

# VIDY V PLANÁRNÍCH VLNOVODECH

---

- ÚVOD
- MAXWELLOVY ROVNICE V NEHOMOGENNÍM PROSTŘEDÍ:  
TE A TM VIDY V PLANÁRNÍCH VLNOVODECH
- TE VIDY V SYMETRICKÉM PLANÁRNÍM VLNOVODU  
SE STUPŇOVITÝM INDEXEM LOMU
- TM VIDY V SYMETRICKÉM PLANÁRNÍM VLNOVODU  
SE STUPŇOVITÝM INDEXEM LOMU
- RELATIVNÍ VELIKOST PODÉLNÝCH SLOŽEK  $E$  A  $H$  POLE
- VÝKON SDRUŽENÝ S JEDNOTLIVÝMI VIDY
- VYZÁŘENÉ VIDY
- EXCITACE VEDENÝCH VIDŮ

Literatura:

Chatak A., Thyagarajan K.: Introduction To Fiber Optics,  
Cambridge University Press, 1998

### ÚVOD

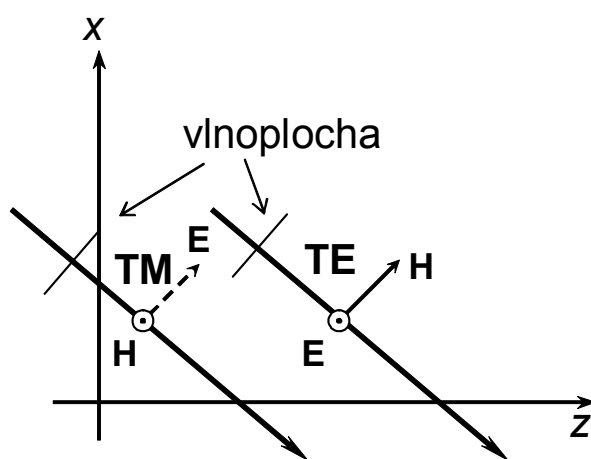
V následující části se budeme věnovat detailní analýze vidů šířených v planárních vlnovodech, které jsou charakterizovány změnou indexu lomu pouze v ose  $x$

$$n^2 = n^2(x)$$

Pro takové vlnovody se Maxwellovy rovnice redukují na dvě nezávislé soustavy rovnic: první odpovídá tzv. TE vidům, druhá TM vidům. Tito vidy se vyznačují příčnou (transverzální) polarizací elektrického (TE) resp. magnetického (TM) pole.

TE vidy – nemají podélnou (ve směru šíření) složku vektoru intenzity elektrického pole

TM vidy - nemají podélnou (ve směru šíření) složku vektoru intenzity magnetického pole



*TE a TM vidy*

---

### MAXWELLOVY ROVNICE V NEHOMOGENNÍM PROSTŘEDÍ: TE A TM VIDY V PLANÁRNÍCH VLNOVODECH

Maxwellovy rovnice pro izotropní, lineární, nevodivé a nemagnetické prostředí

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = -\varepsilon_0 n^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (3.4)$$

s využitím substitucí

$$\mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{H} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E} = \varepsilon_0 n^2 \mathcal{E} \quad (3.6)$$

kde  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{B}$  představují vektory elektrické intenzity a indukce a magnetické intenzity a indukce.  $\mu_0$  je permeabilita vakua,  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 n^2$  je permitivita prostředí

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Aplikací operátoru rotace na rovnici (3.1) a s využitím (3.2)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathcal{H}) = -\mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$$

nebo

$$\nabla (\nabla \cdot \mathcal{E}) - \nabla^2 \mathcal{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Dále

$$0 = \nabla \cdot \mathcal{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot (n^2 \cdot \mathcal{E}) = \varepsilon_0 [\nabla n^2 \cdot \mathcal{E} + n^2 \nabla \cdot \mathcal{E}]$$

Tedy

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = -\frac{1}{n^2} \nabla n^2 \cdot \mathcal{E} \quad (3.8)$$

Dosazením do rovnice (3.7) dostáváme

$$\nabla^2 \mathcal{E} + \nabla \left( \frac{1}{n^2} \nabla n^2 \cdot \mathcal{E} \right) - \varepsilon_0 \mu_0 n^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.9)$$

Z této rovnice plyne, že pro nehomogenní prostředí (index lomu závisí na poloze) jsou vztahy pro  $\mathcal{E}_x$ ,  $\mathcal{E}_y$  a  $\mathcal{E}_z$  vzájemně svázány.

V homogenním prostředí bude druhý člen na levé straně rovnice (3.9) nulový a každá složka vektoru elektrického pole bude vyjádřena skalární vlnovou rovnicí.

Podobně, aplikujeme-li operátor rotace na rovnici (3.2) a s použitím rovnic (3.1) a (3.4), dostáváme

$$\nabla^2 \mathcal{H} + \frac{1}{n^2} \nabla n^2 \times (\nabla \times \mathcal{H}) - \varepsilon_0 \mu_0 n^2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Pokud se bude index lomu měnit pouze v příčné rovině, tedy

$$n^2 = n^2(x, y) \quad (3.11)$$

tak lze ukázat, že při zápisu jednotlivých složek vektorů  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{H}$

v rovnicích (3.9) a (3.10) můžeme vzájemně oddělit části závislé na  $t$  a  $z$ . Pokud tedy nebude index lomu záviset na souřadnici  $z$  bude mít řešení rovnic (3.9) a (3.10) tvar

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{H} = \mathbf{H}(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (3.13)$$

kde  $\beta$  je konstanta šíření. Rovnice (3.12) a (3.13) definují tzv. vidy. Z předchozích dvou rovnic je vidět, že při šíření vidů vlnovodem podél osy  $z$  se mění pouze fáze. Příčné rozložení pole  $\mathbf{E}(x, y)$  a  $\mathbf{H}(x, y)$  na ose  $z$  nezávisí. Každý vid má svou konstantu šíření  $\beta$ .

Předpokládejme dále změny indexu lomu pouze ve směru  $x$

$$n^2 = n^2(x) \quad (3.14)$$

Poté lze oddělit i závislost na  $y$ , takže závislost pole na  $y$  a

$z$  bude ve tvaru  $e^{-i(\gamma y + \beta z)}$ , kde  $\gamma$  je konstanta šíření ve směru  $y$ .

Vždy je však možné položit osu  $z$  do směru šíření vlny, takže můžeme bez újmy na obecnosti zvolit  $\gamma = 0$  a dostáváme

## Vidy v planárních vlnovodech

---

$$\mathcal{E}_j = E_j(x)e^{i(\omega t - \beta z)}; \quad j = x, y, z \quad (3.15)$$

$$\mathcal{H}_j = H_j(x)e^{i(\omega t - \beta z)}; \quad j = x, y, z \quad (3.16)$$

Po dosazení těchto vztahů do Maxwellových rovnic (3.1) a (3.2)

$$i\beta E_y = -i\omega\mu_0 H_x \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_z \quad (3.18)$$

$$-i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_y \quad (3.19)$$

$$i\beta H_y = i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_x \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_z \quad (3.21)$$

$$-i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_y \quad (3.22)$$

V prvních třech rovnicích vystupuje pouze  $E_y$ ,  $H_x$  a  $H_z$  a v posledních třech pouze  $E_x$ ,  $E_z$  a  $H_y$ . Pro takovou konfiguraci vlnovodu se Maxwellovy rovnice redukují na dvě nezávislé soustavy rovnic. V první soustavě máme nenulové pouze složky  $E_y$ ,  $H_x$  a  $H_z$  a nulové  $E_x$ ,  $E_z$  a  $H_y$  – TE vidy (elektrické pole má pouze příčnou složku). V druhé soustavě jsou nenulové  $E_x$ ,  $E_z$  a  $H_y$  a nulové  $E_y$ ,  $H_x$  a  $H_z$  – TM vidy (magnetické pole má pouze příčnou složku). Šíření vln v takových planárních vlnovodech lze popsat formou TE a TM vidů.

