

Kapitola 6

Interakce částic v plazmatu

6.1 Úvod

Slova *srážka* a *interakce* mohou být používány v mikroskopickém světě jako synonyma. Srážky dělíme na

- *elastické*, tj. *pružné* - platí zákon zachování hmotnosti, hybnosti a energie takovým způsobem, že nedochází ke změněm vnitřních stavů částic, vzniku ani zániku částic.
- *neelastické*, tj. *nepružné* - změna vnitřního stavu několika nebo všech zúčastněných částic, možnost vzniku nebo zániku částic; *rekombinace* nabitých částic za vzniku částice neutrální; *záchyt* nabité částice částicí neutrální za vzniku větší nabité částice; energie elektronu atomu se může zvýšit \Rightarrow *excitace* elektronu do vyššího stavu nebo dokonce oddělení elektronu od atomu, tj. *ionizace*.

V plazmatu musí především rozlišovat

- interakce mezi nabitými částicemi: podle Coulombova zákona, tj. závislost $1/r^2 \Rightarrow$ *dalekodosahové interakce* \Rightarrow *mnohonásobné* interakce
- interakce mezi nabitou částicí a neutrálem nebo dvěma neutrály: silové pole neutrální částice dostatečně silné pouze v oblasti elektronového obalu \Rightarrow *krátkodosahové interakce* \Rightarrow neutrální částice neinteragují často s dalšími částicemi a naprosto zřídka s více částicemi záraz \Rightarrow především *binární* srážky

Mnoha-částicové Coloumbovské interakce můžeme popsat také jako současně binární interakce, v praxi jako sérii následných binárních interakcí s malým úhlem. Tyto interakce jsou důležité pro chování plazmatu. Nicméně ve *slabě ionizovaném plazmatu* nehrají několikanásobné interakce velkou roli a jednoduché binární srážky adekvátně popisují jevy v plazmatu. Největší roli v těchto typech plazmatu pak hrají elektrony, protože rychle reagují na el. a mg. pole.

6.2 Binární srážky

Uvažujme pružnou srážku dvou částic o hmotnosti m a m_1 o rychlostech \mathbf{v} a \mathbf{v}_1 před srážkou a \mathbf{v}' a \mathbf{v}'_1 po srážce. V následujícím textu budou veličiny s čárkou označovat veličiny po srážce.

Můžeme pracovat v *laboratorním* systému souřadnic, ale konvečně spíše v systému, kde částice m je v klidu a částice m_1 se přibližuje *relativní rychlostí*

$$\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}. \quad (6.1)$$

Po srážce je relativní rychlost

$$\mathbf{g}' = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'. \quad (6.2)$$

Záměrná vzdálenost b je definována jako definována jako minimální vzdálenost přiblížení, pokud by nedošlo k interakci. *Úhel rozptylu* je χ a úhel orientace *orbitální roviny* (nebo *roviny srážky*) vzhledem k nějakému danému směru kolmému na orbitální rovinu je ε .

Rychlost *těžiště* srážejících se částic před srážkou je

$$\mathbf{c}_0 = \frac{m\mathbf{v} + m_1\mathbf{v}_1}{m + m_1} \quad (6.3)$$

a po srážce

$$\mathbf{c}'_0 = \frac{m\mathbf{v}' + m_1\mathbf{v}'_1}{m + m_1} \quad (6.4)$$

Počáteční rychlosti můžeme vyjádřit pomocí \mathbf{c}_0 a \mathbf{g}

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}_0 - \frac{\mu}{m}\mathbf{g} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{c}_0 + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{g}, \quad (6.6)$$

kde μ označuje redukovanou hmotnost

$$\mu = \frac{mm_1}{m + m_1}. \quad (6.7)$$

Podobně obdržíme i rychlosti po srážce

$$\mathbf{v}' = \mathbf{c}'_0 - \frac{\mu}{m} \mathbf{g}' \quad (6.8)$$

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{c}'_0 + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{g}'. \quad (6.9)$$

