Výpočet výrazu $\mathcal{I} = \dfrac{1}{I_1} \int\limits_0^Z \left(\dfrac{r}{a}\right)^q \mathrm{d}z$ v gradientním vlákně

$$\begin{aligned} n^2 &= n_1^2 \left[1 - K\left(\frac{r}{a}\right)^q\right] \qquad\qquad \text{pro } r \le a \\ I_1 &\equiv n\cos\vartheta = \frac{n}{\sqrt{1 + \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}} \\ I_2 &\equiv I_1 \frac{r^2}{a}\dot{\varphi} \\ \dot{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} \qquad\qquad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} \end{aligned}$$

Při výpočtu se nejprve přechází na integrál přes r. Praktické je počítat v mezích od nejmenšího do největšího r:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{I_1}\int\limits_0^Z \left(\frac{r}{a}\right)^q \mathrm{d}z = \frac{1}{I_1}\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\dot{r}}\left(\frac{r}{a}\right)^q \mathrm{d}r = \int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\sqrt{f}}\left(\frac{r}{a}\right)^q \mathrm{d}r = \int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{r}{a}\right)^{q+1} \mathrm{d}r$$

Na předchozím řádku byly použity následující pomocné výpočty a označení:

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{I_1^2} &= 1 + \dot{r}^2 + \left(\frac{I_2}{I_1}\frac{a}{r}\right)^2 \\ \dot{r} &= \pm\frac{1}{I_1}\sqrt{n^2 - \left(I_2\frac{a}{r}\right)^2 - I_1^2} \\ f &\equiv (I_1\,\dot{r})^2 = n_1^2 - I_1^2 - n_1^2 K\left(\frac{r}{a}\right)^q - I_2^2\left(\frac{a}{r}\right)^2 \\ g &\equiv f\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left(n_1^2 - I_1^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2 - n_1^2 K\left(\frac{r}{a}\right)^{q+2} - I_2^2 \end{aligned}$$

V dalším postupu se využije výpočet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} &= \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{a}\frac{r}{a} - n_1^2 K\frac{q+2}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{q+1} \\ \left(\frac{r}{a}\right)^{q+1} &= \frac{a}{n_1^2 K(q+2)}\left[\frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{a}\frac{r}{a} - \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\right] \end{aligned}$$

Dosazením za $\left(\frac{r}{a}\right)^{q+1}$ a využitím $\int\limits_0^0 \frac{\mathrm{d}g}{\sqrt{g}} = 0$, protože $g(r_{min}) = g(r_{max}) = 0$, dostáváme

$$\mathcal{I} = \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{n_1^2 K(q+2)}\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{r}{a}\,\mathrm{d}r - \mathit{konst.}\int\limits_0^0 \frac{\mathrm{d}g}{\sqrt{g}} = \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{n_1^2 K(q+2)}\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f}} = \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{n_1^2 K(q+2)}\frac{1}{I_1}Z$$