

# Cold atoms

Lecture 1.  
26. September 2007

Low temperature physics  
(borrowed from an undergraduate course)

# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn  
definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije transitivnosti teploty pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováze)

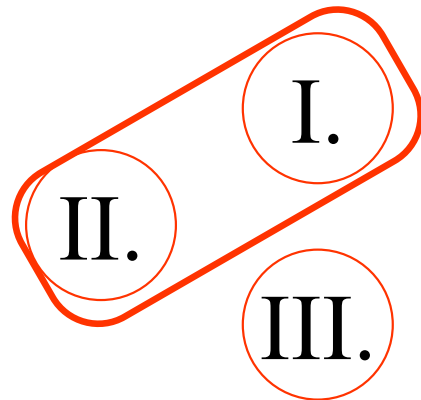
# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováze)



$$T_I = T_{II}$$

**Teploměrná látka**  
Systém I.  
(ideální plyn)

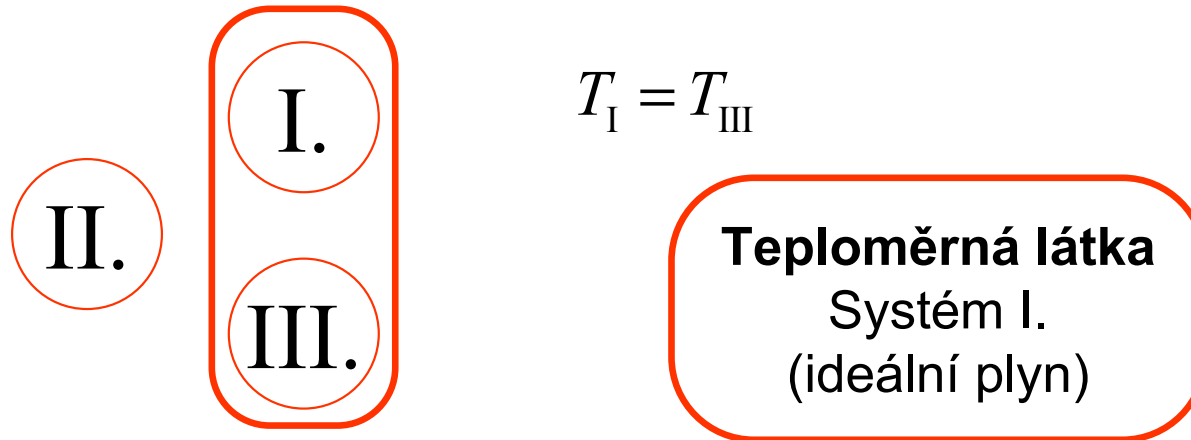
# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)



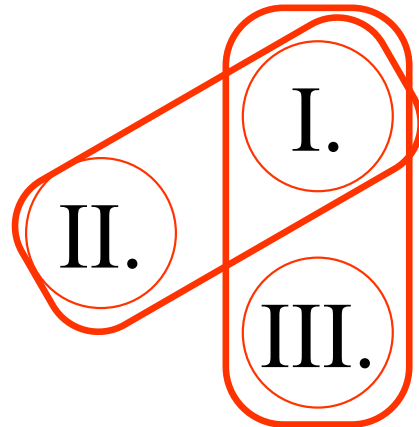
# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)



$$T_I = T_{III}, \quad T_I = T_{II} \Rightarrow T_{II} = T_{III}$$

**Rovnost teplot je  
transitivní**  
Systém I.  
(ideální plyn)

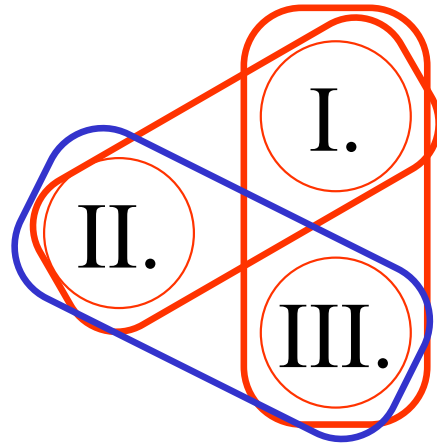
# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)



$$T_I = T_{III}, \quad T_I = T_{II} \Rightarrow T_{II} = T_{III}$$

**Jednotná teplota  
v celé složené  
soustavě**



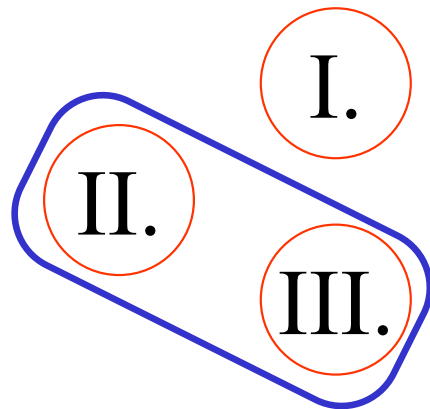
# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)



$$T_I = T_{III}, \quad T_I = T_{II} \Rightarrow T_{II} = T_{III}$$

**Teploměrná látka  
zaměněna  
Systém II.  
(reálná soustava)**

# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije transitivnosti teploty pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováze)
- Absolutní nula není dostižitelná konečným procesem (3. zákon termodyn.)

$$S \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad K \quad \text{při} \quad T \rightarrow 0$$

# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)
- Absolutní nula není dostižitelná konečným procesem (**3. zákon termodyn.**)

$$S \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad K \quad \text{při} \quad T \rightarrow 0$$

- Zvláštní jevy, **makroskopické kvantové jevy**, jako supravodivost, v blízkosti nuly. Ovšem co je „blízkost“? Vysokoteplotní supravodivost, život, ...

# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije transitivnosti teploty pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)
- Absolutní nula není dosažitelná konečným procesem (3. zákon termodyn.)

$$S \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad K \quad \text{při} \quad T \rightarrow 0$$

- Zvláštní jevy, makroskopické kvantové jevy, jako supravodivost, v blízkosti nuly. Ovšem co je „blízkost“? Vysokoteplotní supravodivost, život, ...

Porovnat teplotu s charakteristickými energiemi

$$k_B T : E_{\text{Vazeb}}$$

nový řád

$$k_B T : E_{\text{Excit}}$$

vymrzání

# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije transitivnosti teploty pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)
- Absolutní nula není dosažitelná konečným procesem (3. zákon termodyn.)

$$S \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad K \quad \text{při} \quad T \rightarrow 0$$

- Zvláštní jevy, makroskopické kvantové jevy, jako supravodivost, v blízkosti nuly. Ovšem co je „blízkost“? Vysokoteplotní supravodivost, život, ...

Porovnat teplotu s charakteristickými energiemi

Tání – tuhnutí

$$k_B T : E_{\text{Vazeb}}$$

nový řád

$$k_B T : E_{\text{Excit}}$$

vymrzání

# Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije transitivnosti teploty pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)
- Absolutní nula není dosažitelná konečným procesem (3. zákon termodyn.)

$$S \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad K \quad \text{při} \quad T \rightarrow 0$$

- Zvláštní jevy, makroskopické kvantové jevy, jako supravodivost, v blízkosti nuly. Ovšem co je „blízkost“? Vysokoteplotní supravodivost, život, ...

Porovnat teplotu s charakteristickými energiemi

Tání – tuhnutí

$$k_B T : E_{\text{Vazeb}}$$

nový řád

$$k_B T : E_{\text{Excit}}$$

vymrzání

Optické kmity

# Teploty ve vesmíru

Stupnice	nitra hvězd	$10^6 - 10^8$ K
	hvězdné atmosféry	$10^3 - 10^4$ K
	kometry, planety ...	$10^1 - 10^2$ K
	....	
	reliktní záření jako minimum	$\sim 2,72$ K
	mlhovina Bumerang (souhvězdí Kentaura)	1,15 K

# Teploty ve vesmíru

Stupnice	nitra hvězd	$10^6 - 10^8$ K
	hvězdné atmosféry	$10^3 - 10^4$ K
	kometry, planety ...	$10^1 - 10^2$ K
	....	
	reliktní záření jako minimum	$\sim 2,72$ K
	mlhovina Bumerang (souhvězdí Kentaura, objevena 1998, teplota určena 2003)	1,15 K
	důvod: rychlá expanse plynů z centrální hvězdy	

Pozemský rekord  
-89,3°C ↔ 183.75 K

**1983 Antarktida**  
**stanice Vostok**





# Nízké teploty v laboratoři (jen výběr !!)

K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
77	1877 <i>Pictet</i> kapalný kyslík?		
22	1895 <i>von Linde</i> kap. vzduch		
4,2	1898 <i>Dewar</i> kapalný vodík	1911 <i>Kamerlingh-Onnes</i> supravodivost kovů	
0,3 mK	1905 <i>von Linde</i> kap. dusík 1908 <i>Kamerlingh-Onnes</i> kapalně helium	1937 <i>Kapica</i> supratekutost Helia-4	1924 <i>Einstein</i> Bose-Einsteinova kondensace 1939 <i>Landau</i> teorie supratekutosti
μK	odsávané helium 1933 paramagn. demagnet. 1951 <i>H. London</i>	1972 <i>Osheroff</i> supratekutost Helia-3	1947 <i>Bogoljubov</i> teorie supratekutosti 1956 <i>BCS</i> * teorie supravodivosti
nK	rozpouštěcí refrigerátor 1956 <i>Kurti</i> NDR (jaderná ...) 1985 <i>Hänsch</i> laserové chlazení (princip)	1986 <i>Müller a Bednorz</i> vysokoteplot. supravodivost	1975 <i>Leggett</i> teorie supratekutosti Helia-3
pK		1995 <i>Wieman, ... Ketterle</i> BEC v atomových parách	

\**Bardeen, Cooper a Schrieffer*

# Naše hlavní téma

	K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
	77	1877 <i>Pictet</i> kapalný kyslík?		
	22	1895 <i>von Linde</i> kap. vzduch		
	4,2	1898 <i>Dewar</i> kapalný vodík	1911 <i>Kamerlingh-Onnes</i> supravodivost kovů	
	0,3	1905 <i>von Linde</i> kap. dusík		1924 <i>Einstein</i> <i>Bose-Einsteinova</i>
	mK	1908 <i>Kamerlingh-Onnes</i> kapalně helium	odsávané helium	kondensace
			1937 <i>Kapica</i> supratekutost Helia-4	1939 <i>Landau</i> teorie supratekutosti
	μK	odsávané helium		1947 <i>Bogoljubov</i> teorie supratekutosti
		1933 paramagn. demagnet.		1956 <i>BCS</i> teorie supravodivosti
		1951 <i>H. London</i>	1972 <i>Osheroff</i> supratekutost Helia-3	1975 <i>Leggett</i> teorie supratekutosti
	nK	rozpouštěcí refrigerátor	1986 <i>Müller a Bednorz</i> vysokoteplot. supravodivost	Helia-3
		1956 <i>Kurti</i> NDR (jaderná ...)		
		1985 <i>Hänsch</i> laserové chlazení (princip)	1995 <i>Wieman, ... Ketterle</i> BEC v atomových parách	

