Kapitola 4

Střední hodnoty a makroskopické veličiny

4.1 Střední hodnota fyzikální veličiny

Ke každé částici v plazmatu můžeme přiřadit nějakou její vlastnost $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Celková velikost veličiny $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ pro částice α uvnitř objemového elementu fázového prostoru $d^3r\, d^3v$ je

$$\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^6 N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r\, d^3v. \tag{4.1}$$

Velikost této veličiny uvnitř objemového elementu d^3r nezávisle na rychlosti

$$d^3r \int_v \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \tag{4.2}$$

Střední hodnota

$$< \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int_v \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \tag{4.3}$$

4.2 Driftová a tepelná rychlost

Nechť $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{v} \Rightarrow$ střední neboli *driftová (unášivou) rychlost* $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = < \mathbf{v} >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int_v \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \tag{4.4}$$

Pokud $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ je nezávislá na rychlosti částic

$$< \chi(\boldsymbol{r}, t) >_\alpha = \chi(\boldsymbol{r}, t), \tag{4.5}$$

takže např. $< \mathbf{u}_\alpha > = \mathbf{u}_\alpha$.

Rychlost tepelného neuspořádaného pohybu neboli *náhodná (zvláštní) rychlost* je definována vzhledem k $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ takto

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha. \tag{4.6}$$

Následně vždy platí, že $< \mathbf{V}_\alpha > = 0$, neboť $< \mathbf{v} >_\alpha = \mathbf{u}_\alpha$.

4.3 Tok

Makroskopické veličiny *hustota proudu částic* (nebo *tok částic*), *tenzor tlaku* a *vektor toku tepla* (nebo *tok tepelné energie*) zahrnují vždy *tok* nějaké mikroskopické veličiny $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Tok $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ je definován jako velikost veličiny $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ přenesené skrze daný povrch na jednotku plochy a jednotku času.

Uvažujme povrchový element

$$d\boldsymbol{S} = dS\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{4.7}$$

kde $\hat{\boldsymbol{n}}$ je normála povrchového elementu: otevřený povrch $\Rightarrow$ dvě možnosti orientace normály, uzavřený povrch $\Rightarrow$ kladná normála konvenčně ven.

Částice v plazmatu se pohybují skrz povrchový element $d\boldsymbol{S}$ nesouce s sebou vlastnost $\chi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$. Počet těchto částic typu za čas dt?

Částice mající rychlost $< \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{dv} >$ a projdou skrze $d\mathbf{S}$ v časovém intervalu $< t, t + dt >$ musí ležet v objemu hranolu o základně dS a stěně vdt. Objem hranolu:

$$d^3r = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}dt = \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{v}dS\,dt. \tag{4.8}$$

Počet těchto částic v tomto objemu:

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r\,d^3v = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{v}dS\,dt\,d^3v, \tag{4.9}$$

$\Rightarrow$ celkovou přenesená velikost $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$:

$$\int_v \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{v}d^3v\,dS\,dt. \tag{4.10}$$

Čistý zisk transportu (tok) veličiny $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ve směru $\boldsymbol{n}$:

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = \int_v \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{v}d^3v \tag{4.11}$$

nebo za použití symbolů pro střední hodnotu

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = n_\alpha(\mathbf{r},t) < \chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v} >_\alpha = n_\alpha < \chi v_n >_\alpha, \tag{4.12}$$

kde $v_n = \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}$ označuje komponentu $\mathbf{v}$ ve směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{n}$.

- $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ je *skalární* veličina $\Rightarrow$ $\Phi_{\alpha n}(\chi)$ komponenta *vektoru toku* $\boldsymbol{\Phi}_{\alpha n}(\chi)$ ve směru $\boldsymbol{n}$, tj.