## TE VIDY V SYMETRICKÉM PLANÁRNÍM VLNO- VODU SE STUPŇOVITÝM INDEXEM LOMU

Po dosazení  $H_x$  a  $H_y$  z rovnic (3.17) a (3.18) do (3.19)

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] E_y = 0 \quad (3.23)$$

kde

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} \quad (3.24)$$

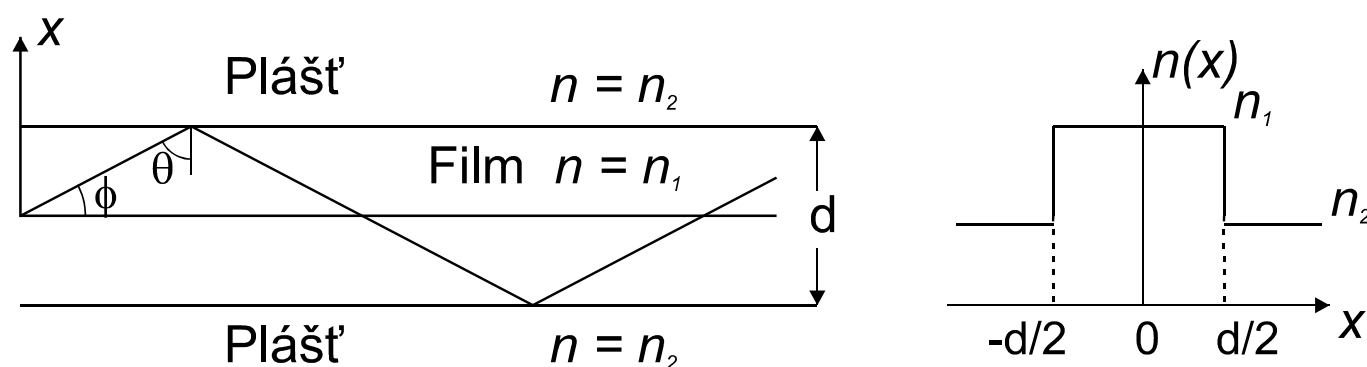
je vlnové číslo (*free space wave number*) ve vakuu a

$c (= 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0})$  je rychlost světla ve vakuu.

Předešlé vztahy jsou platné pro libovolný profil  $n = n(x)$ . Předpokládejme speciální profil indexu lomu podle obrázku dole

$$n(x) = \begin{cases} n_1; & |x| < d/2 \\ n_2; & |x| > d/2 \end{cases} \quad (3.25)$$

kde  $n_1 > n_2$ .



## Vidy v planárních vlnovodech

---

Řešíme rovnici (3.23) s odpovídajícími hraničními podmínkami na rozhraních. Složky  $E_y$  a  $H_z$  musí být spojité na obou rozhraních  $x = \pm d/2$  (jsou to tečné složky). Protože  $H_z$  je úměrné  $dE_y/dx$  (viz rovnice (3.18)), musí platit

$$E_y \text{ a } \frac{dE_y}{dx} \text{ jsou spojité pro } x = \pm d/2 \quad (3.26)$$

Dosazením  $n(x)$  do rovnice (3.23) dostáváme

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) E_y = 0; \quad |x| < d/2 \quad \text{jádro} \quad (3.27)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 n_2^2 - \beta^2) E_y = 0; \quad |x| < d/2 \quad \text{plášť} \quad (3.28)$$

Vedené vidy jsou takové, které jsou soustředěny do jádra, jejich pole musí tedy v plášti ( $|x| > d/2$ ) rychle klesat. Většina energie vidu tedy musí zůstat v jádru.

Musí tedy platit

$$\beta^2 > k_0^2 n_2^2 \quad (3.29)$$

Pokud by platilo  $\beta^2 < k_0^2 n_2^2$ , dostaneme v oblasti  $|x| > d/2$  periodické řešení, které odpovídá takzvaným vyzářeným vidům.

Jsou to vidy, které odpovídají paprskům odrážejícím na rozhraní se pod úhlem menším než je úhel totálního odrazu, a které, pokud jsou excitovány, rychle z jádra zmizí (vyzáří se).



## Vidy v planárních vlnovodech

---

Dále musí platit podmínka  $\beta^2 > k_0^2 n_1^2$  (jinak nelze splnit hraniční podmínky současně pro  $x = +d/2$  i  $x = -d/2$ ).

Pro vedené vidy tedy musí platit

$$n_2^2 < \frac{\beta^2}{k_0^2} < n_1^2 \quad (3.30)$$

Zapišme rovnice (3.27) a (3.28) ve tvaru

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \kappa^2 E_y = 0; \quad |x| < d/2 \quad \text{jádro} \quad (3.31)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} - \gamma^2 E_y = 0; \quad |x| > d/2 \quad \text{plášť} \quad (3.32)$$

kde

$$\kappa^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \quad (3.33)$$

$$\gamma^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \quad (3.34)$$

Řešení rovnice (3.31) lze zapsat ve tvaru

$$E_y(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x; \quad |x| < d/2 \quad (3.35)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty. V oblastech  $x > d/2$  a  $x < -d/2$  bude řešení  $e^{\pm \gamma x}$  a jestliže vyloučíme exponenciálně rostoucí amplitudu, dostáváme

$$E_y(x) = \begin{cases} C e^{\gamma x}; & x < -d/2 \\ D e^{-\gamma x}; & x > d/2 \end{cases} \quad (3.36)$$

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Pokud budeme nyní aplikovat hraniční podmínky (jmenovitě spojitost  $E_y$  a  $dE_y/dx$  pro  $x = \pm d/2$ ), dostáváme 4 rovnice, ze kterých lze získat transcendentální rovnici, určující možné hodnoty konstanty šíření  $\beta$ . Toto je obecný postup pro stanovení konstanty šíření v nesymetrických vlnovodech. Pokud je však rozložení indexu lomu symetrické vzhledem k  $x = 0$ , tzn.

$$n^2(-x) = n^2(x) \quad (3.37)$$

musí být řešení ve formě buď symetrické nebo antisymetrické funkce  $x$ , tedy

$$E_y(-x) = E_y(x) \quad \text{symetrické vidy} \quad (3.38)$$

$$E_y(-x) = -E_y(x) \quad \text{antisymetrické vidy} \quad (3.39)$$

### Důkaz:

Zapíšeme vlnovou rovnici (3.23) ve tvaru

$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + k_0^2 n^2(x) E_y(x) = \beta^2 E_y(x) \quad (3.40)$$

Pro transformaci  $x \rightarrow -x$  dostáváme

$$\frac{d^2 E_y(-x)}{dx^2} + k_0^2 n^2(x) E_y(-x) = \beta^2 E_y(-x) \quad (3.41)$$

