/B_\mathrm{m}\,. \tag{2.113}$$

To znamená, že částice mající úhel sklonu α_0 ve středu nádoby rovný

$$\alpha_0 = \sin^{-1}[(B_0/B_m)^{1/2}] = sin^{-1}(v_\perp/v)_0 \tag{2.114}$$

je odražena v bodě, kde je mg indukce B_m. V mg nádobě s poměrem B_m/B_0 se částice mající úhel sklonu ve středu nádoby *větší* než α_0 odrazí před koncem mg nádoby. Na druhou stranu, jestliže má částice úhel sklonu ve středu nádoby *menší* než α_0, nedosáhne tento úhel nikdy hodnoty $\pi/2 \quad \Rightarrow$ částice unikne $\quad \Rightarrow \quad$ existuje tedy *ztrátový kužel* se středem ve středu nádoby a s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$ daným podle vztahu (2.114) poměrem B_m/B_0.

Kvůli výše uvedeným závěrům mají zařízení bez otevřených konců, tj. s mg siločárami uzavřenými do sebe, podstatnou výhodu při udržení plazmatu. Jednou z možností je torodiální geometrie. Zde ovšem činí problémy v udržení radiální nehomogenita pole. Proto je superponováno poloidální magnetické pole, což dává *spirálové* siločáry jako v *tokamaku*. Bohužel nestability a malé fluktuace opět ztěžují udržení horkého plazmatu.

Dobrým příkladem mg nádoby je magnetické pole Země, které zachycuje nabité částice z vesmíru nebo vzniklé ionizací atmosféry. Tyto částice tvoří *Van Allenovi radiační pásy* (viz obr. **??**).

2.9 Drift zakřivení

Až doposud nebyly diskutovány jevy způsobené zakřivením mg siločar. Zde budeme studovat pouze drift způsobený zakřivením siločar (členy $\partial B_x/\partial z$ a $\partial B_y/\partial z$), ale je dobré si uvědomit, že v tomto případě pole nesplňuje podmínku $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$, takže drifty způsobené zakřivením a gradientem pole se vyskytují pohromadě.

Budeme předpokládát, že členy $\partial B_x/\partial z$ a $\partial B_y/\partial z$ jsou tak malé, že zakřivení siločar je velmi velké ve srovnání s gyračním poloměrem. Zavedeme lokální systém souřadnic pohybující se podél siločar rychlostí $\boldsymbol{v}_\parallel$. Jednotkové vektory systému budou $\hat{\boldsymbol{B}}$ ve směru siločáry, $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ ve směru hlavní normály k siločáře a $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ ve směru kolmém na siločáru. Protože nejde o inerciální systém, objeví se odstředivá síla. $\boldsymbol{F}_\mathrm{c}$

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{c} = -\frac{m v_\parallel^2}{R}\,\hat{\boldsymbol{n}}_1\,, \tag{2.115}$$

kde R označuje lokální poloměr zakřivení mg siločar a $v_\parallel$

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{c} \times \boldsymbol{B}}{qB^2} = -\frac{m v_\parallel^2}{RqB^2}(\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \boldsymbol{B})\,. \tag{2.116}$$

Chceme vyjádřit jednotkový vektor $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ pomocí vektoru $\hat{\boldsymbol{B}}$ (podél siločar). Uvažujme element úseku siločáry ds svírající úhel dphi s $\hat{\boldsymbol{B}}$:

$$\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\phi \,. \tag{2.117}$$

Jestliže d$\hat{\boldsymbol{B}}$ označí změnu $\boldsymbol{B}$ díky posunu o ds, pak d$\hat{\boldsymbol{B}}$ míří ve směru $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ a jeho velikost je

$$|\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{B}}| = |\hat{\boldsymbol{B}}|\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\phi \,. \tag{2.118}$$

Následně

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{B}} = \hat{\boldsymbol{n}}_1 \mathrm{d}\phi \,. \tag{2.119}$$

Když podělíme tuto rovnici rovnicí (2.117) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{B}}}{ds} = \frac{\hat{\boldsymbol{n}}_1}{R} \,. \tag{2.120}$$

Derivaci d/ds podél B můžeme zapsat jako $(\hat{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla)$, takže tuto rovnici můžeme dále upravit

$$\frac{\hat{\boldsymbol{n}}_1}{R} = (\hat{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{B}} \,. \tag{2.121}$$