*\*Bardeen, Cooper a Schrieffer*

# Nízké teploty v laboratoři (jen výběr !!)

K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
77	1877 <i>Pictet</i> kapalný kyslík?		
22	1895 <i>von Linde</i> kap. vzduch		
4,2	1898 <i>Dewar</i> kapalný vodík	1911 <i>Kamerlingh-Onnes</i> supravodivost kovů	
0.3	1905 <i>von Linde</i> kap. dusík		1924 <i>Einstein</i> Bose-Einsteinova kondensace
mK	1908 <i>Kamerlingh-Onnes</i> kapalně helium	1937 <i>Kapica</i> supratekutost Helia-4	1939 <i>Landau</i> teorie supratekutosti
μK	odsávané helium		1947 <i>Bogoljubov</i> teorie supratekutosti
	1933 paramagn. demagnet.	1972 <i>Osheroff</i> supratekutost Helia-3	1956 <i>BCS</i> * teorie supravodivosti
nK	1951 <i>H. London</i> rozpouštěcí refrigerátor	1986 <i>Müller a Bednorz</i> vysokoteplot. supravodivost	1975 <i>Leggett</i> teorie supratekutosti Helia-3
	1956 <i>Kurti</i> NDR (jaderná ...)		
pK	1985 <i>Hänsch</i> laserové chlazení (princip)	1995 <i>Wieman, ... Ketterle</i> BEC v atomových parách	

pokrok na logaritmické škále

\*Bardeen, Cooper a Schrieffer

# Jaderná adiabatická demagnetisace

# Chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací

**NDR** nuclear demagnetization refrigeration



# Chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací

## NDR nuclear demagnetization refrigeration

		elektrony	$T_e$		
<u>pevná látka</u>	}	jádra	mřížkové kmity	$T_L$	$\tau_L$ mřížková relax. doba
doba				$\tau_{LS}$ spin-mřížková relax.	
		jaderné spiny	$T_S$	$\tau_S$ spin-spinová relax.	
doba					

# Chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací

## NDR nuclear demagnetization refrigeration

<u>pevná látka</u>	elektrony		$T_e$		
		mřížkové kmity	$T_L$	$\tau_L$	mřížková relax. doba
	jádra				$\tau_{LS}$
doba		jaderné spiny	$T_S$	$\tau_S$	spin-spinová relax.

**Pokud je uvnitř podsystemů rychlá termalisace, může nerovnovážný systém být popsán pomocí několika teplot těchto podsystemů**

**V rovnováze se teploty všech podsystemů vyrovnají – po uplynutí nejdelší vzájemné relaxační doby**

**Spin-mřížková relaxace je pomalá!**

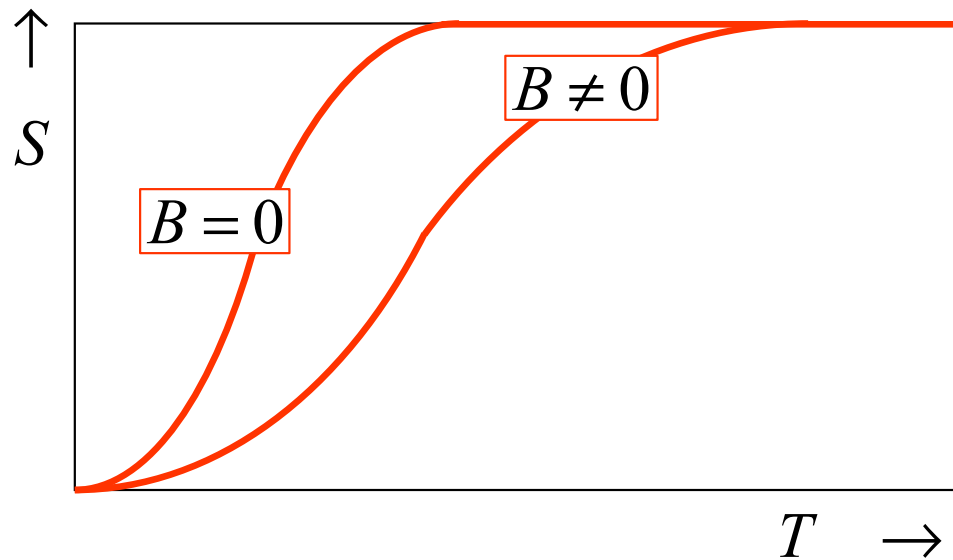
**Můžeme proto generovat nerovnovážnou velmi nízkou spinovou teplotu**

$$\tau_{LS} ? \tau_L \quad \tau_{LS} ? \tau_S$$

$$T_S = T_L$$

# Princip chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací

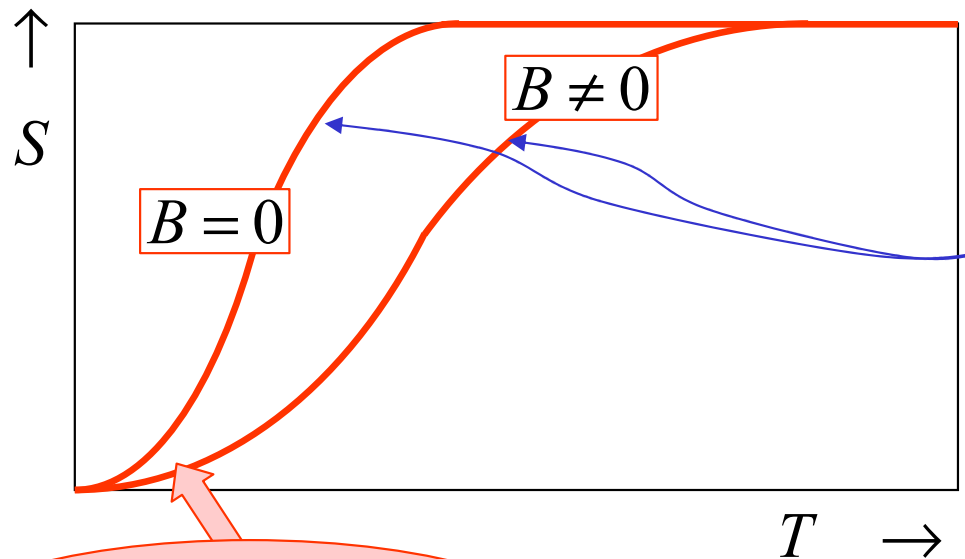
entropie jako funkce teploty





# Princip chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací

entropie jako funkce teploty



chování podle  
3. zákona termodyn.

míra orientační neuspořádanosti

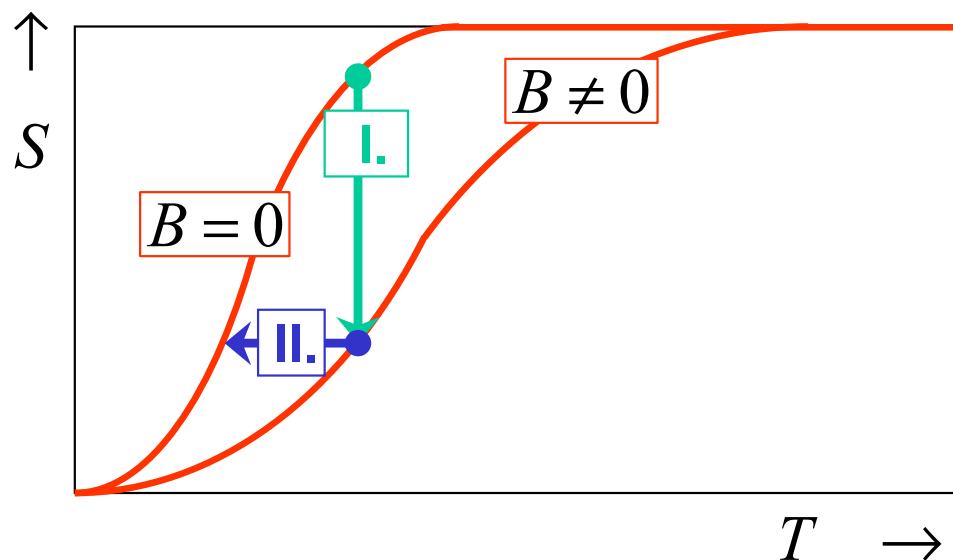
$$S \rightarrow S_{\infty} = -N_A k_B \ln w$$

$$N_A k_B \ln(2I + 1)$$

$$S \approx S_{\infty} - N_A C (B^2 + B_{\text{loc}}^2) / T^2$$

lokální pole jako  
míra spinových  
interakcí

# Princip chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací



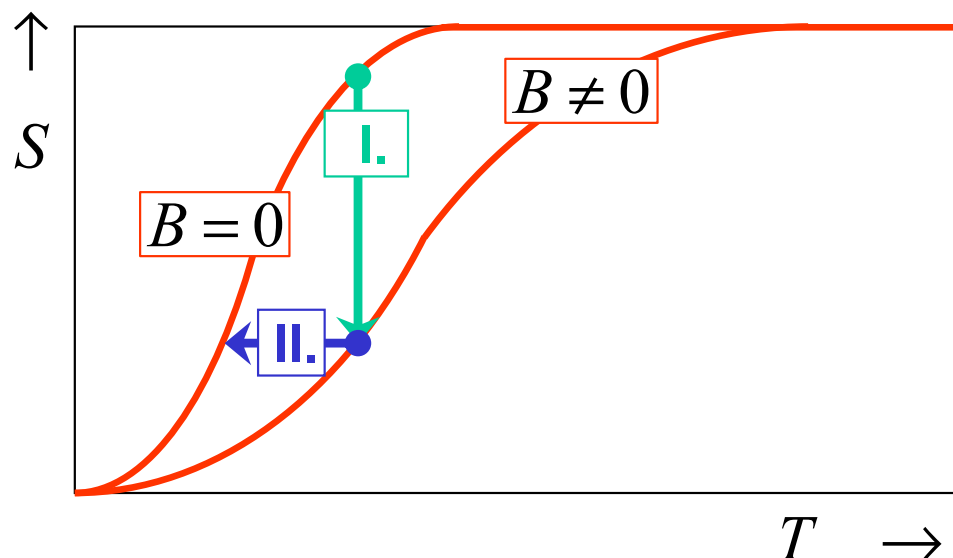
**I. KROK**      *izotermická magnetizace*