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Phi}_{\alpha n}(\chi), \tag{4.13}$$

  kde

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha(\chi) = n_\alpha < \chi\mathbf{v} >_\alpha . \tag{4.14}$$

- $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ je *vektorová* veličina, správně $\mathbf{X}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ $\Rightarrow$ *tenzor (2. řádu) toku*

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_\alpha(\chi) = n_\alpha < \mathbf{X}\otimes\mathbf{v} >_\alpha . \tag{4.15}$$

- $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ *tenzor 2. řádu* $\Rightarrow$ *tok ve tvaru tenzoru 3. řádu* a tak dále.

Můžeme oddělit příspěvek díky driftové rychlosti $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r},t)$ a příspěvek související s *náhodnou tepelnou* rychlostí $\mathbf{V}_\alpha$:

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = n_\alpha < \chi V_{\alpha n} > + n_\alpha < \chi u_{\alpha n} >, \tag{4.16}$$

kde $V_{\alpha n} = \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{V}_\alpha$ a $u_{\alpha n} = \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{u}_\alpha$.

Je-li $\mathbf{u}_\alpha = 0$ nebo zvolíme $d\mathbf{S}$ v souřadném systému, který se pohybuje driftovou rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = n_\alpha < \chi V_{\alpha n} >, \tag{4.17}$$

4.4 Tok částic

Tok částic: počet částic, které projdou daným povrchem na jednotku plochy za jednotku času. Vezmeme-li $\chi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=1$ ve vztahu (4.12):

$$\Gamma_{\alpha n}(\mathbf{r},t)=n_\alpha < v_n >_\alpha = n_\alpha u_{\alpha n}, \tag{4.18}$$

protože $< V_{\alpha n} >= 0$.

Jestliže $\mathbf{u}_\alpha = 0$, můžeme uvažovat tok pouze z kladného směru místo celkového čistého toku

$$\Gamma^+_{\alpha n}(\mathbf{r},t)=\int_{v(+)} \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{V}_\alpha f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v, \tag{4.19}$$

kde integrujeme pouze přes rychlosti $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{V}_\alpha > 0$.

Náhodný tok hmoty v kladném směru $\boldsymbol{n}$ je tedy dán vztahem $m_\alpha\Gamma^+_{\alpha n}$, kde m_α je hmotnost částic α.

4.5 Tenzor toku hybnosti

$\cdots$ celková hybnost přenesená skrze povrchový element $\boldsymbol{n}dS$ na jednotku plochy a času.

$$\chi_j = m_\alpha \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{j}, \tag{4.20}$$

kde $\boldsymbol{j}$ jednotkový vektor $\Rightarrow$ složka $\Pi_{\alpha jn}(\mathbf{r},t)$ tenzoru toku hybnosti

$$\Pi_{\alpha jn}(\mathbf{r},t)=n_\alpha < m_\alpha(\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{v})(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}) >_\alpha = \varrho_{m\alpha} < v_j v_n >_\alpha, \tag{4.21}$$

kde $\varrho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ je hustota hmotnosti částic α.

Platí $(< \mathbf{u}_\alpha \mathbf{V}_\alpha >= \mathbf{u}_\alpha < \mathbf{V}_\alpha >= 0)$

$$\Pi_{\alpha jn}(\mathbf{r}, t) = \varrho_{m\alpha} < V_j V_n > + \varrho_{m\alpha} u_j u_n \tag{4.22}$$

nebo v tenzorové podobě

$$\mathbf{\Pi}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \varrho_{m\alpha} < \mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\alpha > + \varrho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha . \tag{4.23}$$