Poslední rovnici můžeme dosadit do rovnice (2.115)

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{c} = -mv_\parallel^2 (\hat{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{B}} \,. \tag{2.122}$$

Protože síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{c}$ je kolmá ke směru mg indukce $\boldsymbol{B}$ (její směr je dán vektorem $-\hat{\boldsymbol{n}}_1$), způsobí drift s rychlostí

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{C} = -\frac{mv_\parallel^2}{qB^2}[(\hat{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{B}}] \times \boldsymbol{B} \tag{2.123}$$

Protože $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{B}}$, můžeme předchozí dvě rovnice zapsat také jako

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -\frac{2W_{\|}}{B^2}[(\hat{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{B}}]_{\perp}\,, \tag{2.124}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}} = -\frac{2W_{\|}}{qB^4}[(\hat{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{B}}] \times \boldsymbol{B}\,. \tag{2.125}$$

Protože pro náboje opačného znaménka je drift zakřivení opačného směru, objeví se elektrický proud

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\delta V}\sum_i (q_i \boldsymbol{v}_{Ci}) = -2(\frac{1}{\delta V}\sum_i W_{\|i})\frac{[(\hat{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{B}}] \times \boldsymbol{B}}{B^4}\,. \tag{2.126}$$

2.10 Kombinovaný drift gradient-zakřivení

Drift zakřivení a gradientní drift se vždy objevují společně a oba míří stejným směrem, protože ∇B míří opačným směrem než $\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}$. Proto mohou být tyto dva drifty jednoduše sečteny:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{GC}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{C}} = -\frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{qB^3}(\nabla B) \times \boldsymbol{B} - \frac{mv_{\|^2}}{qB^4}[(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{B}\,. \tag{2.127}$$

Jestliže neexistují objemové proudy (např. ve vakuu), takže $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$, umožňuje vektorová identita (2.95) zápis v kompaktnější podobě

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{GC}} = -\frac{m}{qB^4}(v_{\|}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2)(\nabla\frac{1}{2}B^2) \times \boldsymbol{B}\,. \tag{2.128}$$

V zemské magnetosféře blízko rovníku gradientní drift (B klesá s výškou) a drift zakřivení způsobují pomalý drift kladně nabitých částic západním směrem a záporně nabitých částic východním směrem, tzv. prstencový proud.

2.11 Pohyb nabitých částic v pomalém časově proměnném el. poli

V následujících kapitolách budeme analyzovat pohyb nabitých částic v přítomnosti časově proměnných polí. V prvních dvou případech budeme uvažovat kombinaci homogenního časově proměnného el. pole a homogenního magnetostatického pole $\boldsymbol{B}$. Tento předpoklad je splněn pokud je toto magnetostatické pole mnohem větší než magnetické pole indukované časovou změnou $\boldsymbol{E}$. El. pole můžeme považovat za homogenní, pokud jsou jeho prostorové změny zanedbatelné vzhledem ke gyračnímu poloměru.

2.11.1 Pohybová rovnice a polarizační drift

Na okamžik budeme předpokládat, že charakteristický čas změny el. pole je mnohem větší než gyrační perioda. Složka rychlosti částice modél mg siločar je dána vztahem $m\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\parallel/\mathrm{d}t = q\boldsymbol{E}_\parallel$, takže můžeme obecně psát

$$\boldsymbol{v}_\parallel(t) - \boldsymbol{v}_\parallel(0) = \frac{q}{m}\int_0^t \boldsymbol{E}_\parallel(t')dt' \,, \tag{2.129}$$

což nám zatím nepřináší žádnou novou zajímavou informaci.

Protože pole $\boldsymbol{E}$ je pomalu se měnící, nečekáme, že složka rychlosti kolmá na mg siločáry se bude příliš lišit od stacionárního případu. Proto je rozumné hledat analogické řešení k řešení ve tvaru

$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v}'_\perp + \boldsymbol{v}_E$, tj.

$$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v}'_\perp + \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}_p\,, \tag{2.130}$$

kde $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ je elektromagnetická driftová rychlost, která se s časem pomalu mění. Dosazení tohoto vztahu do kolmé složky pohybové rovnice dává

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}'_\perp + \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}_p) = q[\boldsymbol{E}_\perp + (\boldsymbol{v}'_\perp + \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}_p) \times \boldsymbol{B}]\,. \tag{2.131}$$