Ze zákona zachování hybnosti během pružné srážky

$$m\mathbf{v} + m_1\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}' + m_1\mathbf{v}'_1 \quad (6.10)$$

nebo ze vztahů (6.3) a (6.4)

$$(m + m_1)\mathbf{c}_0 = (m + m_1)\mathbf{c}'_0, \quad (6.11)$$

takže

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}'_0 \quad (6.12)$$

Ze zákona zachování energie během pružné srážky máme

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m_1v_1^2) = \frac{1}{2}[m(v')^2 + m_1(v'_1)^2] \quad (6.13)$$

a přímou úpravou vztahů (6.5), (6.6), (6.8) a (6.9)

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m_1v_1^2) = \frac{1}{2}(m + m_1)c_0^2 + \frac{1}{2}\mu g^2 \quad (6.14)$$

$$\frac{1}{2}[m(v')^2 + m_1(v'_1)^2] = \frac{1}{2}(m + m_1)c_0'^2 + \frac{1}{2}\mu g'^2. \quad (6.15)$$

Protože $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}'_0$ dostáváme

$$g = g', \quad (6.16)$$

tedy *velikost*, ale nikoliv směr, je zachována při binárních pružných srážkách.

Úhel χ mezi \mathbf{g} a \mathbf{g}' je *úhel rozptylu* nebo také *deflekční úhel*. Abychom dostali vztah mezi vektory \mathbf{g} a \mathbf{g}' , zvolíme např. kartézské souřadnice s osou z ve směru \mathbf{g} . Máme tedy

$$g_x = g_y = 0 \quad (6.17)$$

$$g_z = g = g' \quad (6.18)$$

$$g'_x = g \sin \chi \cos \varepsilon \quad (6.19)$$

$$g'_y = g \sin \chi \sin \varepsilon \quad (6.20)$$

$$g'_z = g \cos \chi, \quad (6.21)$$

kde ε určuje relativní orientaci *roviny srážky*. Pokud tedy známe počáteční rychlosti a úhel rozptylu χ můžeme určit rychlosti po srážce. Opačně, pokud známe konečné rychlosti a χ , můžeme určit původní rychlosti. Tento fakt umožňuje jednoduše uvažovat o *inverzní srážce*, protože χ je stejné jako pro přímou srážku (\mathbf{b} , vzájemná síla a g jsou stejné).

Úhel rozptylu je jediná veličina, která závisí na detailech srážkového procesu. V případě vzájemné síly, která závisí pouze na vzdálenosti mezi interagujícími částicemi, χ závisí na následujících parametrech:

1. zákon vzájemného silového působení
2. velikost vzájemné rychlosti g
3. záměrná vzdálenost b .

6.3 Dynamika binární srážky

Dynamika binární srážky je řízena zákonem vzájemného silového působení. Pro každé b existuje odpovídající χ a jejich vztah je nezávislý na zákonu vzájemných sil. Tento vztah je obsažen v *diferenciálním účinném průřezu* definovaném v odstavci 6.5.

Uvažujme srážku dvou částic m a m_1 v souřadném systému částice m . Polohový vektor částice m_1 bude \mathbf{r} . Předpokl., že síla interakce je centrální síla, tj.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{r} \quad (6.22)$$

a potenciální energii lze tedy vyjádřit takto

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\mathbf{r}. \quad (6.23)$$

Pro centrální sílu je torze $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ nulová. Torze je časová změna momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad (6.24)$$

\Rightarrow moment hybnosti je pohybová konstanta; \mathbf{r} je stále kolmé na konstantní směr $\mathbf{L} \Rightarrow$ pohyb leží v rovině.