Je zřejmé, že  $E_y(x)$  a  $E_y(-x)$  vyhovují téže rovnici, jsou to tedy vlastní funkce odpovídající téže hodnotě  $\beta^2$ . Musí tedy platit, že  $E_y(-x)$  je násobkem  $E_y(x)$ , tedy  $E_y(-x) = \lambda E_y(x)$ . Po další transformaci  $x \rightarrow -x$  dostáváme

$$E_y(x) = \lambda E_y(-x) = \lambda^2 E_y(x)$$

takže  $\lambda^2 = 1$  nebo  $\lambda = \pm 1$ . Tedy

$$E_y(-x) = \pm E_y(x) \quad (3.42)$$

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Pro symetrický vid musí platit

$$E_y(x) = \begin{cases} A \cos \kappa x; & |x| < d/2 \\ C e^{-\gamma|x|}; & |x| > d/2 \end{cases} \quad (3.43)$$

Z podmínky spojitosti  $E_y(x)$  a  $dE_y/dx$  pro  $x = \pm d/2$  dostáváme

$$A \cos(\kappa d/2) = C e^{-\gamma d/2} \quad (3.44)$$

$$-\kappa A \sin(\kappa d/2) = -\gamma C e^{-\gamma d/2} \quad (3.45)$$

Když podělíme rovnici (3.45) rovnicí (3.44), dostaneme

$$\xi \tan \xi = \frac{\gamma d}{2} \quad (3.46)$$

kde

$$\xi = \frac{\kappa d}{2} = \frac{d}{2} \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad (3.47)$$

Položme dále podle (3.33), (3.34) a (3.47)

$$\frac{\gamma d}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} V^2 - \xi^2} \quad (3.48)$$

kde

$$V = k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.49)$$

je normovaný parametr vlnovodu (tzv. normovaný kmitočet).

Rovnice (3.46) tedy dostává tvar

$$\xi \tan \xi = \sqrt{\frac{1}{4} V^2 - \xi^2} \quad (3.50)$$

Podobně pro antisymetrický vid dostáváme

$$E_y(x) = \begin{cases} B \sin \kappa x; & |x| < d/2 \\ \frac{x}{|x|} D e^{-\gamma|x|}; & |x| > d/2 \end{cases} \quad (3.51)$$

a stejným postupem jako pro symetrický vid dostaneme

$$-\xi \cot \xi = \sqrt{\frac{1}{4}V^2 - \xi^2} \quad (3.52)$$

Dostáváme tedy

$$\xi \tan \xi = \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - \xi^2} \quad \text{pro symetrické vidy} \quad (3.53)$$

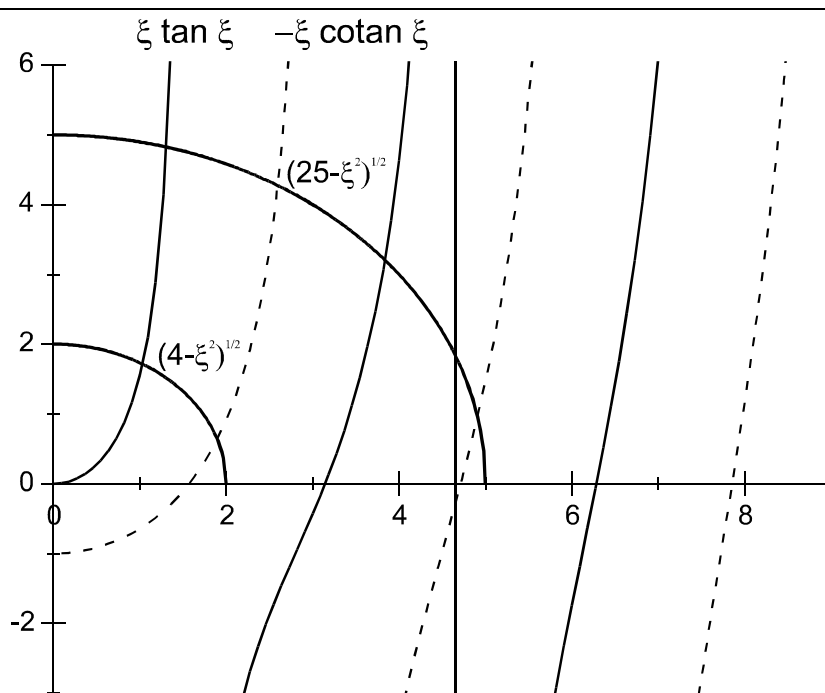
$$-\xi \cot \xi = \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - \xi^2} \quad \text{pro antisymetrické vidy} \quad (3.54)$$

Protože výraz

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - \xi^2}$$

představuje (pro kladné hodnoty  $\xi$ ) kružnici (o poloměru  $V/2$ ) v prvním kvadrantu roviny  $\xi - \eta$ , je numerické stanovení možných hodnot  $\xi$  (a tedy i dovolených konstant šíření) jednoduché.

## Vidy v planárních vlnovodech



Obr. 6.2

Průsečíky kružnic a křivek  $\xi \tan \xi$  (resp.  $-\xi \cot \xi$ ) definují povolené hodnoty  $\xi$  a tedy i konstanty šíření  $\beta$  (rovnice (3.47)).

Pozn.: Pro vedené vidy může konstanta šíření nabývat pouze omezený počet hodnot (je to dáno transcendentální rovnicí).

Pro kružnici s poloměrem  $V/2=2$  dostáváme např. jeden symetrický a jeden antisymetrický vid. Pro  $V/2=5$  dva symetrické a dva antisymetrické vidy, apod.

Často se používá normovaná konstanta šíření

$$b \equiv \frac{\beta^2 / k_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = 1 - \frac{\xi^2}{V^2 / 4} \quad (3.55)$$

Podle rovnice (3.30) bude tedy pro vedené vidy

$$0 < b < 1 \quad (3.56)$$

## Vidy v planárních vlnovodech

---

### Příklad:

Uvažujme symetrický planární vlnovod s parametry

$$n_1 = 1,503 \quad n_2 = 1,500 \quad d = 4 \mu\text{m}$$

Pro  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  dostáváme

$$V = \frac{2\pi}{1} \cdot 4 \cdot \sqrt{1,503^2 - 1,500^2} \doteq 2,385^\circ$$

a vlnovod bude přenášet pouze jeden symetrický TE vid s

$$\xi \doteq 0,81664 \Rightarrow b \doteq 0,531223, \quad \frac{\beta}{k_0} \doteq 1,50159$$

Pokud by byl tentýž vlnovod provozován na vlnové délce

$\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , pak  $V = 4,771$

a vlnovod bude přenášet jeden symetrický a jeden antisymetrický TE vid s parametry

$$\xi \doteq 1,09426 \quad \text{a} \quad 2,08132$$

tedy

$$b \doteq 0,789584 \quad \text{a} \quad 0,238762$$

s odpovídajícími hodnotami  $\beta/k_0$

$$\frac{\beta}{k_0} \doteq 1,502369 \quad \text{a} \quad 1,500717$$

Je zřejmé, že čím větší bude hodnota  $V$ , tím více vidů se bude moci daným vlnovodem šířit.