Entropie s magnetickým polem klesá

**II. KROK**      *adiabatická demagnetizace*

Teplota a vnitřní energie klesají

# Princip chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací



**I. KROK**      *izotermická magnetizace*

Entropie s magnetickým polem klesá

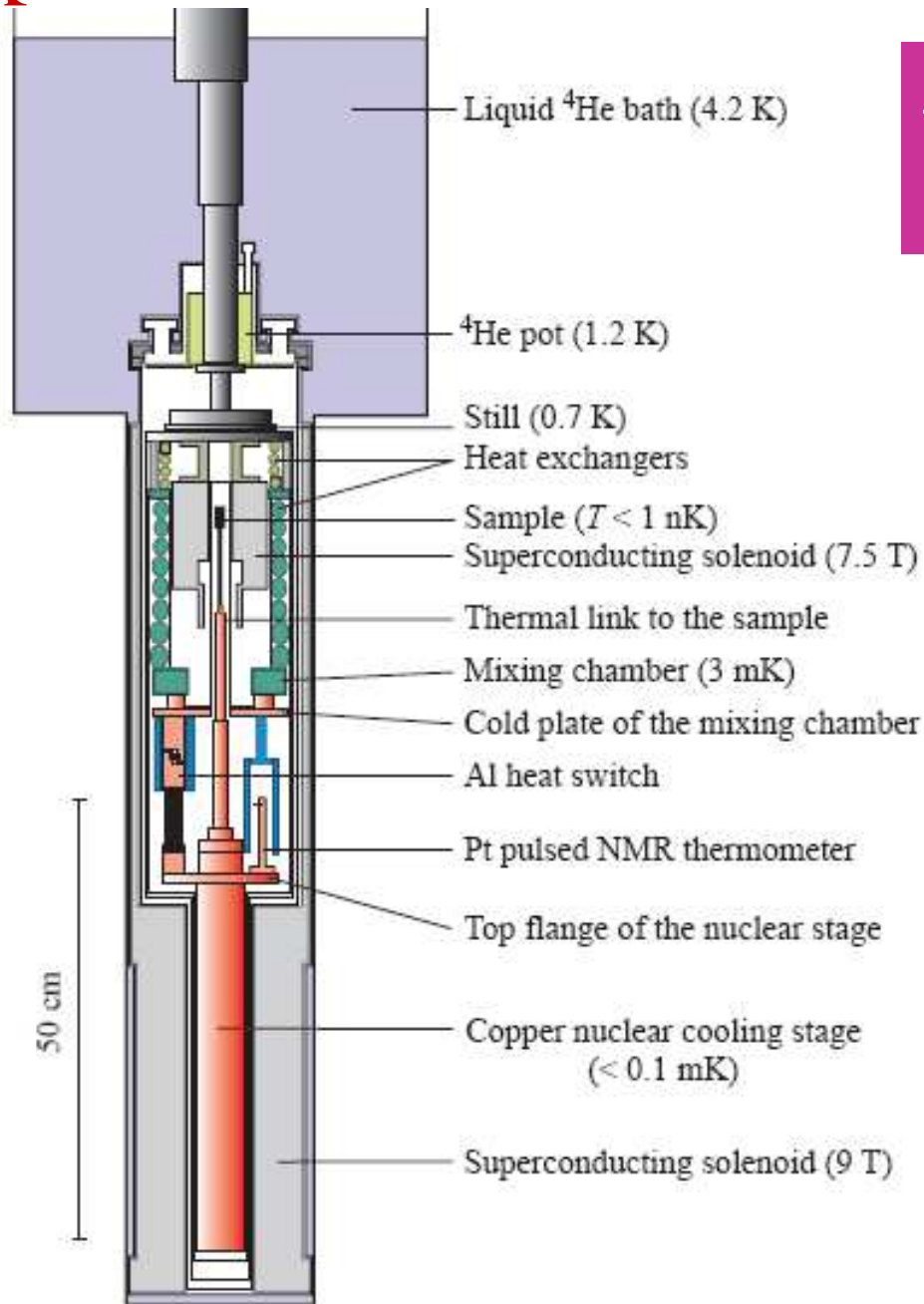
**II. KROK**      *adiabatická demagnetizace*

Teplota a vnitřní energie klesají

"vysokoteplotní" vzorec

$$T_{\text{kon}} = T_{\text{zač}} \sqrt{\frac{B_{\text{kon}}^2 + B_L^2}{B_{\text{zač}}^2 + B_L^2}}$$

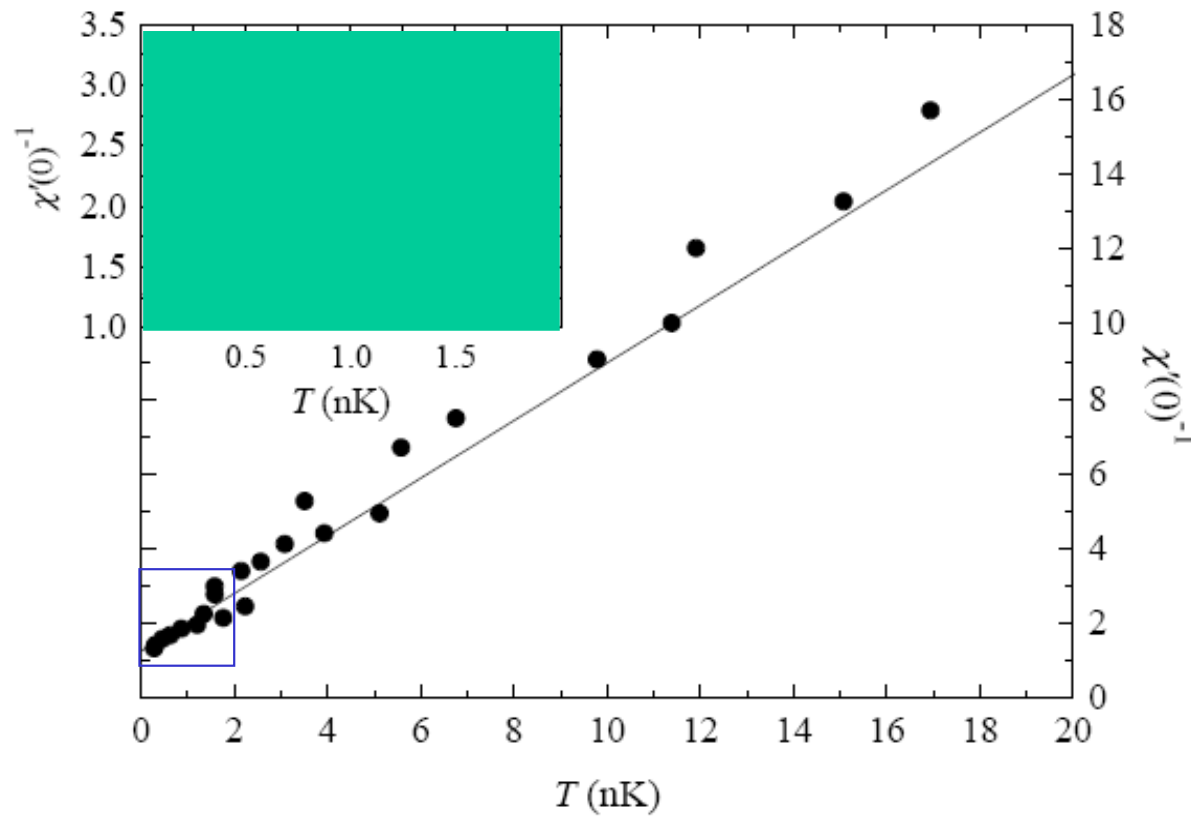
# Kryostat, kde byla dosažena rekordní teplota 100 pK



Helsinki University of Technology  
YKI, Low Temperature Group  
2000

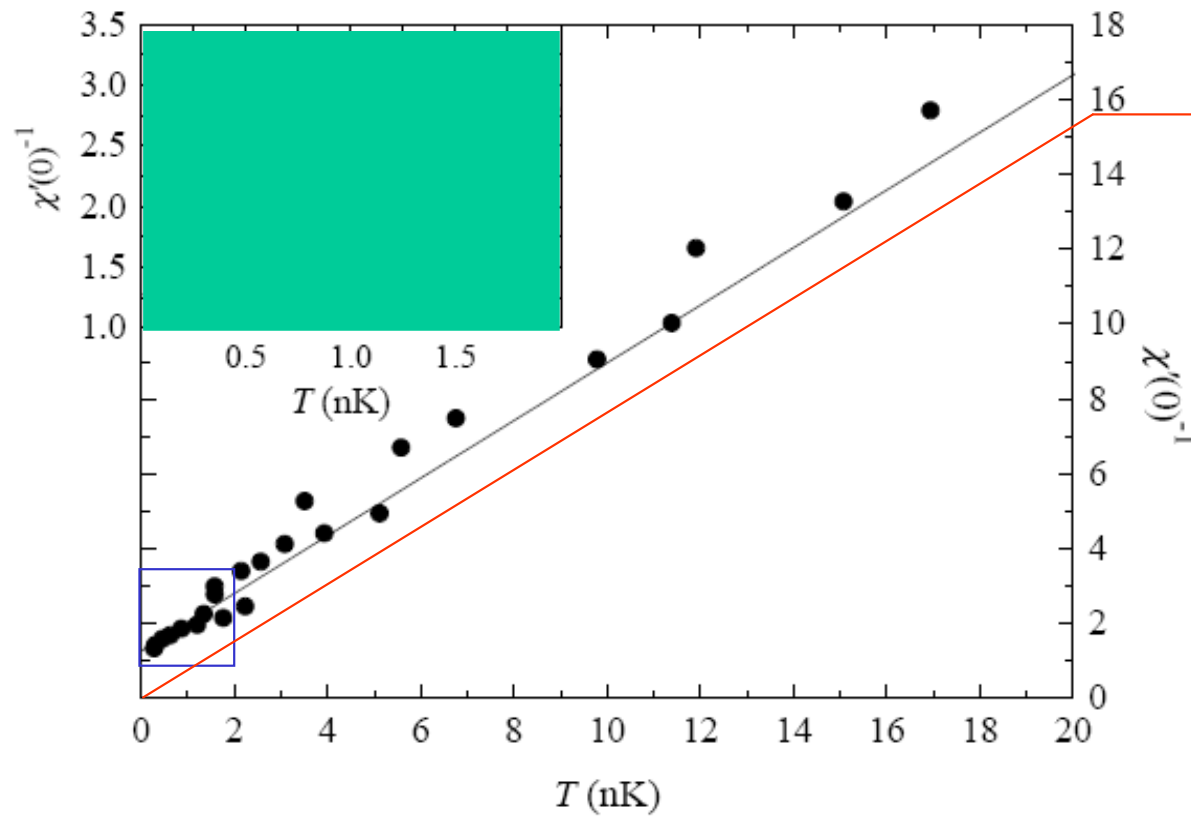
1. Předchlazení čerpáním helia 0,7 K
2. První stupeň: rozpouštěcí refrigerátor 3 mK
3. Druhý stupeň: NDR v mědi  $< 0,1$  mK
4. Třetí stupeň: NDR v samotném vzorku: monokrystal Rh  $< 1$  nK