Použijeme polární souřadnice (r, θ) a uvědomíme si, že jednotkové vektory $\hat{\mathbf{r}}$ a $\hat{\theta}$ závisí na θ :

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}. \quad (6.25)$$

Protože $d\hat{\mathbf{r}}/d\theta = \hat{\theta}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \quad (6.26)$$

nebo jinak zapsáno

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\theta}. \quad (6.27)$$

Trajektorii částice nalezneme ze zákona zachování energie a momentu hybnosti pomocí analogie s jednočásticovým problémem. Kinetická energie relativního pohybu je

$$E_k = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2). \quad (6.28)$$

Ze ZZE

$$\frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2} \mu g^2. \quad (6.29)$$

Moment hybnosti vzhledem k počátku je dán

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\mu \dot{\mathbf{r}}) = \mu r^2 \dot{\theta} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta}). \quad (6.30)$$

Původní hodnota momentu hybnosti je $b\mu g$, a tedy

$$r^2 \dot{\theta} = bg. \quad (6.31)$$

Pomocí předchozích vztahů získáme diferenciální rovnici pro dráhu $r(\theta)$. Napíšeme

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr d\theta}{d\theta dt}, \quad (6.32)$$

použijeme (6.31) a (6.29) k eliminaci $d\theta/dt$ a dr/dt . Diferenciální rovnice trajektorie:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right], \quad (6.33)$$

což přeskupíme takto

$$d\theta = \pm \frac{b}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right]^{-1/2} dr. \quad (6.34)$$

Výběr znaménka se musí udělat z fyzikálního náhledu. Kladné znaménko se použije pro $\theta > \theta_m$, záporné pro $\theta < \theta_m$, kde θ_m je úhel v bodě největšího přiblížení (*vertexa* trajektorie). Polohový vektor v tomto bodě označíme r_m .

Vzdálenost největšího přiblížení r_m dostaneme z (6.33), když si uvědomíme $dr/d\theta = 0$ a $r = r_m$:

$$1 - \frac{b^2}{r_m^2} - \frac{2U(r_m)}{\mu g^2} = 0 \quad (6.35)$$

tedy

$$r_m = b \left[1 - \frac{2U(r_m)}{\mu g^2} \right]^{-1/2} \quad (6.36)$$

Abychom určili *úhel rozptylu* χ , uvědomme si, že

$$\chi = \pi - 2\theta_m \quad (6.37)$$

a integrujme vztah (6.34) od θ_m po jiný úhel θ :

$$\theta - \theta_m = \pm \int_{r_m}^r \frac{b}{x^2} \left[1 - \frac{b^2}{x^2} - \frac{2U(x)}{\mu g^2} \right]^{-1/2} dx, \quad (6.38)$$

(stejná konvence znamének). Pro $r \rightarrow \infty$ máme $\theta_{(-)} \rightarrow 0$, zatímco $\theta_{(+)} \rightarrow 2\theta_m$, takže

$$\theta_m = \int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2} \right]^{-1/2} dr \quad (6.39)$$

a úhel rozptylu je

$$\chi(b, g) = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2} \right]^{-1/2} dr. \quad (6.40)$$

Abychom mohli vypočítat χ musíme znát záměrnou vzdálenost b , počáteční rychlosti g a vzájemnou potenciální energii interagujících částic $U(\mathbf{r})$.

6.4 Vyjádření úhlu rozptylu

Ukážeme si dvě konkrétní použití vztahu (6.40) k určení úhlu rozptylu χ pomocí záměrné vzdálenosti b a počáteční rychlosti g .

6.4.1 Dvě perfektně elastické tuhé koule

Uvažujme srážku dvou perfektně elastických tuhých koulí o poloměru R_1 a R_2 . Potenciální energie je dána

$$\begin{aligned} U(r) &= 0 \text{ pro } r > R_1 + R_2 \\ &= \infty \text{ pro } r < R_1 + R_2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Protože koule nemohou do sebe pronikat je jejich vzdálenost $r \geq R_1 + R_2$ a tedy zjednodušíme vztah (6.40) jako

$$\chi = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \right]^{-1/2} dr. \quad (6.42)$$