### *Fyzikální význam vidů*

Uvažujme tvar elektrického pole uvnitř jádra (filmu) planárního vlnovodu ( $-d/2 < x < d/2$ ). Například pro symetrický TE vid je amplituda intenzity elektrického pole (viz rovnice (3.43))

$$E_y(x) = A \cos \kappa x$$

Takže pro kompletní výraz dostáváme

$$\mathcal{E}_y = A \cos \kappa x e^{i(\omega t - \beta z)} = \frac{1}{2} A e^{i(\omega t - \beta z - \kappa x)} + \frac{1}{2} A e^{i(\omega t - \beta z + \kappa x)} \quad (3.57)$$

Platí, že

$$e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

představuje vlnu šířící se ve směru vektoru  $\mathbf{k}$  se složkami  $k_x$ ,  $k_y$  a  $k_z$ . Tedy pro dva výrazy na pravé straně rovnice (3.57) máme

$$k_x = \pm \kappa, \quad k_y = 0, \quad \text{a} \quad k_z = \beta \quad (3.58)$$

což reprezentuje rovinné vlny s vektory konstant šíření rovnoběžnými s rovinou  $x$ - $z$  pod úhlem  $\pm\theta$  vzhledem k ose  $z$

$$\tan \theta = k_x / k_z = \kappa / \beta$$

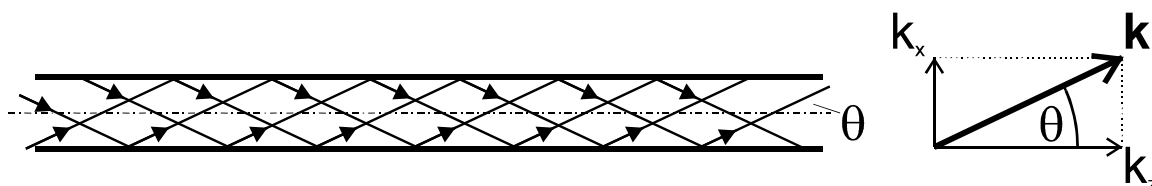
nebo

$$\cos \theta = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \kappa^2}} = \frac{\beta}{k_0 n_1} \quad (3.59)$$

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Vedený vid tedy můžeme považovat jako superpozici dvou rovinných vln šířících se pod úhlem  $\pm\theta (= \pm \arccos(\beta / k_0 n_1))$  vzhledem k ose z.



Protože existují pouze diskrétní hodnoty  $\beta$  (označíme je jako  $\beta_m$ ), budou povoleny i jen některé úhly šíření vln (paprsků). Každý vid je charakterizován diskrétním úhlem šíření  $\theta_m$ .

Z podmínky pro vedené vidy

$$n_2 < \frac{\beta}{k_0} < n_1$$

dostáváme

$$\frac{n_2}{n_1} < \cos \theta < 1$$

což je podmínka pro totální odraz na rozhraní jádro plášť. Existuje tedy mezní hranice – *cutoff* ( $V < V_c$ ), za kterou už nedochází k totálnímu odrazu.



## Vidy v planárních vlnovodech

---

Z obrázku 6.2 na straně 3/13 můžeme odvodit následující závěry pro TE vidy (podobná diskuse platí i pro TM vidy):

- a) Pokud je  $0 < V/2 < \pi/2$ , tedy  $0 < V < \pi$ , dostáváme ve vlnovodu pouze jeden diskrétní TE vid, který je symetrický vzhledem k  $x$ . Při této podmínce hovoříme o jednovidovém vlnovodu.

Příklad:

$$n_1 = 1,50 \quad n_2 = 1,48 \quad a \quad d = 3\mu\text{m}$$

Při těchto parametrech bude vlnovod přenášet pouze jeden vid TE při  $\lambda_0 > 1,46\mu\text{m}$ . Ve skutečnosti jde o vidy dva – TE a TM. Většinou je však dopadající světlo lineárně polarizované. Na polarizaci záleží, jaký vid se ve vlnovodu vybudí. Pro  $\lambda_0 < 1,46\mu\text{m}$  se bude vlnovodem šířit více vidů.

- b) Pokud je  $\pi/2 < V/2 < \pi$  (nebo  $\pi < V < 2\pi$ ) dostáváme jeden symetrický a jeden antisymetrický vid. Obecně při

$$2m\pi < V < (2m+1)\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

dostáváme  $(m+1)$  symetrických a  $m$  antisymetrických vidů a při  $(2m+1)\pi < V < (2m+2)\pi$

dostáváme  $(m+1)$  symetrických a  $(m+1)$  antisymetrických vidů. Celkový počet vidů je vždy nejbližší vyšší celé číslo k  $V/\pi$ .

## Vidy v planárních vlnovodech

---

c) Pokud vlnovod podporuje mnoho vidů (tj. při  $V \gg 1$ ) průsečíky na obrázku 6.2 se budou blížit k  $\xi = \pi/2, \pi, 3\pi/2$  apod., takže konstanty šíření vidů nejnižších řádů budou dány následující přibližnou rovnicí:

$$\xi = \xi_m = \frac{d}{2} \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta_m^2} \approx (m+1)\pi/2; \quad V \gg 1$$

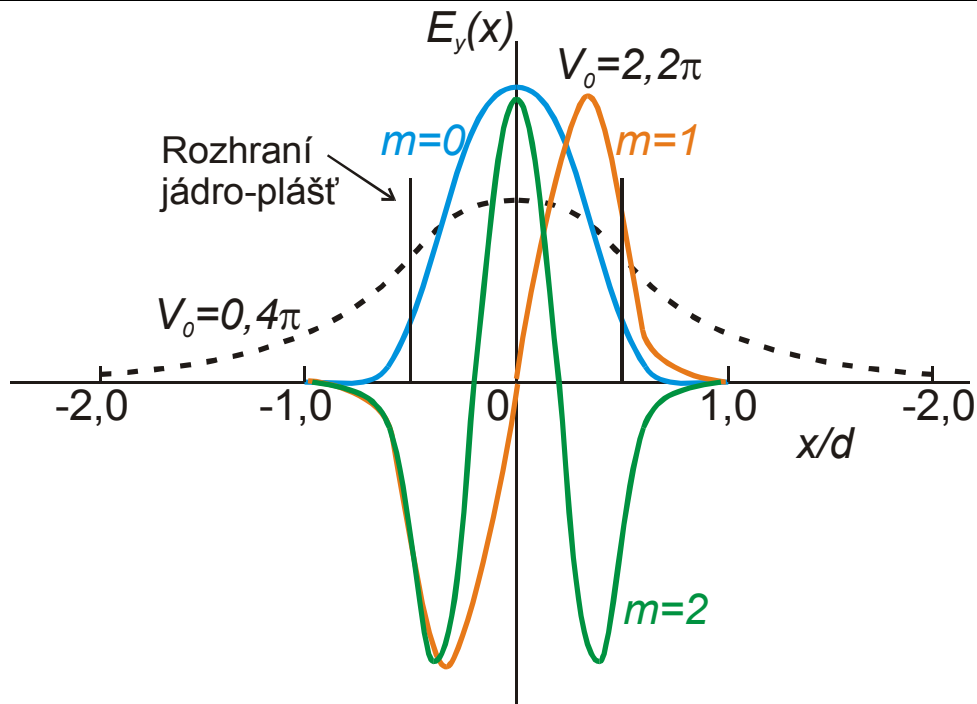
kde  $m = 0, 2, 4, \dots$  odpovídá symetrickým vidům

a  $m = 1, 3, 5, \dots$  odpovídá antisymetrickým vidům

d) Z obrázku 6.2 je patrné, že pro základní vid (též nazývaný vid nulového řádu)  $\xi (= \kappa d/2)$  leží v intervalu mezi 0 a  $\pi/2$  a odpovídající amplituda elektrického pole  $E_y(x)$  nebude v této oblasti nabývat nulové hodnoty (viz rovnice (3.43)). Pro další vid (bude antisymetrický vzhledem k  $x$ ) bude  $\xi$  v intervalu  $\pi/2$  a  $\pi$ , a tedy odpovídající  $E_y(x)$  bude mít jednu nulovou hodnotu (při  $x=0$ ). Tuto analýzu lze rozšířit a dokázat, že el. pole vidu  $m$ -tého řádu bude mít  $m$  nulových hodnot. Toto tvrzení je platné pro libovolnou strukturu vlnovodu. Rozložení pole pro několik prvních vidů je na následujícím **obrázku**.