# Spinová magnetická susceptibilita monokrystalu rhodia



$$\chi'(0) = \frac{\lambda}{T - \theta},$$
$$\theta = -1.65 \text{ nK}$$

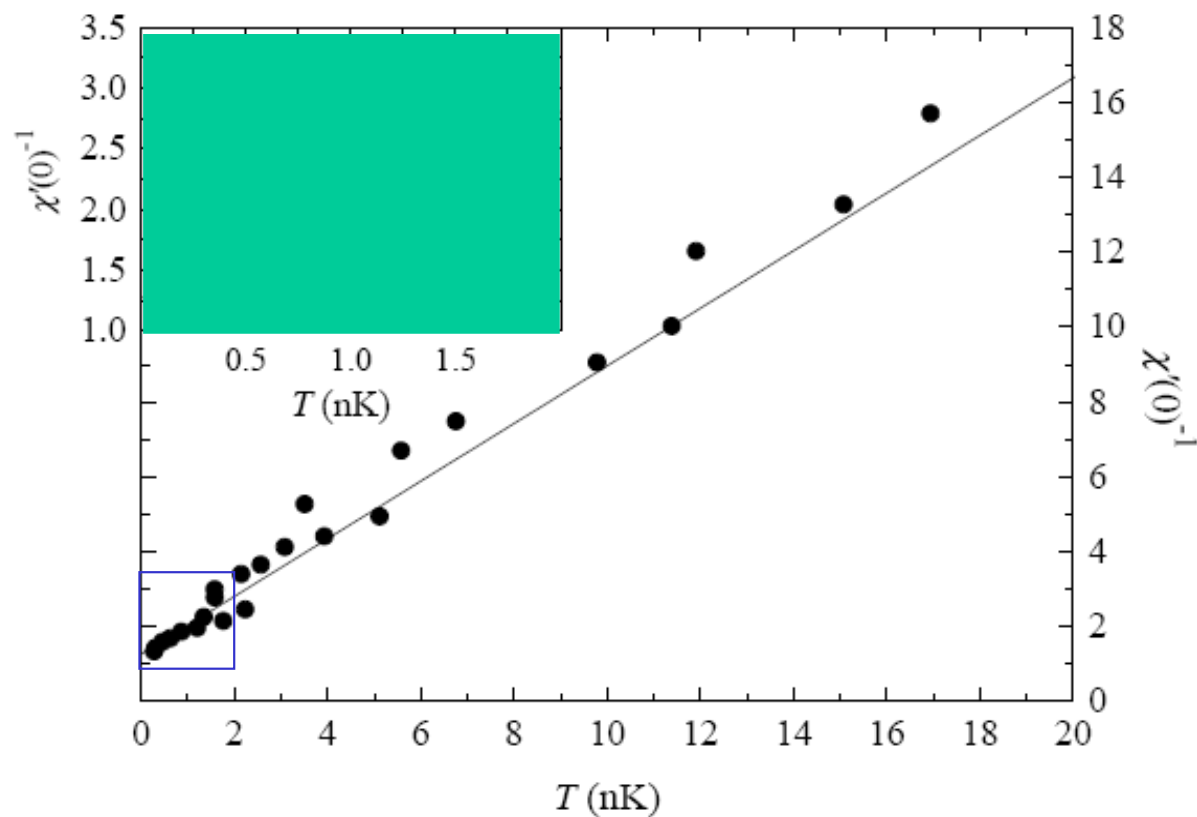
# Spinová magnetická susceptibilita monokrystalu rhodia



paramagnet (nezávislé spiny)

$$\chi'(0) = \frac{\lambda}{T - \theta},$$
$$\theta = -1.65 \text{ nK}$$

# Spinová magnetická susceptibilita monokrystalu rhodia



$$\chi'(0)^{-1} = \frac{\lambda}{T - \theta},$$

$$\theta = -1.65 \text{ nK}$$

Curie-Weissův zákon jaderné spiny v rhodiu ... antiferomagnetické uspořádání



# Spinová magnetická susceptibilita monokrystalu rhodia

V těchto extrémních podmínkách

- vzorek je ovládán prostřednictvím spinů, na které působí magnetické pole
- sám vzorek ( jeho spinový podsystém) působí jako chladicí medium
- měření pomocí nízkofrekvenční NMR udává susceptibilitu i statickou limitu (polarisaci)
- primární veličinou je právě *polarisace*, s níž přímo souvisí *entropie* vzorku jako základní termodynamická veličina
- *teplota* je odvozena z reakce na tepelné pulsy podle schematu:

atomová polarisace  $\propto \mu_J p$  je skutečně měřena

jaderný spin pro rhodium  $I = \frac{1}{2} \Rightarrow p = w_{\uparrow} - w_{\downarrow}; \quad w_{\uparrow} + w_{\downarrow} = 1$

entropie na spin přímo z definice

$$\frac{S}{R} = -\frac{1+p}{2} \ln \frac{1+p}{2} - \frac{1-p}{2} \ln \frac{1-p}{2}$$

teplota podle základní termodynamické identity  $\Delta Q = T \Delta S$

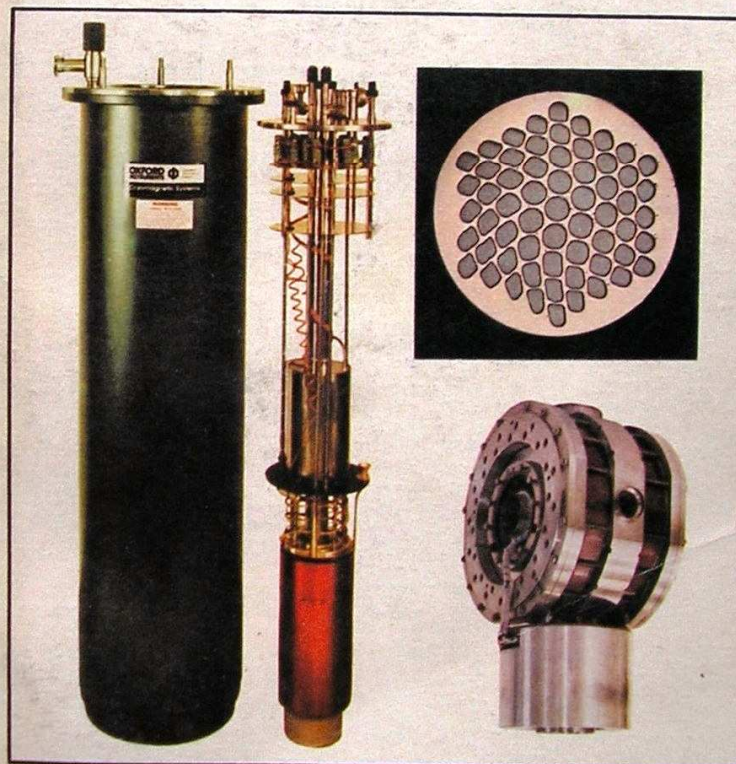


MILAN ODEHNAL

Supravodivost  
a jiné  
kvantové  
jevy

CV

CESTA  
K VĚDĚNÍ



# Laserové chlazení atomů

# Naše hlavní téma

	K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
	77	1877 <i>Pictet</i> kapalný kyslík?		
	22	1895 <i>von Linde</i> kap. vzduch		
	4,2	1898 <i>Dewar</i> kapalný vodík	1911 <i>Kamerlingh-Onnes</i> supravodivost kovů	
	0,3	1905 <i>von Linde</i> kap. dusík		1924 <i>Einstein</i> Bose-Einsteinova
	mK	1908 <i>Kamerlingh-Onnes</i> kapalně helium	odsávané helium 1937 <i>Kapica</i> supratekutost Helia-4	kondensace 1939 <i>Landau</i> teorie supratekutosti 1947 <i>Bogoljubov</i> teorie supratekutosti 1956 <i>BCS</i> teorie supravodivosti 1975 <i>Leggett</i> teorie supratekutosti Helia-3
	μK	odsávané helium 1933 paramagn. demagnet.	1972 <i>Osheroff</i> supratekutost Helia-3	
	nK	1951 <i>H. London</i> rozpouštěcí refrigerátor	1986 <i>Müller a Bednorz</i> vysokoteplot. supravodivost	
	pK	1956 <i>Kurti</i> NDR (jaderná ...) 1985 <i>Hänsch</i> laserové chlazení (princip)	1995 <i>Wieman, ... Ketterle</i> BEC v atomových parách	

*\*Bardeen, Cooper a Schrieffer*



# The Nobel Prize in Physics 1997

"for development of methods to cool and trap atoms with laser light"



**Steven Chu**

🕒 1/3 of the prize

USA

Stanford University  
Stanford, CA, USA

b. 1948



**Claude  
Cohen-Tannoudji**

🕒 1/3 of the prize

France

Collège de France; École  
Normale Supérieure  
Paris, France

b. 1933  
(in Constantine, Algeria)



**William D. Phillips**

🕒 1/3 of the prize

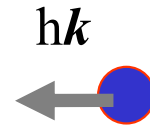
USA

National Institute of  
Standards and  
Technology  
Gaithersburg, MD, USA

b. 1948

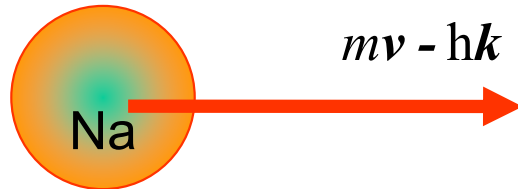
Titles, data and places given above refer to the time of the award.  
Photos: Copyright © The Nobel Foundation

# Jednoduché schéma brzdění atomů

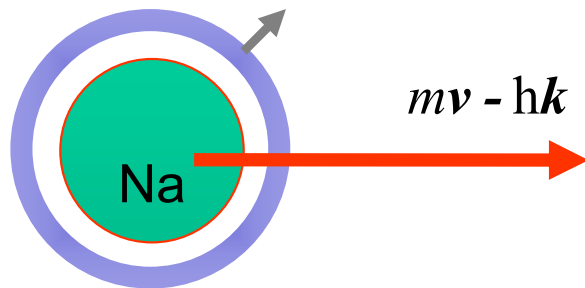


$$k = \omega_{D_2} / c$$

podmínka absorpce



excitovaný atom,  
zmenšená hybnost



spontánní emisí se atom  
deexcituje, foton je v průměru  
emitován všemi směry

zpomalované atomy přestávají rezonovat s laserovým paprskem

- změnou frekvence laseru zachováme rezonanci s atomy

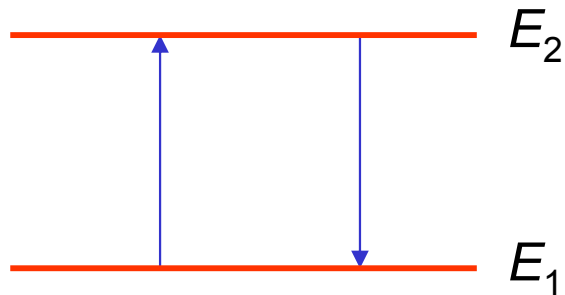
Chirped laser cooling

- změníme rezonanční frekvenci atomů při zachování frekvence laseru

Zeeman laser cooling



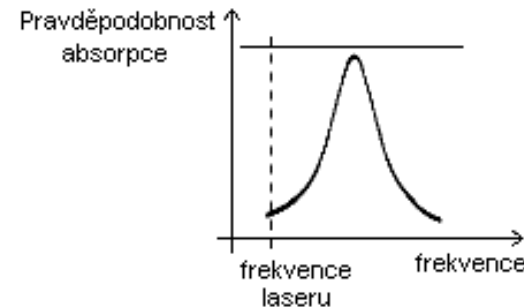
# Princip laserového chlazení



podmínka pohlcení (vyzáření) fotonu o určité energii

$$E_2 - E_1 = h f$$

atom může absorbovat s menší pravděpodobností i fotony o trochu jiné frekvenci



**Dopplerův jev**



nižší frekvence laseru než frekvence pohlcovaná atomem



atomy pohybující se proti laseru mohou absorbovat fotony

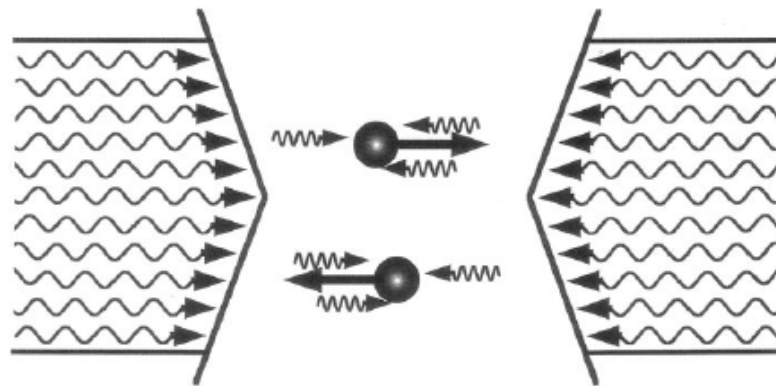


Figure 12. Doppler cooling in one dimension.