Použijeme substituci $y = b/r$:

$$\chi = \pi - 2 \int_0^{b/r_m} (1 - y^2)^{-1/2} dy, \quad (6.43)$$

což dává

$$\chi = \pi - 2 \sin^{-1}(b/r_m). \quad (6.44)$$

Pro $b > R_1 + R_2$ nedochází k žádné interakci $\Rightarrow r_m = b$. Pro $b \leq R_1 + R_2$ se koule sráží $\Rightarrow r_m = R_1 + R_2$.

$$\begin{aligned} \chi &= \pi - 2 \arcsin \left(\frac{b}{R_1 + R_2} \right) \text{ pro } b \leq R_1 + R_2 \\ &= 0 \text{ pro } b > R_1 + R_2 \end{aligned} \quad (6.45)$$

6.4.2 Coulombovský interakční potenciál

Uvažujme případ Coulombovského pole, jehož interakční potenciální energie je

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r}, \quad (6.46)$$

kde q a q_1 jsou elektrické náboje částic o hmotnosti m a m_1 . Dosazením do vztahu (6.40) dostaneme

$$\chi(b, g) = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{qq_1}{2\pi\epsilon_0\mu g^2 r} \right]^{-1/2} dr. \quad (6.47)$$

Vzdálenost nejbližšího přiblížení r_m můžeme dostat z (6.36) a (6.46). Zavedeme konstantu

$$b_0 = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0\mu g^2}, \quad (6.48)$$

takže b_0 vyjadřuje vzdálenost, na které je el. potenciální energii interakce dvakrát větší než relativní kinetická energie nekonečna. Substitucí proměnné $y = 1/r$ a použitím b_0 ve vztahu (6.47) dostaneme

$$\chi(b, g) = \pi - 2b \int_0^{1/r_m} (-b^2 y^2 - 2b_0 y + 1)^{-1/2} dy. \quad (6.49)$$

Použijeme standardní vztah pro integraci (Rektorys):

$$\int (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arcsin \left[\frac{-2\alpha x - \beta}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}} \right], \quad (6.50)$$

kde v našem případě $\alpha = -b^2$, $\beta = -2b_0$ a $\gamma = 1$. Použijeme meze integrálu, kde r_m je dáno vztahem (??):

$$\chi(b, g) = 2 \arcsin \left[\frac{b_0}{(b_0^2 + b^2)^{1/2}} \right]. \quad (6.51)$$

Tato rovnice se ekvivalentně dá přepsat jako

$$\tan\left(\frac{1}{2}\chi\right) = \frac{b_0}{b}. \quad (6.52)$$

- $\chi = \pi \Rightarrow b = 0$
- $\chi = \pi/2 \Rightarrow b = b_0$
- $\chi = 0 \Rightarrow b \rightarrow \infty$
- znaménko náboje částic stejné $\Rightarrow b_0$ a χ jsou kladné
- znaménko náboje částic různé $\Rightarrow b_0$ a χ jsou záporné

6.5 Účinný průřez

Zatím interakce pouze dvou částic ALE účinný průřez definován ve smyslu svazku totožných částic dopadajících na terč \Rightarrow mějme svazek částic o hmotnosti m_1 rovnoměrně rozprostřených v prostoru

dopadajících rychlostí $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ na částici m . Částice se záměrnou vzdáleností b se rozptylují pod úhlem χ , se vzdáleností $b + db$ pod úhlem $\chi + d\chi$. Počet částic rozptýlených za 1s do $\langle \chi, \chi + d\chi \rangle$ závisí na toku částic Γ .