## Vidy v planárních vlnovodech

---



Rozložení amplitudy elektrického pole  $E_y(x)$  v symetrickém planárním vlnovodu se skokovou změnou indexu lomu.

Plné čáry zobrazují pole pro normovaný kmitočet  $V = 4,4\pi$

$$(V = k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2})$$

sudé hodnoty  $m$  odpovídají symetrickým vidům

liché hodnoty  $m$  odpovídají antisymetrickým vidům

Čárkovaná čára odpovídá základnímu vidu pro  $V=0,8\pi$ .

Všechny křivky jsou normalizovány na přenos stejného výkonu.

Se vzrůstající vlnovou délkou (klesajícím  $V$ ) pole vystupuje více z jádra.

## Vidy v planárních vlnovodech

---

e) Závislost normalizované konstanty šíření  $b \equiv \frac{\beta^2 / k_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$  na normova-

ném kmitočtu  $V = k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  pro několik vidů je na následujícím **obrázku**. Plné křivky odpovídají TE vidům, čárkované TM vidům. Pro daný vlnovod a danou vlnovou délku je třeba nejdříve stanovit  $V$  a pak odečíst hodnoty  $b$ , ze kterých se stanoví  $\beta$  podle vztahu

$$\beta^2 = k_0^2 \left[ n_2^2 + b(n_1^2 - n_2^2) \right].$$

Už víme, že pro vedené vidy platí  $\beta > k_0 n_2$ . Pokud bude  $\beta$  rovna právě  $k_0 n_2$ , (tj.  $b$  bude nulová), vid dosáhl tzv. kritické frekvence (*cutoff*).

Tehdy platí  $\beta = k_0 n_2$ ,  $\gamma = 0$ ,  $b = 0$ .

Pro symetrické vlnovody dochází ke kritické frekvenci při  $\xi = V/2$ , tedy kritická frekvence TE vidů je definována jako

$$\frac{V}{2} \tan\left(\frac{V}{2}\right) = 0 \quad \text{pro symetrické vidy} \quad (3.60)$$

$$\frac{V}{2} \cot\left(\frac{V}{2}\right) = 0 \quad \text{pro antisymetrické vidy} \quad (3.61)$$

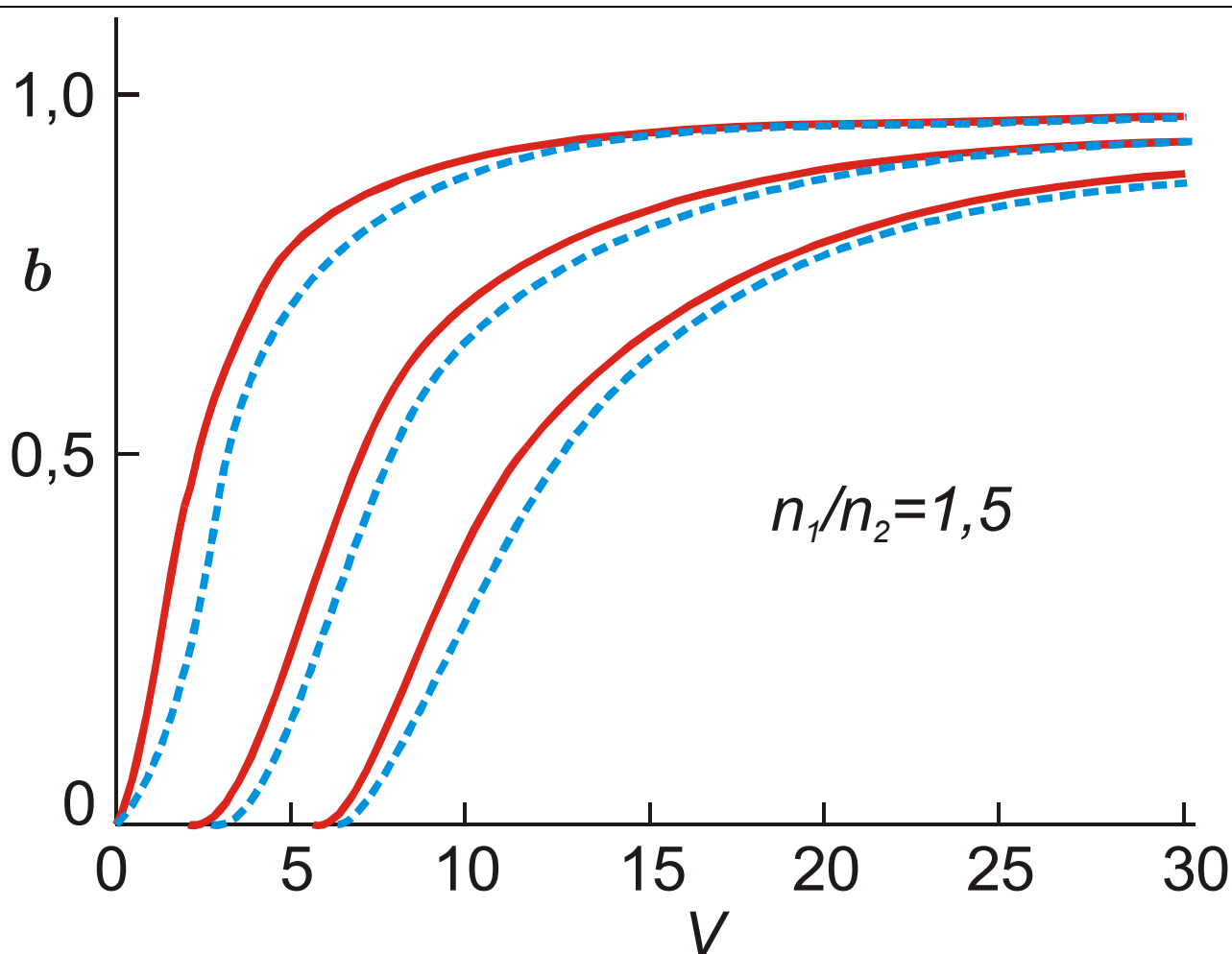
Odtud plyne, že kritické normalizované frekvence  $V$  pro různé vidy jsou dány relací

$$V_c = m\pi; \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.62)$$

kde sudé hodnoty  $m$  odpovídají symetrickým vidům a liché hodnoty  $m$  antisymetrickým vidům.

Pozn.: Základní (dominantní) vid nemá kritickou frekvenci (je rovna 0), takže zde musí být vždy alespoň jeden vedený vid.