V kartézských souřadnicích (x, y, z) můžeme tenzot toku hybnosti zapsat

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_\alpha &= \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{x} \Pi_{\alpha xx} + \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \Pi_{\alpha xy} + \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z} \Pi_{\alpha xz} \\ &+ \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{x} \Pi_{\alpha yx} + \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{y} \Pi_{\alpha yy} + \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{z} \Pi_{\alpha yz} \\ &+ \boldsymbol{z} \otimes \boldsymbol{x} \Pi_{\alpha zx} + \boldsymbol{z} \otimes \boldsymbol{y} \Pi_{\alpha zy} + \boldsymbol{z} \otimes \boldsymbol{z} \Pi_{\alpha zz} . \end{aligned} \tag{4.24}$$

nebo podle pravidel maticového násobení

$$\mathbf{\Pi}_\alpha = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \begin{pmatrix} \Pi_{\alpha xx} & \Pi_{\alpha xy} & \Pi_{\alpha xz} \\ \Pi_{\alpha yx} & \Pi_{\alpha yy} & \Pi_{\alpha yz} \\ \Pi_{\alpha zx} & \Pi_{\alpha zy} & \Pi_{\alpha zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Obvykle ovšem tenzor 2. řádu zapisujeme jen jako matici 3x3 obsahující prvky $\Pi_{\alpha ij}$.

$\Pi_{\alpha ij} = \Pi_{\alpha ji} \Rightarrow$ matice 3x3 je *symetrická* $\Rightarrow$ pouze 6 prvků tenzoru toku hybnosti na sobě nezávislých.

4.6 Tenzor tlaku

4.6.1 Definice tlaku

Tlak plynu - síla na jednotku plochy vytvářená molekulami plynu díky srážkám se stěnou nádoby obsahující plyn. Tato síla je rovna rychlosti přenosu hybnosti molekul na stěnu nádoby.

Definici tlaku zobecníme na jakýkoliv bod uvnitř plynu (myšlený plošný element $d\mathbf{S} = \boldsymbol{n}\, dS$ pohybující se střední rychlostí toku uvnitř plynu). Tlak na $d\mathbf{S}$ - *tok* hybnosti na plochu $d\mathbf{S}$ díky *náhodnému* pohybu částic.

Definujeme *parciální* tlak každého druhu částic α.

Vezmeme-li $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m_\alpha V_{\alpha j}$, dostaneme prvek $P_{\alpha jn}$ tenzoru tlaku

$$P_{\alpha jn} = \varrho_{m\alpha} < V_{\alpha j} V_{\alpha n} > . \tag{4.26}$$

Tenzor tlaku je tedy dán jako

$$\mathcal{P}_\alpha = \varrho_{m\alpha} < \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha > . \tag{4.27}$$

Z (4.25) získáme vztah mezi tenzorem tlaku $\mathcal{P}_\alpha$ a tenzorem toku hybnosti $\mathbf{\Pi}_\alpha$

$$P_{\alpha jn} = \mathbf{\Pi}_\alpha - \varrho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha . \tag{4.28}$$

4.6.2 Síla na jednotku plochy

Mějme malý objemový element ohraničený uzavřeným povrchem S a $d\mathbf{S} = \boldsymbol{n} dS$ jako element povrchu patřící k S, jehož normála $\boldsymbol{n}$ směřuje ven.

Předpokládejme na okamžik, že všechny částice α mají stejnou rychlost $\mathbf{V}_\alpha$.

- $\mathbf{V}_\alpha$ svírá úhel menší než 90° s $\boldsymbol{n} \Rightarrow$
  $n_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \boldsymbol{n})dS$ je počet částic, které opouštějí objem $\Rightarrow$ *pokles* hybnosti plazmatu uzavřeného povrchem S: $-n_\alpha m_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \boldsymbol{n})dS$, protože $(\mathbf{V}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}) > 0$
- $\mathbf{V}_\alpha$ svírá úhel větší než 90° s $\boldsymbol{n} \Rightarrow$
  $n_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \boldsymbol{n})dS$ je počet částic, které přicházejí do objemu $\Rightarrow$ *vzrůst* hybnosti plazmatu uzavřeného povrchem S: $-n_\alpha m_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \boldsymbol{n})dS$, protože $(\mathbf{V}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}) < 0$