6.5.1 Diferenciální účinný průřez

Počet částic rozptýlených za jednotku času do prostorového úhlu $d\Omega$ vyjádřeného pomocí úhlů χ a ε :

$$\frac{dN}{dt} = \sigma(\chi, \varepsilon) \Gamma d\Omega, \quad (6.53)$$

kde $\sigma(\chi, \varepsilon)$ je *diferenciální účinný průřez* nebo *úhlová rozdělovací funkce*. Stejný počet částic dopadá před srážkou z oblasti dané intervaly $\langle b, b + db \rangle$ a $\langle \varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon \rangle$:

$$\frac{dN}{dt} = \Gamma b db d\varepsilon. \quad (6.54)$$

A tedy

$$\sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega = b db d\varepsilon. \quad (6.55)$$

Protože $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varepsilon$:

$$\sigma(\chi, \varepsilon) \sin \chi d\chi = b db \quad (6.56)$$

a dále

$$\sigma(\chi, \varepsilon) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \quad (6.57)$$

Absolutní hodnota je použita, protože b klesá, když χ stoupá ALE dif. účinný průřez vyjadřuje kladnou veličinu - počet rozptýlených částic. Veličinu $db/d\chi$ vyjádříme ze vztahu (6.40), jestliže budeme znát $U(r)$. $\sigma(\chi, \varepsilon)$ má rozměr plochy.

6.5.2 Celkový účinný průřez rozptylu

σ_t je definován jako počet částic rozptýlený za jednotku času a jednotku toku částic do *všech směrů* od rozptylového centra:

$$\sigma_t = \int_{\Omega} \sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi \sigma(\chi, \varepsilon) \sin \chi d\chi. \quad (6.58)$$

Účinný průřez samozřejmě závisí na relativní rychlosti g .

Ve speciálním případě, kdy je interakční potenciál *izotropní* (např. Coulombovský), máme

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) \sin \chi d\chi. \quad (6.59)$$

6.5.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Účinný průřez lze definovat pro různé interakční procesy. Jeden z důležitých je přenos hybnosti:

$$\sigma_m = \frac{\text{přenos hybnosti za sekundu}}{\text{dopadající tok hybnosti}}, \quad (6.60)$$

kde hybnosti před srážkou je $\Gamma \mu g$. Po srážce je hybnost ve směru dopadu $\mu g \cos \chi$, takže přenesená hybnost je $\mu g(1 - \cos \chi)$. Celkový přenos hybnosti všemi dopadajícími částicemi

$$\Gamma \mu g \int_{\Omega} (1 - \cos \chi) \sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega, \quad (6.61)$$

a protože celkový tok hybnosti dopadajících částic je $\Gamma \mu g$

$$\sigma_m = \int_{\Omega} (1 - \cos \chi) \sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega. \quad (6.62)$$

V případě *izotropní* interakce a využitím $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varepsilon$

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos \chi) \sigma(\chi) \sin \chi d\chi. \quad (6.63)$$

Protože $\sigma(\chi)$ můžeme chápat jako úhlovou rozdělovací funkci lze ji brát jako váhovou funkci pro výpočet *střední hodnoty* jakékoliv funkce $F(\chi)$ závislé na úhlu rozptylu:

$$\langle F(\chi) \rangle = \frac{\int_\Omega F(\chi) \sigma(\chi) d\Omega}{\int_\Omega \sigma(\chi) d\Omega}, \quad (6.64)$$

což můžeme psát jako

$$\langle F(\chi) \rangle = \frac{2\pi}{\sigma_t} \int_0^\pi F(\chi) \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \quad (6.65)$$

a podle definice střední hodnoty

$$\sigma_m = \sigma_t \langle 1 - \cos \chi \rangle. \quad (6.66)$$

6.6 Další srážkové parametry

Uvažujme tok $\Gamma = nv$ částic o hmotnosti m , hustotě n a konstantní rychlosti v dopadajících z jedné strany na terč složený z "nekonečně" hmotných částic o hustotě n_g , které jsou v klidu. Pak $g \equiv v$. Nechť dn je počet dopadajících částic na jednotku objemu ve vzdálenosti x , které interagují s částicemi terče na vzdálenosti dx a jsou tedy odstraněny ze svazku dopadajících částic (proto znaménko mínus):