## Vidy v planárních vlnovodech



*Závislost normalizované konstanty šíření  $b$  na normalizované frekvenci  $V$  pro planární symetrický vlnovod se schodovitým průběhem indexu lomu. Plné křivky odpovídají TE vidům, čárkované TM vidům. Hodnota  $V$ , pro kterou je  $b = 0$  odpovídá kritické (cutoff) frekvenci.*

## TM VIDY V SYMETRICKÉM PLANÁRNÍM VLNOVODU SE STUPŇOVITÝM INDEXEM LOMU

Pro TM vidy můžeme použít stejný postup jako v případě TE vidů. TM vidy jsou charakterizovány složkami  $E_x$ ,  $E_z$ , a  $H_y$  (viz rovnice (3.20) - (3.22). Pokud dosadíme  $E_x$  a  $E_z$  z rovnic (3.20) a (3.21) do rovnice (3.22), dostáváme vztah

$$n^2(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{n^2(x)} \frac{dH_y}{dx} \right] + (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) H_y(x) = 0 \quad (3.63)$$

který lze dále upravit na

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - \left[ \frac{1}{n^2(x)} \frac{dn^2}{dx} \right] \frac{dH_y}{dx} + (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) H_y(x) = 0 \quad (3.64)$$

Tato rovnice je poněkud odlišná od rovnice pro  $E_y$  TE vidů (3.23), avšak pro vlnovod se schodovitým indexem lomu, kde máme index lomu konstantní v jednotlivých oblastech je

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} + (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) H_y(x) = 0; \quad |x| < d/2 \quad (3.65)$$

a

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - (\beta^2 - k_0^2 n_2^2) H_y(x) = 0; \quad |x| > d/2 \quad (3.66)$$

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Dále je třeba vyhovět hraničním podmínkám. Protože  $H_y$  a  $E_z$  jsou tečné složky k rovinám  $x = \pm d/2$ , musí platit (viz (3.21))

$$H_y \quad \text{a} \quad \frac{1}{n^2} \frac{dH_y}{dx} \quad \text{jsou spojité pro } x = \pm \frac{d}{2} \quad (3.67)$$

Tato podmínka je zřejmá i z rovnice (3.63). Pokud by totiž měl být výraz  $(1/n^2)dH_y/dx$  nespojitý, derivace  $d/dx[(1/n^2)H_y']$  by se stala delta funkcí a rovnice (3.63) by neměla řešení.

Řešení rovnic (3.65) a (3.66) bude mít následující tvar:

Symetrické vidy:

$$H_y(x) = \begin{cases} A \cos \kappa x; & |x| < d/2 \\ B e^{-\gamma|x|}; & |x| > d/2 \end{cases} \quad (3.68)$$

kde symboly  $\kappa$  a  $\gamma$  mají stejný význam jako v případě TE vidů (rovnice (3.33) a (3.34)). Z hraniční podmínky podle (3.67) plyne

$$A \cos(\kappa d/2) = B e^{-\gamma d/2}$$
$$\frac{1}{n^2} \left( -A \kappa \sin \frac{\kappa d}{2} \right) = \frac{1}{n^2} \left( -B \gamma e^{-\gamma d/2} \right)$$

Vydělením těchto dvou rovnic dostáváme

$$\kappa \tan(\kappa d / 2) = \gamma(n_1^2 / n_2^2)$$

což můžeme přepsat do podoby

$$\xi \tan \xi = \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sqrt{\left( \frac{V}{2} \right)^2 - \xi^2} \quad \text{symetrické TM vidy} \quad (3.69)$$

Podobně pro antisymetrické vidy:

$$-\xi \cot \xi = \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sqrt{\left( \frac{V}{2} \right)^2 - \xi^2} \quad \text{antisymetrické TM vidy} \quad (3.70)$$

kde  $\xi$  a  $V$  mají stejný význam jako u TE vidů (rovnice (3.47) a (3.49)).

Řešení rovnic (3.69) a (3.70) můžeme provést stejným způsobem jako u TE vidů. Rozdíl je v pravé straně rovnic – tyto u TM vidů reprezentují elipsu s hlavní poloosou (ve směru  $\eta$ ) o velikosti  $(n_1^2 / n_2^2)(V / 2)$  a vedlejší poloosou (ve směru  $\xi$ ) o velikosti  $V / 2$ . Ostatní kvalitativní analýza zůstává stejná jako u TE vidů (kritické frekvence, fyzikální interpretace, apod.).



Dále můžeme konstatovat následující fakta:

- a) Protože  $n_1 > n_2$ , průsečík elipsy s křivkami  $\xi \tan \xi$  a  $-\xi \cot \xi$  bude při větších hodnotách  $\xi$  ve srovnání s TE vidy. Z rovnice (3.47) tedy plyne, že pro daný normovaný kmitočet  $V$  budou hodnoty konstanty šíření  $\beta$  pro  $TM_m$  vidy menší než pro odpovídající vidy  $TE_m$ .
- b) Ačkoliv vlnovod, pro který platí  $0 < V < \pi$  je označován jako jednovidový, ve skutečnosti se v něm šíří dva vidy (jeden TE a jeden TM), s nepatrně odlišnou konstantou šíření. Dopadající světlo je však obvykle lineárně polarizované, takže pokud je  $\mathbf{E}$  paralelní s osou  $y$ , vybudí se vid TE, pokud bude  $\mathbf{E}$  paralelní s  $x$ , vybudí se TM vid. Tento závěr je obecný a platný pro všechny planární vlnovody. Pokud však na vlnovod dopadá světlo polarizované pod určitým úhlem vzhledem k  $x$  (nebo bude elipticky polarizované), vybudí se jak TE vidy, tak i TM. Protože mají odlišné konstanty šíření, bude se podél  $z$  měnit jejich vzájemný posuv a tedy i výsledná polarizace.

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Jako příklad uvažujme dopadající světlo lineárně polarizované tak, že vektor elektrického pole svírá s osou  $x$  úhel  $45^\circ$ . Pro  $z = 0$  máme

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= E_0 \cos \pi / 4 \cos \omega t \\ \mathcal{E}_y &= E_0 \cos \pi / 4 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \text{rozložení pole pro } z = 0 \quad (3.71)$$

kde  $E_0$  představuje příčnou složku pole, kterou předpokládáme stejnou pro TE i TM vidy (rovnice (3.43) a (3.68)). Pokud konstantu šíření označíme  $\beta_0$  pro TE vidy a  $(\beta_0 - \Delta\beta_0)$  pro TM vidy bude rozložení pole pro  $z > 0$

$$\left. \begin{aligned} \text{TE: } \mathcal{E}_y &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos[\omega t - \beta_0 z] \\ \text{TM: } \mathcal{E}_x &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos[\omega t - \beta_0 z + \Delta\beta_0 z] \end{aligned} \right\} z > 0 \quad (3.72)$$

Je zřejmé, že pro  $z = \pi / (2\Delta\beta_0)$  bude paprsek kruhově polarizován a pro  $z = \pi / (\Delta\beta_0)$  bude lineárně polarizován (s elektrickým vektorem pod pravým úhlem k původnímu směru). Mezi těmito vzdálenostmi bude elipticky polarizovaný. Pro  $z = L_b = 2\pi / \Delta\beta_0$  se obnoví počáteční stav polarizace – tato charakteristická délka se nazývá záznějová (*beat length*).

## Vidy v planárních vlnovodech

---

- c) Podobně pro  $\pi < V < 2\pi$ , ačkoliv hovoříme o „dvouvidovém“ vlnovodu, ve skutečnosti v něm máme čtyři vidy (dva TE a dva TM, apod.)
- d) Pro většinu praktických případů je  $n_1 \approx n_2$  a konstanty šíření (tedy i tvar pole) pro TE a TM vidy jsou téměř shodné.