teplota Dopplerovského chlazení

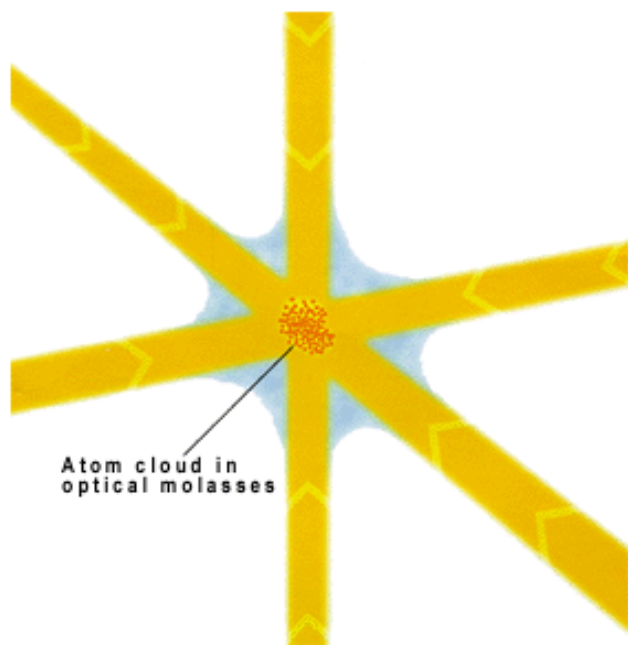
$$m \langle v_i^2 \rangle = k_B T = \frac{\hbar \Gamma}{4} \left( \frac{\Gamma}{2\delta} + \frac{2\delta}{\Gamma} \right)$$

$$k_B T_{\text{Dopp}} = \frac{\hbar \Gamma}{2}$$

kruhová frekvence

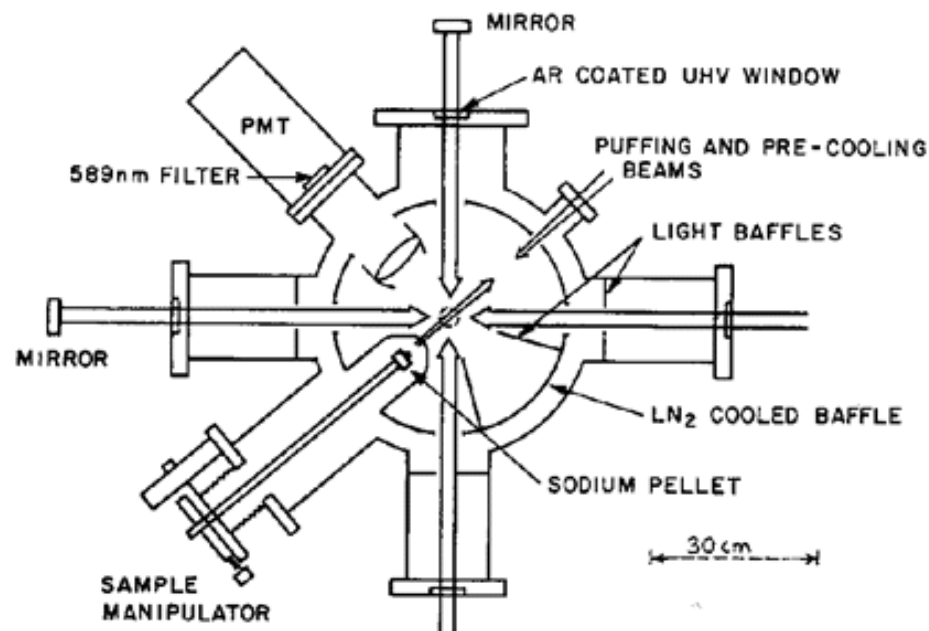
„životnost“ excitovaného stavu

# 3D chlazení a optický sirup



Steven Chu v roce 1985 použil tři dvojice laserových paprsků (tj. 3D realizace chlazení) ke zpomalení atomu sodíku

V průsečíku se atomy chovají jako v husté tekutině, odtud název „optický sirup“



# Realizace

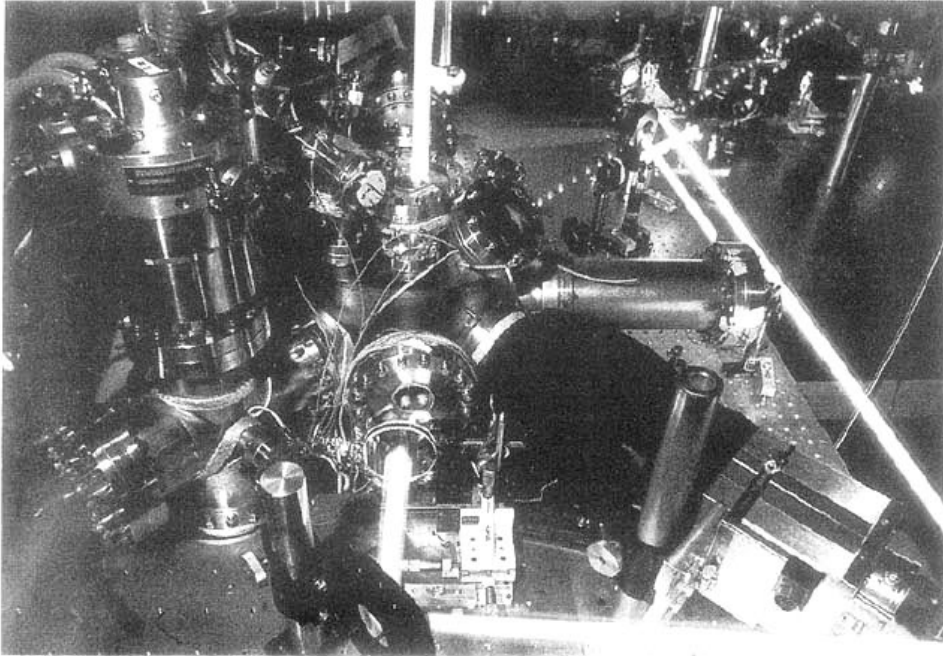


Figure 3 a. A photograph of the apparatus used to demonstrate optical molasses and the first optical trap for atoms. The photograph is a double exposure made by photographing the apparatus under normal lighting conditions and then photographing the laser beams by moving a white card along the beam path in a darkened room. The 10 Hz pulsed laser used to evaporate the sodium pellet (doubled YAG at 532nm) appears as dots of light.

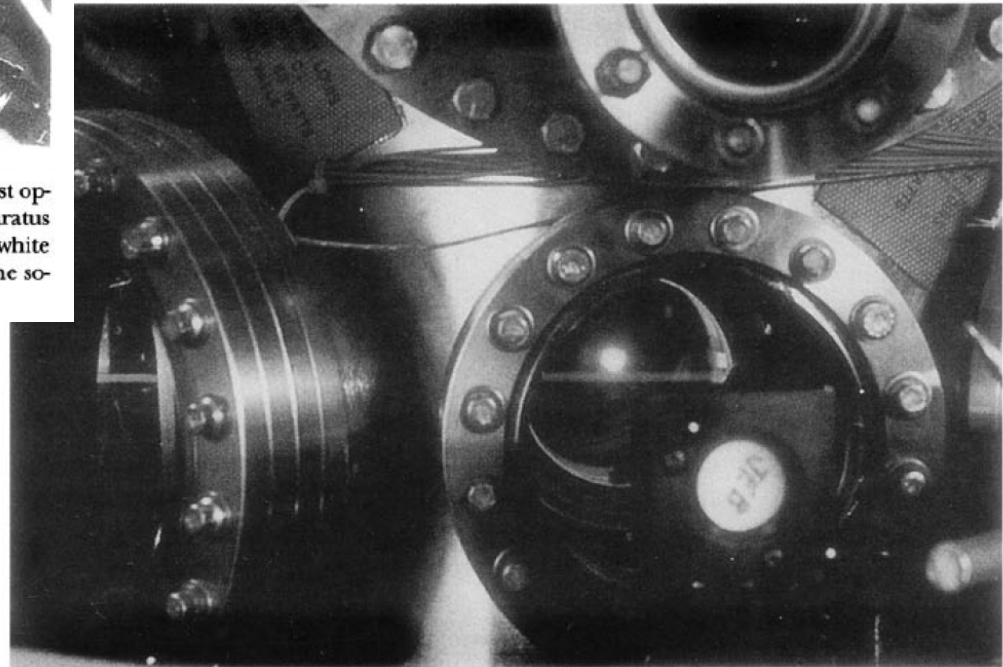


Figure 5 b. A photograph of atoms confined in a magneto-optic trap. The line of fluorescence below the ball of trapped atoms is due to the atomic beam used to load the trap.