Zobecněním, rychlost změny hybnosti plazmatu v uzavřeném objemu S, díky výměně částic α skrz povrchový element $\boldsymbol{n}dS$:

$$-n_\alpha m_\alpha < \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}) > dS = -\mathcal{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{4.29}$$

Síla na jednotku plochy $\mathbf{f}_\alpha$ působící na plošný element $\boldsymbol{n}dS$ jako výsledek náhodného pohybu částic je

$$\mathbf{f}_\alpha = -\mathcal{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{n} = -\varrho_{m\alpha} < \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{V}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}) > . \tag{4.30}$$

Jestliže vezmeme $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}$, máme

$$-\mathcal{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{x} P_{\alpha xx} - \boldsymbol{y} P_{\alpha yx} - \boldsymbol{z} P_{\alpha zx}, \tag{4.31}$$

kde $P_{\alpha xx}$ je *normála* k ploše $\Rightarrow$ *hydrostatický tlak*, zatímco prvky $P_{\alpha yx}$ a $P_{\alpha zx}$ jsou tlaky díky tangenciálním silám.

4.6.3 Síla na jednotku objemu

Sílu na jednotku objemu uvnitř plazmatu způsobená náhodným pohybem získáme integrací (4.29)

$$-\lim_{V\to 0}[\frac{1}{V}\oint_S \mathcal{P}_\alpha \boldsymbol{n} dS] = -\nabla\cdot\mathcal{P}_\alpha \tag{4.32}$$

a z Gaussova teorému

$$-\oint_S \mathcal{P}_\alpha.\boldsymbol{n} dS = -\int_V \nabla\mathcal{P}_\alpha d^3r \tag{4.33}$$

4.6.4 Skalární tlak a absolutí teplota

Důležitá makroskopická veličina je *skalární tlak* neboli *střední hydrostatický tlak*:

$$p_\alpha = \frac{1}{3}\sum_{i,j} P_{\alpha i,j}\delta_{i,j} = \frac{1}{3}\sum_{i} P_{\alpha i,i} = \frac{1}{3}(P_{\alpha xx} + P_{\alpha yy} + P_{\alpha zz}), \tag{4.34}$$

kde $\delta_{i,j}$ je *Kronekerovo delta*.
Ze vztahu (4.26)

$$p_\alpha = \frac{1}{3}\rho_{m\alpha} < V_{\alpha x}^2 + V_{\alpha y}^2 + V_{\alpha z}^2 > \tag{4.35}$$

Protože $V_\alpha^2 = V_{\alpha x}^2 + V_{\alpha y}^2 + V_{\alpha z}^2$, dostaneme

$$p_\alpha = \frac{1}{3}\rho_{m\alpha} < V_\alpha^2 > \tag{4.36}$$

Dalším důležitým makroskopickým parametrem je teplota. *Absolutní teplota* T_α pro částice α je mírou *střední kinetické energie náhodného* pohybu částic. Z termodynamiky: střední tepelná energie $kT_{\alpha\, i}/2$ přísluší každému translačnímu stupni volnosti ($i = x, y, z$):

$$\frac{1}{2}kT_{\alpha i} = \frac{1}{2}m_\alpha < V_{\alpha i}^2 > \tag{4.37}$$

Jestliže je rozdělení *izotropní* (např. Maxwell-Boltzmannovo)

$$p_\alpha = P_{\alpha xx} = P_{\alpha yy} = P_{\alpha zz} = \rho_{m\alpha} < V_{\alpha i}^2 > \tag{4.38}$$

a tedy dostáváme *stavovou rovnici pro ideální plyn*

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha \tag{4.39}$$

Pro Maxwell-Boltzmannovo rozdělelní

$$\mathcal{P}_\alpha = (\boldsymbol{xx} + \boldsymbol{yy} + \boldsymbol{zz}) p_\alpha = \mathbf{1} p_\alpha, \tag{4.40}$$

kde **1** je jednotkový tenzor

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

V tomto případě

$$-\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha = -(\boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial x} p_\alpha + \boldsymbol{y}\frac{\partial}{\partial y} p_\alpha + \boldsymbol{z}\frac{\partial}{\partial z} p_\alpha) = -\nabla p_\alpha, \tag{4.42}$$

takže pro *izotropní* rozdělení rychlosti je síla na jednotkový objem způsobená náhodným pohybem dána gradientem skalárního tlaku.