### Příklad:

Uvažujme planární vlnovod s  $n_1=1,5$ ,  $n_2=1,0$  a  $d=0,555 \mu\text{m}$ . Při  $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$ ,  $V \approx 3$  dostaneme

$$b(\text{TE}) \approx 0,6280 \quad \text{a} \quad b(\text{TM}) \approx 0,4491$$

Odpovídající hodnoty  $\beta/k_0$  jsou

$$\left(\frac{\beta}{k_0}\right)_{\text{TE}} \approx 1,336 \quad \text{a} \quad \left(\frac{\beta}{k_0}\right)_{\text{TM}} \approx 1,2495$$

se záznejovou délkou  $L_b \approx 15 \mu\text{m}$ .

# RELATIVNÍ VELIKOST PODÉLNÝCH SLOŽEK E A H POLE

Uvažujme nejdříve TE vidy. Z rovnic (3.17) a (3.18) dostáváme

$$\left| \frac{H_z}{H_x} \right| = \frac{1}{\beta} \left| \frac{\partial E_y / \partial x}{E_y} \right|$$

Nyní podle rovnice (3.31) dostáváme (uvnitř jádra)

$$\left| \frac{E_y}{\partial E_y / \partial x} \right| \sim \frac{1}{\kappa}. \text{ Tedy} \quad \left| \frac{H_z}{H_x} \right| \sim \frac{\kappa}{\beta} \quad (3.73)$$

Protože  $\kappa^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2$ , pak  $\kappa / \beta = \sqrt{k_0^2 n_1^2 / \beta^2 - 1}$ .

Pro vedené vidy platí

$$n_2^2 < \beta^2 / k_0^2 < n_1^2 \text{ tedy } 0 < \frac{\kappa}{\beta} < \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_2^2}}$$

Takže

$$\left| \frac{H_z}{H_x} \right| \leq \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_2^2}} \quad (3.74)$$

Pro  $n_1 \approx 1,50$  a  $n_2 \approx 1,49$  je pravá strana rovnice (3.74) rovna asi 0,1, čili podélná složka je malá ve srovnání s příčnou složkou. Pokud bude tedy  $n_1 \approx n_2$ , můžeme vid považovat za příčně polarizovaný. Totéž platí pro TM vidy a obecně i pro válcově symetrická vlákna. Vlnovody s touto vlastností se nazývají slabě vedoucí (*weakly guiding*).

## VÝKON SDRUŽENÝ S JEDNOTLIVÝMI VIDY

Tok energie je dán vztahem

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{E} \times \mathcal{H} \rangle \quad (3.75)$$

kde  $\mathcal{S}(= \mathcal{E} \times \mathcal{H})$  je Poyintingův vektor a  $\langle \dots \rangle$  označuje časovou střední hodnotu.

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \text{ kde } T = 2\pi / \omega \quad (3.76)$$

Při stanovení Poyintingova vektoru musíme uvažovat reálné části  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{H}$ . Pro intenzitu el. pole TE vidu to podle (3.15) bude

$$\mathcal{E}_y = E_y(x) \cos(\omega t - \beta z) \quad (3.77)$$

Podle Maxwellových rovnic

$$-\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathcal{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \mathcal{E}_y & 0 \end{vmatrix} \quad (3.78)$$

Takže

$$-\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = -\beta E_y(x) \sin(\omega t - \beta z)$$

Nebo

$$\mathcal{H}_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} E_y(x) \cos(\omega t - \beta z) \quad (3.79)$$

Podobně

$$\mathcal{H}_z = -\frac{1}{\omega \mu_0} \frac{dE_y}{dx} \sin(\omega t - \beta z) \quad (3.80)$$

Střední časové hodnoty výkonu tedy budou

$$\langle \mathcal{S}_x \rangle = \langle \mathcal{E}_y \mathcal{H}_z \rangle = 0 \quad (3.81)$$

$$\langle \mathcal{S}_z \rangle = -\langle \mathcal{E}_y \mathcal{H}_x \rangle = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} E_y^2(x) \quad (3.82)$$

Ačkoliv tento vztah je přesně platný pouze pro TE vídy v rovinném vlnovodu, platí přibližně i pro všechny vlnovody se „slabě vedoucí“ aproximací.

Výkon sdružený s daným videm (vztažený na jednotku délky ve směru  $z$ ) je dán výrazem

$$P = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y^2 dx \quad (3.83)$$

Uvažujme symetrický vid podle rovnice (3.43). Musí platit

$$P = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega\mu_0} 2 \left( A^2 \int_0^{d/2} \cos^2 \kappa x dx + C^2 \int_{d/2}^{\infty} e^{-2\gamma x} dx \right) \quad (3.84)$$

Nebo po úpravě

$$P = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} A^2 \left( \frac{d}{2} + \frac{1}{2\kappa} \sin \kappa d + \frac{C^2}{A^2} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma d} \right)$$

Když nyní využijeme rovnici (3.44) pro  $C/A$ , dostáváme

$$\begin{aligned} P &= \frac{\beta A^2}{4\omega\mu_0} \left\{ d + \frac{2 \sin(\kappa d / 2) \cos(\kappa d / 2)}{\kappa} + \frac{2}{\gamma} [1 - \sin^2(\kappa d / 2)] \right\} \\ &= \frac{\beta A^2}{4\omega\mu_0} \left\{ d + \frac{2}{\gamma} + \frac{2 \sin(\kappa d / 2) \cos(\kappa d / 2)}{\gamma \kappa} [\gamma - \kappa \tan(\kappa d / 2)] \right\} \end{aligned}$$

$$P = \frac{\beta A^2}{4\omega\mu_0} \left( d + \frac{2}{\gamma} \right) \quad (3.85)$$

kde jsem použili i vztah (3.46). Stejný vztah (3.85) pro výkon přenášený příslušným videm ve směru  $z$  bychom dostali i pro antisymetrický TE vid.

Podobným postupem získáme vztah i pro výkon přenášený TM vidy (symetrickými nebo nesymetrickými).

$$P = \frac{A^2 \beta}{2\omega\mu_0 n_1^2} \left[ \frac{d}{2} + \frac{(n_1 n_2)^2}{\gamma} \frac{k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)}{n_2^4 \kappa^2 + n_1^4 \gamma^2} \right] \quad (3.86)$$

### VYZÁŘENÉ VIDY

Doposud jsme uvažovali vedené vidy, pro které platí podmínka

$$n_2^2 < \beta^2 / k_0^2 < n_1^2 \quad (3.87)$$

Existuje však skupina vidů, pro které je

$$\beta^2 / k_0^2 < n_2^2 \quad (3.88)$$

Nazývají se vyzářené vidy vlnovodu.

Pozn.: Podmínku  $\beta / k_0 > n_1$  nelze splnit.