$$dn = -\sigma_t n n_g dx, \quad (6.67)$$

kde konstanta úměrnosti σ_t je celkový účinný průřez. Podobný vztah pro tok získáme vynásobením (6.67) rychlostí v

$$d\Gamma = -\sigma_t \Gamma n_g dx \quad (6.68)$$

neboli

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = \frac{dn}{n} = -n_g \sigma_t dx \quad (6.69)$$

a po integraci

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \exp(-n_g \sigma_t x) = \Gamma_0 \exp(-x/\lambda), \quad (6.70)$$

kde

$$\lambda = \frac{1}{n_g \sigma_t} \quad (6.71)$$

je *střední volná dráha* úbytku částic v dopadajícím svazku. Střední doba mezi interakcemi je

$$\tau = \frac{\lambda}{v}. \quad (6.72)$$

Její převrácená hodnota je *interakční* neboli *srážková frekvence*

$$\nu \equiv \tau^{-1} = n_g \sigma_t v, \quad (6.73)$$

což je počet interakcí za jednu sekundu, které má dopadající částice, s částicemi terče. Můžeme také definovat srážkovou frekvenci na jednotku hustoty

$$K = \sigma_t v, \quad (6.74)$$

což se nazývá *rychlostní konstanta*. Samozřejmě

$$\nu = K n_g. \quad (6.75)$$

6.7 Účinné průřezy pro srážku tuhých koulí

6.7.1 Diferenciální účinný průřez pro rozptyl

Využijeme vztah (6.45) pro úhel rozptylu a $b \leq R_1 + R_2$

$$b = (R_1 + R_2) \cos\left(\frac{1}{2}\chi\right) \quad (6.76)$$

a tedy

$$\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \sin\left(\frac{1}{2}\chi\right). \quad (6.77)$$

Dosazením do vztahu (6.57)

$$\sigma = \frac{1}{4}(R_1 + R_2)^2 \quad (6.78)$$

6.7.2 Celkový účinný průřez pro rozptyl

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{4}(R_1 + R_2)^2 \sin \chi d\chi = \pi(R_1 + R_2)^2 \quad (6.79)$$

Dva speciální případy: elektron s molekulou o poloměru R , $\sigma = R^2/4$ a $\sigma_t = \pi R^2$; dvě stejné molekuly o průměru D , $\sigma = D^2/4$ a $\sigma_t = \pi D^2$.

Uvědomme si, že pro srážku tuhých koulí existuje mezní hodnota b , nad kterou nedochází ke srážce. Právě toto způsobí, že celkový účinný průřez σ_t není nekonečná hodnota.

6.7.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Ze vztahu (6.63) pro účinný průřez pro přenos hybnosti a ze vztahu (6.78)

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{4} (R_1 + R_2)^2 (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi = \frac{1}{2} \pi (R_1 + R_2)^2 \left(\int_0^\pi \sin \chi d\chi - \int_0^\pi \cos \chi \sin \chi d\chi \right). \quad (6.80)$$

Po integraci

$$\sigma_m = \pi (R_1 + R_2)^2 \quad (6.81)$$

Střední hodnota změny hybnosti na jednu částici je dána vztahem (6.65)

$$\langle \mu g (1 - \cos \chi) \rangle = \frac{2\pi}{\sigma_t} \int_0^\pi \mu g (1 - \cos \chi) \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \quad (6.82)$$

a dle vztahu (6.63)

$$\langle \mu g (1 - \cos \chi) \rangle = \mu g \frac{\sigma_m}{\sigma_t}, \quad (6.83)$$

což zjednodušíme za použití výrazů pro účinné průřezy (6.81) a (6.79)

$$\langle \mu g (1 - \cos \chi) \rangle = \mu g \quad (6.84)$$

6.8 Účinné průřezy pro Coulombovský potenciál

6.8.1 Diferenciální účinný průřez

Derivací vztahu (6.52)

$$\left| \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{b^2}{2b_0 \cos^2(\chi/2)}, \quad (6.85)$$

takže diferenc. účinný průřez je

$$\sigma(\chi) = \frac{b^3}{2b_0 \sin \chi \cos^2(\chi/2)} \quad (6.86)$$

nebo za použití $\tan \chi/2 = b_0/b$

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4 \sin^4(\chi/2)}, \quad (6.87)$$

což je vztah pro *Rutherfordovský rozptyl*. Protože $2 \sin^2(\chi/2) = (1 - \cos \chi)$, máme