V některých praktických příkladech předpokládáme, že

$$\mathcal{P}_\alpha = \boldsymbol{xx} P_{\alpha xx} + \boldsymbol{yy} P_{\alpha yy} + \boldsymbol{zz} P_{\alpha zz} \tag{4.43}$$

nebo

$$\mathcal{P}_\alpha = \begin{pmatrix} P_{\alpha xx} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\alpha yy} & 0 \\ 0 & 0 & P_{\alpha zz} \end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

což vyjadřuje *anizotropii* náhodných rychlostí, ale nepřítomnost tangenciálních sil, tj. viskozity. V tomto případě máme rozdílnou absolutní teplotu $T_{\alpha i}$ pro každý směr.

4.7 Vektor toku tepla

Komponenta vektoru toku tepla $q_{\alpha n}$ je def. jako tok *náhodné* neboli *tepelné energie* skrz povrch s normálou $\boldsymbol{n}$. Vezmeme $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m_\alpha V_\alpha^2/2$ a dostaneme

$$q_{\alpha n} = \mathbf{q}_\alpha . \boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < V_\alpha^2 \, \mathbf{V}_\alpha . \boldsymbol{n} > \tag{4.45}$$

Vektor toku tepla je tedy

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < V_\alpha^2 \, \mathbf{V}_\alpha > . \tag{4.46}$$

4.8 Tenzor toku tepelné energie

Standardně můžeme zavést *tenzor 3. řádu toku tepelné energie*

$$\mathcal{Q}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\alpha > \tag{4.47}$$

a jeho složky

$$Q_{\alpha\, ijk} = \rho_{m\alpha} < V_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\alpha k} > \tag{4.48}$$

Za použití kartézských souřadnic

$$\mathcal{Q}_\alpha = \mathcal{Q}_{\alpha x}\boldsymbol{x} + \mathcal{Q}_{\alpha y}\boldsymbol{y}, + \mathcal{Q}_{\alpha z}\boldsymbol{z} \tag{4.49}$$

kde každý *tenzor 2. řádu* $\mathcal{Q}_{\alpha\, n}$ $(n = x,\ y,\ z)$

$$\mathcal{Q}_{\alpha n} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\alpha xxn} & \mathcal{Q}_{\alpha xyn} & \mathcal{Q}_{\alpha xzn} \\ \mathcal{Q}_{\alpha yxn} & \mathcal{Q}_{\alpha yyn} & \mathcal{Q}_{\alpha yzn} \\ \mathcal{Q}_{\alpha zxn} & \mathcal{Q}_{\alpha zyn} & \mathcal{Q}_{\alpha zzn} \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

Abychom získali vztah mezi vektorem toku tepla $\mathbf{q}_\alpha$ a tenzorem toku tepelné energie $\mathcal{Q}_\alpha$, přepišme vztah (4.45) jako

$$q_{\alpha n} = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha}(< V_{\alpha x}^2 V_{\alpha n} > + < V_{\alpha y}^2 V_{\alpha n} > + < V_{\alpha z}^2 V_{\alpha n} >) \tag{4.51}$$

a tedy

$$q_{\alpha n} = \frac{1}{2}(Q_{\alpha xxn} + Q_{\alpha yyn} + Q_{\alpha zzn}) \tag{4.52}$$