Důkaz:

Přepíšeme charakteristickou rovnici pro TE vidy (3.23) do tvaru

$$d^2 E_y / dx^2 = \alpha(x) E_y(x), \quad \text{kde } \alpha(x) = \beta^2 - k_0^2 n^2(x)$$

Pokud by nyní  $\beta^2$  bylo větší než maximální hodnota  $k_0^2 n^2(x)$ , pak  $\alpha(x)$  bylo všude kladné a stejně tak všude by výraz  $d^2 E_y / dx^2$  měl stejné znaménko jako

$E_y(x)$ . Takže jestliže bude  $E_y$  kladné pro nějakou hodnotu  $x$ , pak  $d^2 E_y / dx^2$  bude též kladné. Odtud plyne, že když bude  $E_y' > 0$ , pak  $E_y \rightarrow \infty$  pro  $x \rightarrow \infty$ . Oproti tomu když  $E_y' < 0$ , pak  $E_y \rightarrow -\infty$  pro  $x \rightarrow -\infty$ . Z toho plyne, že někde musí být oblast, kde  $\beta^2 < k_0^2 n^2(x)$

Vlnová rovnice např. pro TE vidy (pro  $\beta^2 / k_0^2 < n_2^2$ ) bude mít

v oblasti  $|x| > d/2$  tvar

$$d^2 E_y / dx^2 + \delta^2 E_y = 0 \quad \text{kde } \delta^2 = k_0^2 n_2^2 - \beta^2 \quad (3.89)$$

Protože výraz označený  $\delta$  má nyní kladnou hodnotu bude mít řešení rovnice v oblasti  $|x| > d/2$  tvar

$$e^{\pm i\delta x} \quad (3.90)$$

což odpovídá kmitům v plášti vlnovodu. U vedených vidů pole v plášti exponenciálně klesá ve směru  $x$  (rozdíl od vyzařených).



### EXCITACE VEDENÝCH VIDŮ

Charakteristická rovnice pro TE vidy má tvar (3.23)

$$\frac{d^2\psi_m}{dx^2} + [k_0^2 n^2(x) - \beta_m^2] \psi_m(x) = 0; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.91)$$

kde  $\psi_m(x)$  charakterizuje rozložení pole odpovídajícího konstantě šíření  $\beta_m$ . Zavedli jsme nový symbol  $\psi_m(x)$ , místo ekvivalentního (složitějšího) zápisu  $E_y^{(m)}(x)$ . Z podmínky pro vedené vidy, že  $\psi_m(x)$  jde k nule pro  $x \rightarrow \pm\infty$  vyplývá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x) \psi_k(x) dx = 0 \quad \text{pro} \quad m \neq k \quad (3.92)$$

což je známá podmínka ortogonality.

---

Důkaz:

Přepíšeme vztah (3.91) do tvaru charakteristické rovnice

$$\frac{d^2\psi_m}{dx^2} + k_0^2 n^2(x) \psi_m = \lambda_m \psi_m(x) \quad (3.93)$$

kde  $\lambda_m = \beta_m^2$  představuje vlastní hodnoty operátoru  $\left[ \left( d^2 / dx^2 + k_0^2 n^2(x) \right) \right]$ .

Tutéž rovnici přepíšeme ještě pro komplexně sdruženou funkci  $\psi_k^*$  s vlastními hodnotami  $\lambda_k$ .

$$\frac{d^2\psi_k^*}{dx^2} + k_0^2 n^2(x) \psi_k^* = \lambda_k^* \psi_k^*(x) \quad (3.94)$$

Rovnici (3.93) vynásobíme  $\psi_k^*$  a rovnici (3.94)  $\psi_m$  a vzájemně je odečteme

$$\psi_k^* \frac{d^2\psi_m}{dx^2} - \psi_m \frac{d^2\psi_k^*}{dx^2} = (\lambda_m - \lambda_k^*) \psi_k^*(x) \psi_m(x)$$

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Levou stranu rovnice můžeme převést na výraz

$$\frac{d}{dx} \left( \psi_k^* \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_k^*}{dx} \right)$$

takže po integraci od  $-\infty$  do  $+\infty$  dostáváme

$$(\lambda_m - \lambda_k^*) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^*(x) \psi_m(x) dx = \left[ \psi_k^* \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_k^*}{dx} \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (3.95)$$

Pravá strana rovnice musí být rovna 0, protože i pole je nulové pro  $x = \pm\infty$ . Tedy

$$(\lambda_m - \lambda_k^*) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^*(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad (3.96)$$

Pro  $k = m$  má integrál  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_m(x)|^2 dx$  konečnou kladnou hodnotu, takže musí být

$$\lambda_m = \lambda_m^* \quad (3.97)$$

co dokazuje, že vlastní hodnoty  $\beta_m^2$  musí být reálná čísla. Kromě toho pro  $\lambda_m \neq \lambda_k$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^*(x) \psi_m(x) dx = 0; \quad (\lambda_m \neq \lambda_k) \quad (3.98)$$

což je dokazovaná podmínka ortogonalita

---

Protože rovnice (3.91) je lineární, konstantní násobek  $\psi_m(x)$

bude též jejím řešením, takže můžeme zvolit konstantu tak, aby

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_m(x)|^2 dx = 1 \quad (3.99)$$

což je známá normalizační podmínka. Kombinací rovnic (3.92)

a (3.99) dostáváme podmínku ortonormality

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x) \psi_k(x) dx = \delta_{mk} \quad (3.100)$$

Kde  $\delta_{mk}$  značí Kroneckerovo delta

$$\delta_{mk} = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq k \\ 1 & \text{pro } m = k \end{cases} \quad (3.101)$$

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Rovnice (3.100) představuje podmínku ortonormality pro diskrétní (vedené) vidy. Analogická podmínka platí i pro vyzářené vidy (které tvoří kontinuum)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta'}^*(x) \psi_{\beta}(x) dx = 0, \quad \text{pro } \beta \neq \beta' \quad (3.102)$$

Integrál pro  $\beta = \beta'$  však není definován, takže podmínka ortonormality je dána Diracovou funkcí.

Důležité je, že konečný počet vedených vidů spolu s kontinuem vyzářených vidů tvoří sadu funkcí, pomocí nichž lze vyjádřit všechny ostatní funkce  $x$

$$\phi(x) = \sum_m c_m \psi_m(x) + \int c(\beta) \psi_{\beta}(x) d\beta \quad (3.103)$$

kde první člen na levé straně rovnice představuje sumu přes konečný počet vedených vidů a druhý člen integrál přes kontinuum vyzářených vidů. Pokud rovnici (3.103) vynásobíme  $\psi_k^*(x)$  a integrujeme, pak s využitím vztahu (3.100) dostáváme

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^*(x) \phi(x) dx \quad (3.104)$$

Nechť nyní  $E_y(x, z=0)$  představuje skutečné pole (polarizované ve směru  $y$ ) dopadající na vstupní aperturu vlnovodu ( $z=0$ ).

## Vidy v planárních vlnovodech

---

Vstupní výkon vidu  $m$ -tého řádu bude (viz rovnice (3.83))

$$\begin{aligned} P_m &= (1/2\omega\mu_0)\beta_m |c_m|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_m(x)|^2 dx \\ &= (1/2\omega\mu_0)\beta_m \left| \int \psi_m^*(x) E_y(x, z=0) dx \right|^2 \end{aligned} \quad (3.105)$$

Pokud se bude paprsek šířit vlnovodem, pole v oblasti  $z > 0$  je

$$E_y(x, z) = \sum_m c_m \psi_m(x) e^{-i\beta_m z} + \int c(\beta) \psi_\beta(x) e^{-i\beta z} d\beta \quad (3.106)$$

Snadno lze ukázat, že pro libovolnou polohu  $z$ , bude výkon odpovídající vidu  $m$ -tého řádu úměrný

$$|c_m e^{-i\beta_m z}|^2 = |c_m|^2 \quad (3.107)$$

což je konstanta nezávislá na  $z$ .

Vidy odlišných řádů se pro různé hodnoty  $z$  skládají s různými fázemi – což má za následek (pro vedené vidy), že příčné rozložení intenzity se bude podél osy  $z$  měnit.