Protože také $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{E}_\perp \times \boldsymbol{B}/B^2$, můžeme vztah přepsat jako

$$m\frac{d\boldsymbol{v}'_\perp}{dt} + m\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{E}_\perp \times \boldsymbol{B}}{B^2}\right) + m\frac{d\boldsymbol{v}_p}{dt} = q\boldsymbol{v}'_\perp \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{v}_p \times \boldsymbol{B}\,. \tag{2.132}$$

Jestliže položíme

$$\boldsymbol{v}_p = \frac{m}{qB^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{\partial t}\right), \tag{2.133}$$

můžeme rovnici (2.132) přepsat jako

$$m\frac{d\boldsymbol{v}'_\perp}{dt} + m\frac{d\boldsymbol{v}_p}{dt} = q\boldsymbol{v}'_\perp \times \boldsymbol{B}\,. \tag{2.134}$$

Pokud by se druhý člen na levé straně dal položit roven nule, jde o rovnici, která popisuje kruhový pohyb kolem mg siločar. Porovnáme-li relativní velikosti druhého členu nalevo s pravou stranou rovnice, dostaneme

$$\frac{|md\boldsymbol{v}_p/dt|}{|q\boldsymbol{v}'_\perp \times \boldsymbol{B}|} = \frac{|(m^2/qB^2)(\partial^2 E_\perp/\partial^2 t^2)|}{|qv'_\perp B|} = \; = |(E_\perp/B)/v'_\perp|(\omega^2 m^2)/(q^2B^2) = |v_E/v'_\perp|(\omega/\Omega_c)^2\,. \tag{2.135}$$

kde jsme předpokládali, že $\boldsymbol{E}_\perp$ je harmonicky časově proměnná veličina s kruhovou frekvencí ω. Bude-li tato frekvence mnohem menší než cyklotronová frekvence Ω_c, tj.

$$\omega \ll \Omega_\mathrm{c} \tag{2.136}$$

a pokud je člen $|v_\mathrm{E}/v'_\perp|$ rovněž malý, můžeme člen $m(\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{p}/\mathrm{d}t)$ ve srovnání s jinými členy rovnice (2.134) zanedbat a získáme rovnici

$$m\frac{d\boldsymbol{v}'_\perp}{dt} = q\boldsymbol{v}'_\perp \times \boldsymbol{B}\,, \tag{2.137}$$

která je identická případu statických polí. Z toho důvodu odpovídá $v'_\perp$ obvyklému kruhovému pohybu kolem mg siločar a nezávisí na změnách el. pole. Následující dva typy rychlostí tento kruhový pohyb doplňují:

$$v_\mathrm{E} = \frac{\boldsymbol{E}_\perp \times \boldsymbol{B}}{B^2} \tag{2.138}$$

$$v_\mathrm{p} = \frac{m}{qB^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{\partial t}\right). \tag{2.139}$$

Pomalé změny el. pole tedy způsobí drift s rychlostí v_p nazývaný *polarizační driftová rychlost*.

Protože v_p má opačný směr pro částice opačného znaménka, časově závislé el. pole produkuje čistý polarizační proud v neutrálním plazmatu a plazma se tedy chová jako *dielektrikum*. *Hustota polarizačního proudu* $\boldsymbol{J}_\mathrm{p}$ je rychlost toku kladných a záporných nábojů skrz jednotkovou plochu a je dána vztahem

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{p} = \frac{1}{\partial V}\sum_i q_i \boldsymbol{v}_{pi} = \left(\frac{1}{\partial V}\sum_i m_i\right)\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{\partial t}\right) = \frac{\rho_\mathrm{m}}{B^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{perp}}{\partial t}\right), \tag{2.140}$$

kde sčítáme přes všechny kladné a záporné náboje nacházející se v malém objemovém elementu δV a ρ_m je hustota hmotnosti plazmatu.