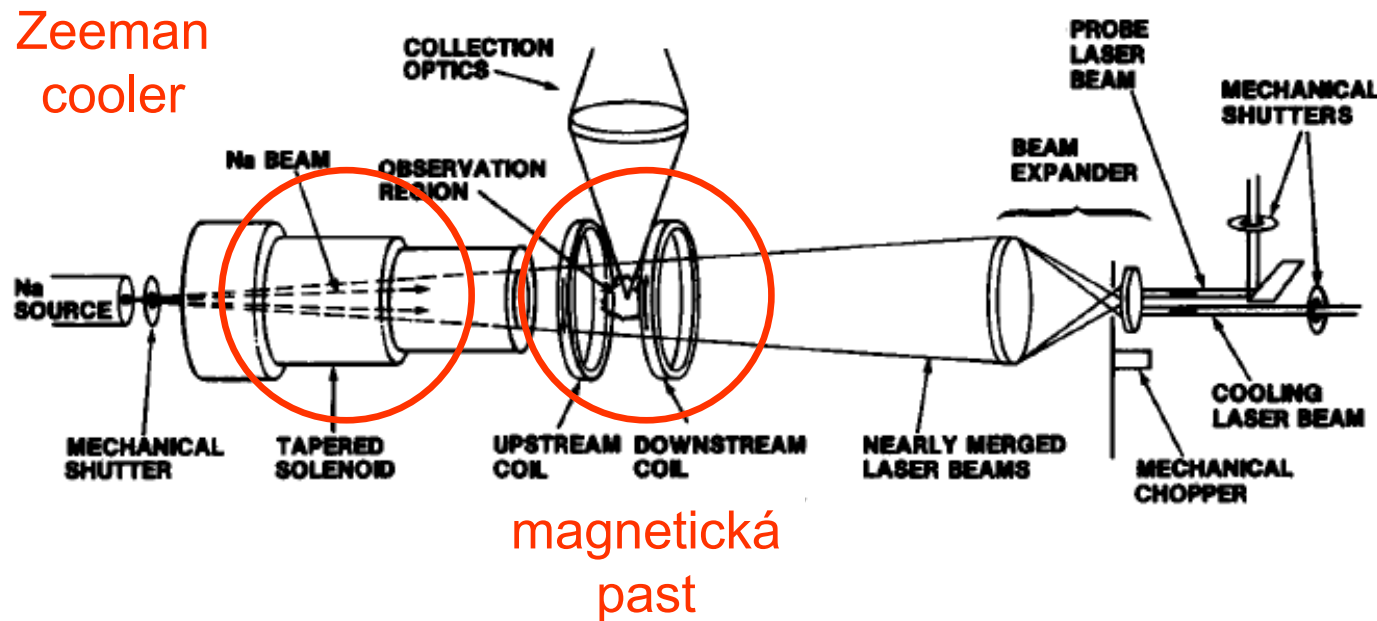


# Magnetické pasti

William D. Phillips užívá  
nehomogenního  
magnetického pole



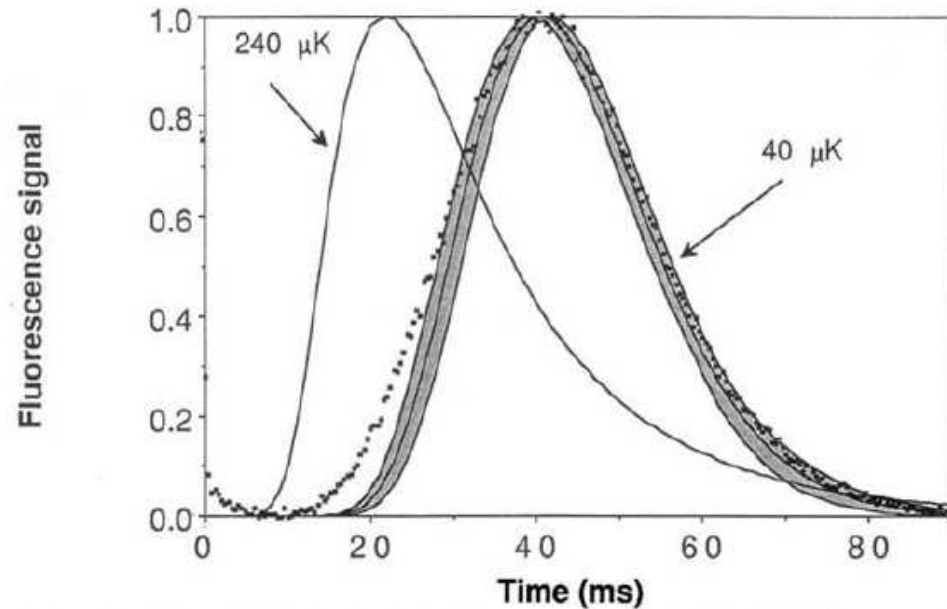
atomy lze chytat (většina  
atomů se chová jako malý  
magnet)



Zpomalené atomy doletěly do pasti a tam zastaveny dodatečným pulsem

užívají metody fontány (fountain) a sprchy (shower) k určení  
teploty zachycených atomů

# Phillipsovy výsledky



atomy jsou ve skutečnosti  
studenější  
(přibližně 40 μK)

X

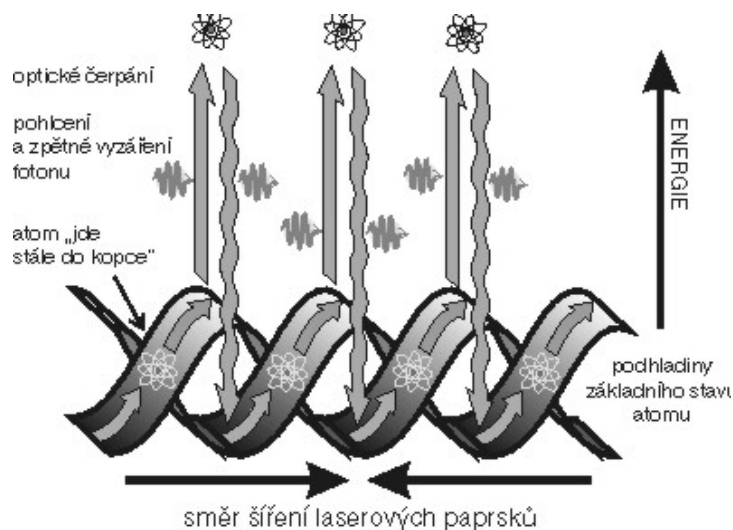
Dopplerovský model připouštěl  
240 μK

$$k_B T_{\text{Dopp}} = \frac{\hbar \Gamma}{2}$$

atomy Na  
 $\Gamma/2\pi = 10 \text{ MHz}$

odpovídá 30 cm/s podél dané osy

Cohen-Tannoudji přichází s mechanismem dodatečného tzv. **Sisyfova chlazení**  
(polarization gradient cooling)



v úvahu je totiž třeba brát všechny relevantní  
energetické hladiny příslušného atomu (včetně  
takzvané hyperjemné struktury)

další model chlazení uvažuje tzv. **temné stavy**,  
tj. situace, kdy je zabráněno ochlazenému atomu  
absorbovat a emitovat fotony

# Chladné atomy a BEC

# Naše hlavní téma

	K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
		1877 <i>Pictet</i> kapalný kyslík?		
	77			
	22	1895 <i>von Linde</i> kap. vzduch		
	4,2	1898 <i>Dewar</i> kapalný vodík	1911 <i>Kamerlingh-Onnes</i> supravodivost kovů	
		1905 <i>von Linde</i> kap. dusík		1924 <i>Einstein</i> Bose-Einsteinova
	0,3 mK	1908 <i>Kamerlingh-Onnes</i> kapalně helium	odsávané helium	kondensace
			1937 <i>Kapica</i> supratekutost Helia-4	1939 <i>Landau</i> teorie supratekutosti
	μK	odsávané helium		1947 <i>Bogoljubov</i> teorie supratekutosti
		1933 paramagn. demagnet.		1956 <i>BCS</i> teorie supravodivosti
		1951 <i>H. London</i>	1972 <i>Osheroff</i> supratekutost Helia-3	1975 <i>Leggett</i> teorie supratekutosti Helia-3
	nK	rozpouštěcí refrigerátor	1986 <i>Müller a Bednorz</i> vysokoteplot. supravodivost	
	pK	1956 <i>Kurti</i> NDR (jaderná ...)		
		1985 <i>Hänsch</i> laserové chlazení (princip)	1995 <i>Wieman, ... Ketterle</i> BEC v atomových parách	

*\*Bardeen, Cooper a Schrieffer*

# Nobelisté II.



## The Nobel Prize in Physics 2001

"for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates"



**Eric A. Cornell**

1/3 of the prize

USA

University of  
Colorado, JILA  
Boulder, CO, USA

b. 1961



**Wolfgang  
Ketterle**

1/3 of the prize

Federal Republic of  
Germany

Massachusetts  
Institute of  
Technology (MIT)  
Cambridge, MA, USA

b. 1957



**Carl E. Wieman**

1/3 of the prize

USA

University of  
Colorado, JILA  
Boulder, CO, USA

b. 1951

Bosony a Fermiony

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou **nerozlišitelné**



# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2)$$

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$
polo-číselný spin	celočíselný spin

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$
polo-číselný spin	celočíselný spin

přichází  
odnikud  
"empirický  
fakt"



# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$
polo-číselný spin	celočíselný spin
elektrony	fotony

přichází  
odnikud  
"empirický  
fakt"

# Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$
polo-číselný spin	celočíselný spin
elektrony	fotony

přichází  
odnikud  
"empirický  
fakt"

*celkem dobře známé*

*ted' pro nás důležité*

# Mnohačástečkové stavy pro Bosony a Fermiony

# Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (... **neinteragující**)

Stav několika částic úplně popíšeme tak, že určíme

**kolik částic se nachází v různých jednočásticových stavech**

*Podrobnější popis neexistuje, protože částice nejsou rozlišitelné*

# Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (... **neinteragující**)

Stav několika částic úplně popíšeme tak, že určíme

**kolik částic se nachází v různých jednočásticových stavech**

*Podrobnější popis neexistuje, protože částice nejsou rozlišitelné*

FORMÁLNÍ PROVEDENÍ



# Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (... **neinteragující**)

base jedno-částicových stavů (  $\alpha$  úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_{\alpha}(x)$$

# Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (... **neinteragující**)

base jedno-částicových stavů (  $\alpha$  úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

**FOCKŮV PROSTOR** prostor mnoha-částicových stavů

basové stavy ... symetrizované součiny jedno-částicových stavů **pro bosony**

... antisymetrizované součiny jedno-částicových stavů **pro fermiony**

určeny **posloupností obsazovacích čísel**      **0, 1, 2, 3, ... pro bosony**

**0, 1**      ... **pro fermiony**

# Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (... **neinteragující**)

base jedno-částicových stavů (  $\alpha$  úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

**FOCKŮV PROSTOR** prostor mnoha-částicových stavů

basové stavy ... symetrizované součiny jedno-částicových stavů **pro bosony**

... antisymetrizované součiny jedno-částicových stavů **pro fermiony**

určeny posloupností obsazovacích čísel **0, 1, 2, 3, ... pro bosony**

**0, 1** ... **pro fermiony**

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mathbf{K}, \alpha_p, \mathbf{K}\}$$

$$\Psi_{\{n_\alpha\}} = |n_1, n_2, n_3, \mathbf{K}, n_p, \mathbf{K}\rangle \quad n\text{-částicový stav} \quad n = \sum n_p$$



# Representace obsazovacích čísel pro fermiony

Representace obsazovacích čísel (v podstatě *druhé kvantování*)

.... pro **fermiony**

**Pauliho princip**

*fermiony jsou distanční typ jako rackové*

$$\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, K, \alpha_p, K \}$$

$$\Psi_{\{n_\alpha\}} = | n_1, n_2, n_3, K, n_p, K \rangle \quad n\text{-částicový stav} \quad n = \sum n_p, n_p = 0, 1$$

$$|0\rangle = |0, 0, 0, K, 0, K\rangle \quad 0\text{-částicový stav} \quad \mathbf{vakuum}$$

$$|1_p\rangle = |0, 0, 0, K, 1, K\rangle \quad 1\text{-částic.} \quad \varphi_{\alpha_p}(x)$$

$$|L\rangle = |0, 1, 1, K, 0, K\rangle \quad 2\text{-částic.} \quad (\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_2}(x') - \varphi_{\alpha_1}(x')\varphi_{\alpha_2}(x))/\sqrt{2}$$

$$|L\rangle = |0, 2, 0, K, 0, K\rangle \quad 2\text{-částic.} \quad \cancel{\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_1}(x')} \quad \mathbf{není dovoleno}$$

$$|F\rangle = | \underbrace{1, 1, K, 1}_N, 0, K \rangle \quad N\text{-částicový základní stav}$$

L

# Representace obsazovacích čísel pro bosony

Representace obsazovacích čísel (v podstatě *druhé kvantování*)