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{(1 - \cos \chi)^2} \quad (6.88)$$

6.8.2 Celkový účinný průřez pro rozptyl

Protože dif. účinný průřez prudce roste pro $\chi \rightarrow 0$, bude celkový účinný průřez σ_t nekonečný. Ze vztahů (6.59) a (??)

$$\sigma_t = 2\pi \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \sigma(\chi) \sin \chi d\chi = 2\pi b_0^2 \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \frac{\sin \chi}{(1 - \cos \chi)^2} d\chi, \quad (6.89)$$

kde $\chi_{\min} = 0$. Integrovaním

$$\sigma_t = \pi b_0^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\chi_{\min}/2)} - 1 \right], \quad (6.90)$$

což jasně dává $\sigma_t = \infty$ pro $\chi_{\min} = 0$. Příspěvek částic s velmi malými deflekčními úhly činí tedy celkový účinný průřez nekonečným.

6.8.3 Účinný průřez pro přenos hybnosti

Substitucí (??) do (6.63) dostáváme

$$\sigma_m = 2\pi \int_{\chi_{\min}}^{\pi} (1 - \cos \chi) \sigma(\chi) \sin \chi d\chi = 2\pi b_0^2 \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \frac{\sin \chi}{(1 - \cos \chi)} d\chi, \quad (6.91)$$

kde opět $\chi_{\min} = 0$ a integrací máme

$$\sigma_m = 4\pi b_0^2 \ln \left[\frac{1}{\sin^2(\chi_{\min}/2)} \right], \quad (6.92)$$

což opět dává $\sigma_m = \infty$ pro $\chi_{\min} = 0$.

6.9 Stínění Coulombovského potenciálu

Nekonečné hodnoty pro σ_t a σ_m pro Coulombovský potenciál jsou interpretovány jako chybějící mezní hodnota záměrné vzdálenosti b (malé $\chi \rightarrow$ velké b). Abychom tedy získali rozumné hodnoty σ_t a σ_m musíme nějak modifikovat naše úvahy a na základě rozumného důvodu zavést max. hodnotu záměrné vzdálenosti $b = b_c$.

Ze vztahu $\sigma(\chi, \varepsilon) d\Omega = b db d\varepsilon$ a definice celk. účinného průřezu (6.58):

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^{b_c} b db, \quad (6.93)$$

kde jsem zavedli max. hodnotu $b = b_c$, takže

$$\sigma_t = \pi b_c^2. \quad (6.94)$$

Zavedení max. hodnoty \Leftrightarrow nedochází k interakcím pro částice ve vzdálenostech $b > b_c$

Rozptyl pro úhly $\langle \pi/1, \pi \rangle$, tj. $\langle 0, b_0 \rangle$ se obvykle nazývá *rozptyl pod velkými úhly* nebo *těsné srážky*. Pokud se budou brát v úvahu pouze těsné srážky, máme

$$\sigma_{t, \text{velke}} = \pi b_0^2 \quad ; \quad (\pi/2 < \chi < \pi), \quad (6.95)$$

kde $b_0 = qq_1 / (4\pi\epsilon_0\mu g^2)$.

Víme, že v případě nabitých částic v plazmatu dojde k jejich stínění oblakem částic s opačným znaménkem. Míra efektivity tohoto stínění je *Debyeova délka*:

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k T}{n_0 e^2} \right)^{1/2}. \quad (6.96)$$

Koule o poloměru λ_D je *Debyeova koule*. Vezmeme-li do úvahy toto stínění:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (6.97)$$

tedy pro $r \ll \lambda_D$ jde o potenciální energii velmi blízká Coulombovské, zatímco pro $r \gg \lambda_D$ je to téměř nula.