4.9 Tenzor toku celkové energie

Analogicky jako při definici tenzoru toku tepelné energie

$$E_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < v_i v_j v_k >_\alpha, \tag{4.53}$$

což představuje jednu z 9 složek *tenzoru toku celkové energie* $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r},t)$. Tato složka je vlastně součtem tří výrazů

$$\begin{aligned} < v_i v_j v_k >_\alpha &= < V_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\alpha k} + u_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\alpha k} + u_{\alpha j} V_{\alpha k} V_{\alpha i} \\ &+ u_{\alpha k} V_{\alpha i} V_{\alpha j} + u_{\alpha i} u_{\alpha j} V_{\alpha k} + u_{\alpha j} u_{\alpha k} V_{\alpha i} \\ &+ u_{\alpha k} u_{\alpha i} V_{\alpha j} + u_{\alpha i} u_{\alpha j} u_{\alpha k}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Neboť $< u_{\alpha i} >= u_{\alpha i}$ a $< V_{\alpha i} >= 0$ a za použití (4.48) a (4.26)

$$\rho_{m\alpha} < v_i v_j v_k >_\alpha = \rho_{m\alpha} u_{\alpha i} u_{\alpha j} u_{\alpha k} + (\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha)_{ijk} + Q_{\alpha ijk}, \tag{4.55}$$

kde jsme použili zápis

$$(\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha)_{ijk} = u_{\alpha i} P_{\alpha jk} + u_{\alpha j} P_{\alpha ki} + u_{\alpha k} P_{\alpha ij}. \tag{4.56}$$

Takže vztah (4.53) můžeme zapsat ve tvaru tenzoru 3. řádu

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < \mathbf{vvv} >_\alpha = \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha) + \mathcal{Q}_\alpha \tag{4.57}$$

Tenzor celkového toku energie je tedy součtem toku energie přenesené *konvektivním* pohybem částic (1. dva členy) a toku *tepelné* energie $\mathcal{Q}_\alpha$ způsobeného náhodným tepelným pohybem částic.

4.10 Vyšší momenty rozdělovací funkce

První čtyři *momenty rozdělovací funkce* jsou hustota $n_\alpha(\mathbf{r},t)$, driftová rychlost $u_{\alpha i}(\mathbf{r},\mathbf{t})$, tenzor 2. řádu toku hybnosti $\mathbf{\Pi}_{\alpha ij}(\mathbf{r},t)$ a tenzor 3. řádu toku celkové energie $E_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t)$:

$$
\begin{aligned}
n_\alpha(\mathbf{r},t) &= \int_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v &(4.58)\\
u_{\alpha i}(\mathbf{r},\mathbf{t}) &= < v_i >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r},t)}\int_v v_i f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v &(4.59)\\
\Pi_{\alpha ij}(\mathbf{r},t) &= \rho_{m\alpha} < v_i v_j >_\alpha = m_\alpha \int_v v_i v_j f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v &(4.60)\\
E_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t) &= \rho_{m\alpha} < v_i v_j v_k >_\alpha = m_\alpha \int_v v_i v_j v_k f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v &(4.61)
\end{aligned}
$$

Jestliže $u_{\alpha i}(\mathbf{r},\mathbf{t}) = 0$, máme $\mathbf{v} = \mathbf{V}_\alpha \Rightarrow$ z tenzoru toku hybnosti $\mathbf{\Pi}_{\alpha\mathbf{ij}}(\mathbf{r},t)$ se stane tenzor tlaku $\mathcal{P}_\alpha$ a z tenzoru toku celkové energie $E_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t)$ se stane tenzor toku tepelné energie $\mathcal{Q}_\alpha$.

Jako formální rozšíření výše uvedených definicí, můžeme, pokud je to nutné, zavést vyšší momenty rozdělovací funkce

$$M^{(N)}_{\alpha ij...k}(\mathbf{r},t) = \int_v v_i v_j ... v_k f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v, \qquad (4.62)$$

kde složky rychlosti v_i se v integrálu objeví N-krát.