.... pro **bosony**

**princip identity**

*bosony jsou kontaktní typ jako opice*

$$\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, K, \alpha_p, K \}$$

$$\Psi_{\{n_\alpha\}} = | n_1, n_2, n_3, K, n_p, K \rangle \quad n\text{-částicový stav} \quad n = \Sigma n_p, n_p = 0, 1, 2, 3, K$$

$$|0\rangle = |0, 0, 0, K, 0, K\rangle \quad 0\text{-částicový stav} \quad \mathbf{vakuum}$$

$$|1_p\rangle = |0, 0, 0, K, 1, K\rangle \quad 1\text{-částic.} \quad \varphi_{\alpha_p}(x)$$

$$|L\rangle = |0, 1, 1, K, 0, K\rangle \quad 2\text{-částic.} \quad \left( \varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_2}(x') + \varphi_{\alpha_1}(x')\varphi_{\alpha_2}(x) \right) / \sqrt{2}$$

$$|L\rangle = |0, 2, 0, K, 0, K\rangle \quad 2\text{-částic.} \quad \varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_1}(x') \quad \mathbf{je\ dovoleno}$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle \quad N\text{-částicový základní stav}$$

**všechny na jednom orbitalu**

$$\varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_1}(x_2) \dots \varphi_{\alpha_1}(x_N)$$

Které částice jsou Bosony

# Příklady bosonů

částice -- kvanta  
 $N$  se nezachovává

elementární  
částice

fotony

kvazičástice

fonony  
magnony

bosony

komplexní částice  
 $N$  se zachovává

atomy

${}^4\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$   
alkalické kovy

excitované  
atomy

# Příklady bosonů (rozšíření tabulky)

částice -- kvanta  
 $N$  se nezachovává

elementární  
částice

fotony

kvazičástice

fonony  
magnony

složené  
kvazičástice

excitony  
Cooperovy páry

bosony

komplexní částice  
 $N$  se zachovává

atomy

${}^4\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$   
alkalické kovy

excitované  
atomy

ionty

molekuly

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

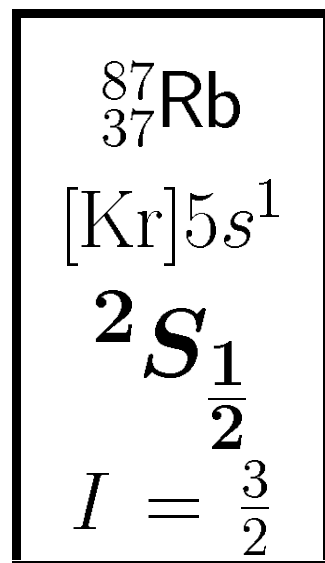
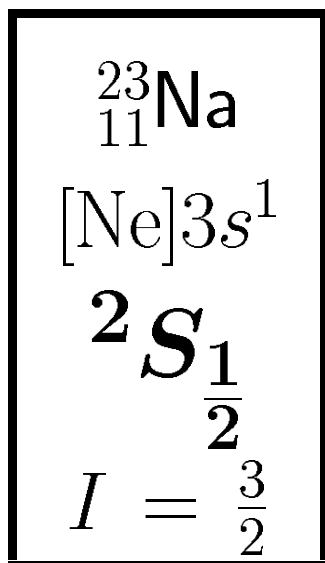
### **ZÁKLADNÍ PODMÍNKA**

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

### **ZÁKLADNÍ PODMÍNKA**

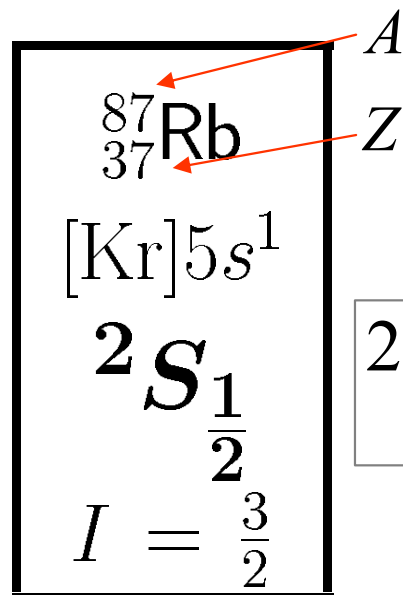
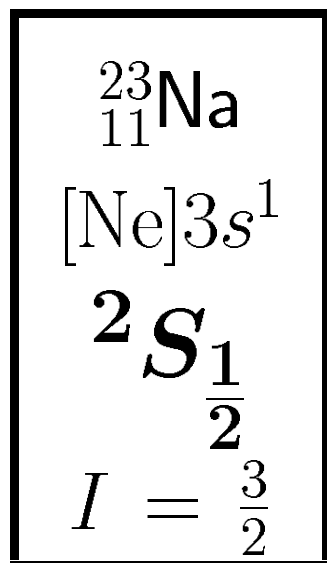
Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**



Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

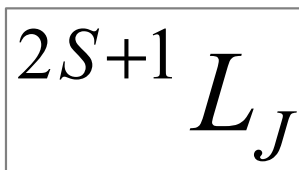
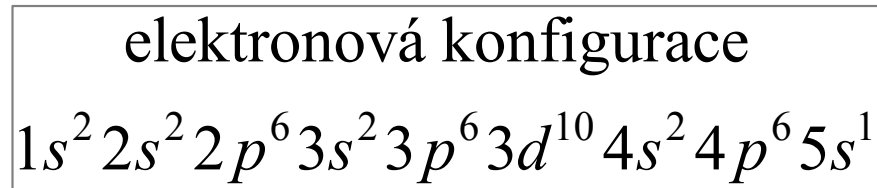
### ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**



A

Z



$$\dot{J} = \dot{L} + \dot{S}$$

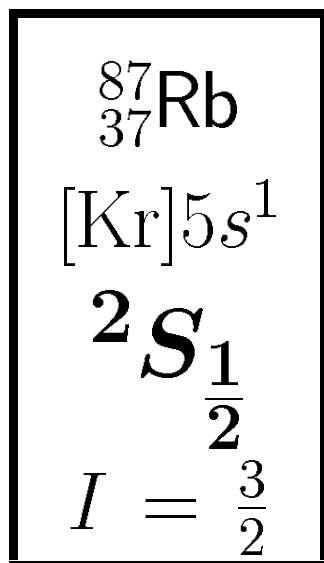
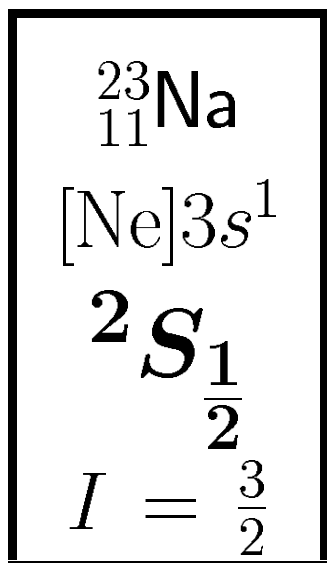
$$J = |S - L|, K, S + L = \frac{1}{2}$$



Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

### ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**



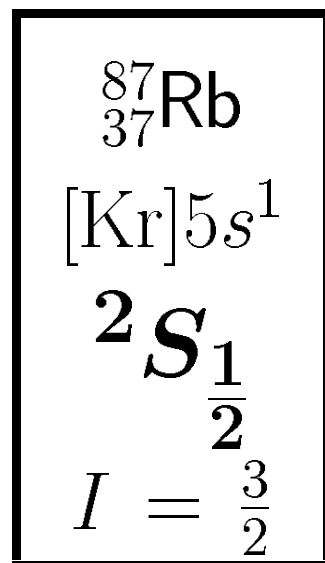
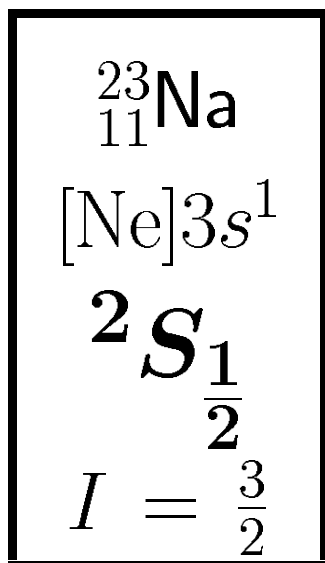
### Rubidium

37 elektronů	} <i>celk. elektronový spin</i>	$S = \frac{1}{2}$
37 protonů		
50 neutronů	} <i>celk. jaderný spin</i>	$I = \frac{3}{2}$

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

### **ZÁKLADNÍ PODMÍNKA**

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**



### **Rubidium**

37 elektronů      *celk. elektronový spin*       $S = \frac{1}{2}$

37 protonů }  
50 neutronů }      *celk. jaderný spin*       $I = \frac{3}{2}$

*celkový spin atomu*

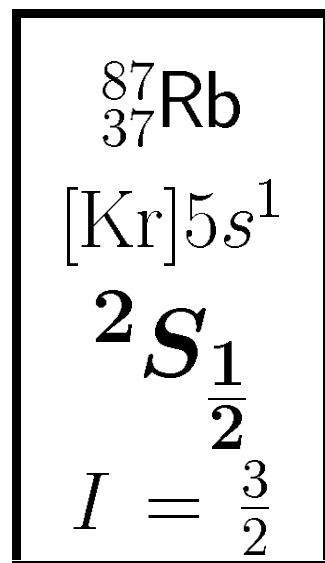
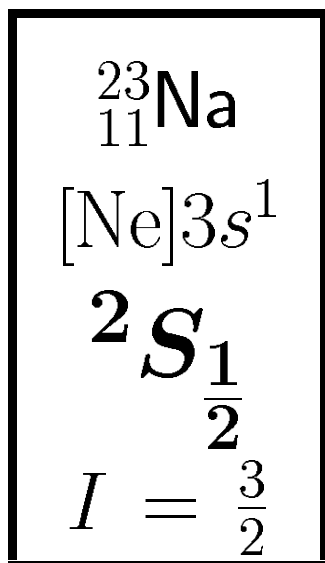
$$\dot{F} = \dot{S} + \dot{I}$$

$$F = |S - I|, K, S + I = 1, 2$$

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

### **ZÁKLADNÍ PODMÍNKA**

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**



### **Rubidium**

37 elektronů      *celk. elektronový spin*       $S = \frac{1}{2}$

37 protonů }  
50 neutronů }      *celk. jaderný spin*       $I = \frac{3}{2}$

*celkový spin atomu*

$$\dot{F} = \dot{S} + \dot{I}$$

$$F = |S - I|, K, S + I = 1, 2$$

Koexistují dvě rozlišitelné odrůdy; mohou být odděleny sdruženým působením hyperjemných interakcí a Zeemanova štěpení v magnetickém poli

# Ideální kvantové plyny

# Ideální klasický plyn

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

# Ideální klasický plyn

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

$$T = 0$$

Fermiony  
elektrony

$$|F\rangle = |1, 1, K, 1, 0, K\rangle$$

Bosony  $N = \text{const.}$   
atomy

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle$$

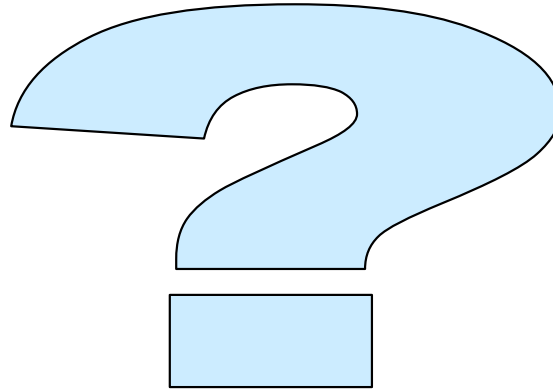
Bosony  
fotony

$$|\text{vac}\rangle_{78}$$

# Ideální klasický plyn

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn



$$T = 0$$

Fermiony  
elektrony

$$|F\rangle = |1, 1, K, 1, 0, K\rangle$$

Bosony  $N = \text{const.}$   
atomy

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle$$

Bosony  
fo t/n ony

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

$N$

$N$

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$



# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

chemický potenciál fixuje  
střední počet částic

fermiony

bosony

$N$

$N$

FD

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$$|F\rangle = |1, 1, K, 1, 0, K\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

vymrzání

$$|F\rangle = |1, 1, K, 1, 0, K\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

Aufbau princip

vymrzání

$$|F\rangle = |1, 1, K, 1, 0, K\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

Aufbau princip

$T \rightarrow 0$

?