Výpočet σ_t za použití Debyeovské potenciální energie je velmi komplikovaný a vyžaduje numerické řešení. Je ovšem možné použít alternativní zjednodušující přístup, který vede k dobrému souhlasu s řešením numerickým: Coulombovský potenciál pro $r < \lambda_D$ a nula pro $r > \lambda_D \Rightarrow b_c = \lambda_D$ - obecně totiž

$$\lambda_D \gg b_0. \quad (6.98)$$

Rozptyl pro $b_0 < b < \lambda_D$ vedoucí k $\chi < \pi/2$ se nazývá *rozptyl pod malými úhly* a jeho příspěvek k

celk. účinnému průřezu je

$$\sigma_{t,\text{male}} = 2\pi \int_{b_0}^{\lambda_D} b \, db = \pi(\lambda_D^2 - b_0^2) \quad ; \quad (\chi < \pi/2). \quad (6.99)$$

Porovnáme-li

$$\frac{\sigma_{t,\text{male}}}{\sigma_{t,\text{velke}}} = \frac{\lambda_D^2}{b_0^2} - 1 \simeq \frac{\lambda_D^2}{b_0^2}. \quad (6.100)$$

\Rightarrow důležité jsou srážky způsobující rozptyl pod malými úhly \Rightarrow

$$\sigma_t = \pi\lambda_D^2 \quad (6.101)$$

Zavedeme max. hodnotu $b_c = \lambda_D$ i pro účinný průřez pro přenos hybnosti a ze vztahu (6.92) máme

$$\sigma_m = 2\pi b_0^2 \ln\left(1 + \frac{\lambda_D^2}{b_0^2}\right), \quad (6.102)$$

protože

$$\sin\left(\frac{1}{2}\chi_c\right) = \left(1 + \frac{b_c^2}{b_0^2}\right)^{-1/2}. \quad (6.103)$$

Použijeme označení

$$\Lambda = \frac{\lambda_D}{b_0}, \quad (6.104)$$

přičemž $\Lambda \gg 1$, takže

$$\sigma_m = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda \quad (6.105)$$

Funkce Λ se mění relativně pomalu, pro většinu laboratorních typů plazmatu je $\ln \Lambda = 10-20$. Abychom mohli vypočítat Λ uvažujeme zjednodušeně:

T/n_2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}
10^2	12.8	9.43	5.97				
10^3	16.3	12.8	9.43	5.97			
10^4	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97		
10^5	23.2	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97	
10^6	26.3	22.8	19.3	15.9	12.4	8.96	5.54
10^7	28.5	25.1	21.6	18.1	14.7	11.2	7.85
10^8	30.9	27.4	24.0	20.5	17.0	13.6	10.1

- $q = -e$, $q_1 = e$
- n_0 hustota elektronů a iontů
- T teplota obou
- Maxwell. rozdělení pro oba typy částic, žádná driftová rychlost

$$\langle g^2 \rangle = \frac{1}{n_0^2} \int \int \int f_e f_{i1} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})^2 d^3 v d^3 v_1 = \frac{1}{n_0} \int \int f_e \left(\frac{3kT}{m_i} + v^2 \right) d^3 v = \frac{3kT}{\mu} \quad (6.106)$$

a tedy

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\mu\langle g^2 \rangle} = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 kT} \quad (6.107)$$

tj.

$$\Lambda = \frac{12\pi\epsilon_0 kT}{e^2} \lambda_D = 12\pi n_0 \lambda_D^3 = 9N_D, \quad (6.108)$$

kde N_D je počet částic v Debyově kouli.

Hodnoty parametru Λ pro teploty T v K a n_e v cm^{-3} :