2.11.2 Dielektrická konstanta plazmatu

Polarizační vlastnosti plazmatu souvisí s časovou změnou el. pole, protože elektrony a ionty se mohou v konstantním poli nerušeně pohybovat a tedy zachovávat kvazineutralitu. Protože se plazma chová jako *dielektrikum*, takže můžeme přes hustotu polarizačního proudu $\boldsymbol{J}_\mathrm{p}$ zavést *dielektrickou konstantu* plazmatu. Za tím účelem můžeme rozdělit celkovou hustotu proudu $\boldsymbol{J}$ na hustotu polarizačního proudu $\boldsymbol{J}_\mathrm{p}$ a hustotu proudu způsobenou jinými zdroji $\boldsymbol{J}_0$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\mathrm{p} + \boldsymbol{J}_0 \,. \tag{2.141}$$

Kombinací $\boldsymbol{J}_\mathrm{p}$ se členem $\epsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$, který se objevuje na pravé straně Maxwellovy rovnice $\nabla \times \boldsymbol{B}$, dostaneme

$$\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{\partial t} + \frac{\rho_\mathrm{m}}{B^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{\partial t} = \epsilon_0 (1 + \frac{\rho_m}{\epsilon_0 B^2})\frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{\partial t} \,, \tag{2.142}$$

kde

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \frac{\rho_m}{\epsilon_0 B^2}) \tag{2.143}$$

je *efektivní elektrická permitivita* ve směru kolmém na mg pole. V některých případech můžeme být *relativní permitivita* ϵ_r velmi vysoká.

Výsledná hustota náboje ρ_p, která se akumuluje jako důsledek polarizačního proudu $\boldsymbol{J}_\mathrm{p}$, musí splňovat rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J}_p = 0 \,. \tag{2.144}$$

Z (2.144) a (2.140) máme

$$\rho_p = -\frac{\rho_m}{B^2}\nabla \cdot \boldsymbol{E}_\perp \,. \tag{2.145}$$

Celková hustota náboje může být rozdělena na

$$\rho = \rho_0 + \rho_p \,, \tag{2.146}$$

kde ρ_0 odpovídá $\boldsymbol{J}_0$. Za předpokladu, že paralelní složka el. pole zmizí vidíme, že

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_0 + \rho_p) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} - \frac{\rho_m}{\epsilon_0 B^2}\nabla \cdot \boldsymbol{E} \,. \tag{2.147}$$

Odtud s pomocí (2.143) máme

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon} \,. \tag{2.148}$$

Výslednou hustota náboje ρ_{p} můžeme tedy vzít korektně do úvahy zavedením efektivní elektrické permitivity ϵ.

Správnost zavedení efektivní elektrické permitivity plazmatu můžeme dále ověřit výpočtem *celkové hustoty energie* odpovídající poli $\boldsymbol{E}$, která je pro dielektrické médium o efektivní permitivitě ϵ dána $\epsilon E^2/2$. *Hustota energie* el. pole je dána jako

$$W_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tag{2.149}$$

Abychom vyjádřili dodatečnou driftovou kinetickou energii získanou částicí v důsledku polarizačního driftu, uvědomíme si, že vychýlení gyračního středu $\Delta \boldsymbol{r}$ pro změnu $\Delta \boldsymbol{E}_\perp$ za čas Δt je

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_p \Delta t = \frac{m}{qB^2}(\frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{\partial t})\Delta t = \frac{m}{qB^2}\Delta \boldsymbol{E}_\perp \,. \tag{2.150}$$

Příslušná práce vykonaná el. polem je pak

$$\Delta W = q\boldsymbol{E}_\perp \cdot (\Delta \boldsymbol{r}) = \frac{m}{B^2}\boldsymbol{E}_\perp \cdot (\Delta \boldsymbol{E}_\perp) = \Delta(\frac{1}{2}mE_\perp^2/B^2)\,. \tag{2.151}$$

Kinetickou energii částice odpovídající polarizačnímu driftu pak vyjádříme s využitím (2.139) jako

$$\Delta W = \Delta(\frac{1}{2}mv_E^2)\,. \tag{2.152}$$

Sečteme-li přes všechny částice v jednotkovém objemu příspěvky, dostaneme celkovou změnu energie systému

$$\Delta W_v = \Delta(\frac{1}{2}\rho_m v_E^2) = \Delta(\frac{1}{2}\rho_m E_\perp^2/B^2)\,. \tag{2.153}$$

Hustota kinetické energie odpovídající kruhovému pohybu částice není ovlivněna změnami el. pole. Celková hustota energie $W_T = W_E + W_v$ odpovídající el. poli je

$$W_T = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\rho_m v_E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(1 + \frac{\rho_m}{\epsilon_0 B^2}) = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \tag{2.154}$$

za předpokladu, že neexistuje paralelní složka el. pole. Tento výsledek tento dokončuje ověření správnosti zavedení efektivní el. permitivity plazmatu.