$T \rightarrow 0$

vymrzání

$$|F\rangle = |1, 1, K, 1, 0, K\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

Aufbau princip

BEC

vymrzání

$$|F\rangle = |1, 1, K, 1, 0, K\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

Aufbau princip

diskontinuita  
fázový přechod

$T \rightarrow 0$

BEC

$T \rightarrow 0$

vymrzání

$$|F\rangle = |1, 1, K, 1, 0, K\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, K, 0, K\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

Bose-Einsteinova kondensace  
BEC



# Podstata BEC

Mějme homogenní plyn,  $N$  atomů v objemu  $V$

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}(E < k_B T) = \text{const} \times T^{3/2}$$

Daný počet atomů počínajíc jistou **kritickou teplotou** je příliš velký.

Přebytek  $N - \mathcal{N}$  se vyloučí do nejnižší hladiny, která je pak makroskopicky obsazena, tj. ze všech atomů je na ní makroskopický zlomek.

To je BEC kondensát.

Při nulové teplotě jsou na nejnižší hladině atomy všechny.

# Podstata BEC

Mějme homogenní plyn,  $N$  atomů v objemu  $V$

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}(E < k_B T) = \text{const} \times T^{3/2}$$

Daný počet atomů počínajíc jistou **kritickou teplotou** je příliš velký.

Přebytek  $N - \mathcal{N}$  se vyloučí do nejnižší hladiny, která je pak makroskopicky obsazena, tj. ze všech atomů je na ní makroskopický zlomek.

To je BEC kondensát.

Při nulové teplotě jsou na nejnižší hladině atomy všechny.

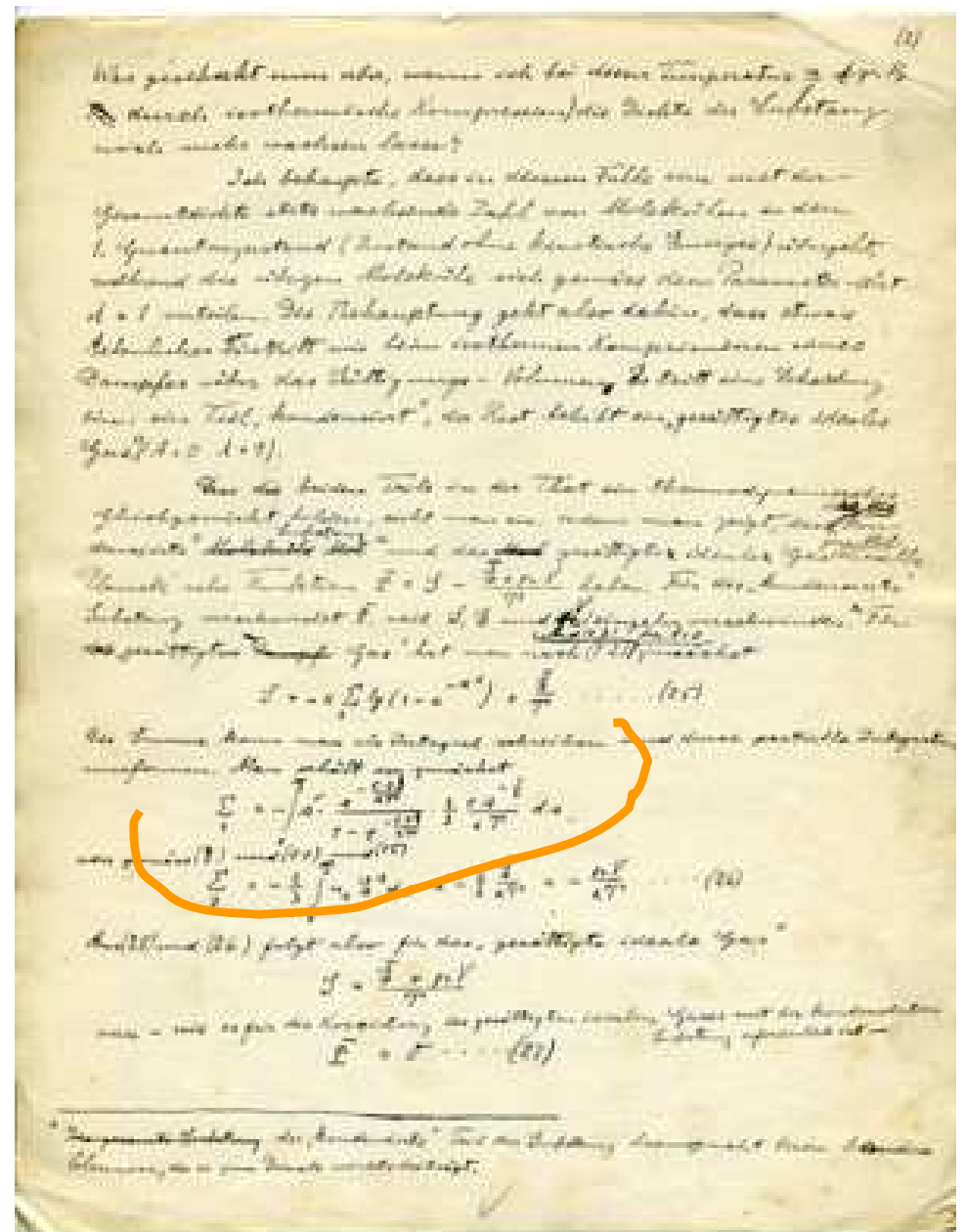
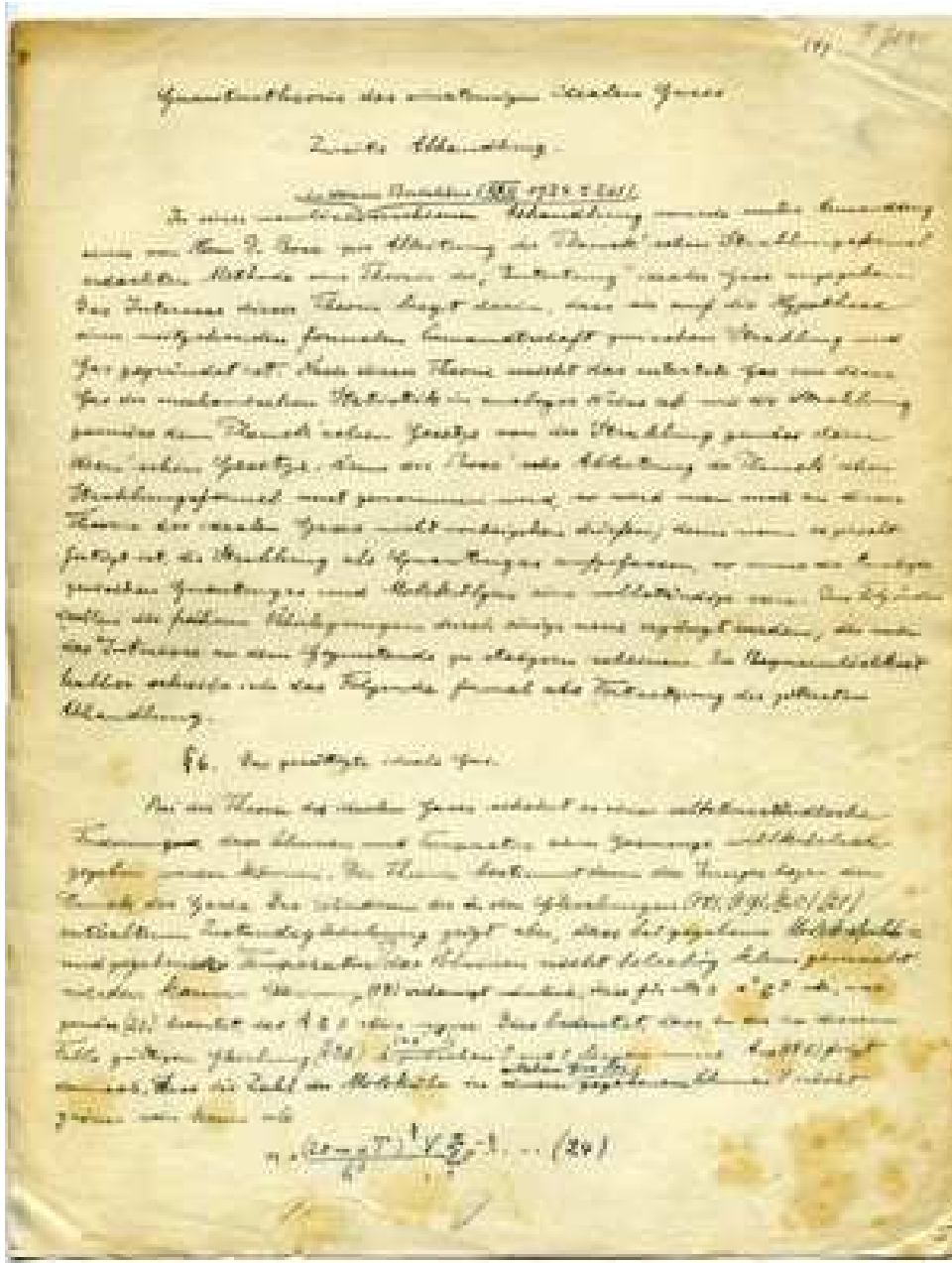
**Tuto úvahu a přesný výpočet integrálů provedl Einstein**  
*... následující folie.*

**Maximální počet atomů v plynné fázi při dané teplotě**

$$\mathcal{N}_G^0(T) = V \times 4\pi \left( \frac{2mk_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \equiv BT^{\frac{3}{2}}$$



# Einsteinův rukopis s odvozením BEC



# Kritická teplota pro BEC

## KRITICKÁ TEPLOTA

nejnižší teplota, při níž jsou všechny atomy ještě v plynné fázi:

$$N = \mathcal{N}_G^0(T_c) = V \times 4\pi \left( \frac{2mk_B T_c}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left( \frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,52725 \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A} = 8,0306 \times 10^{-19} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A}$$

# Kritická teplota pro BEC

## KRITICKÁ TEPLOTA

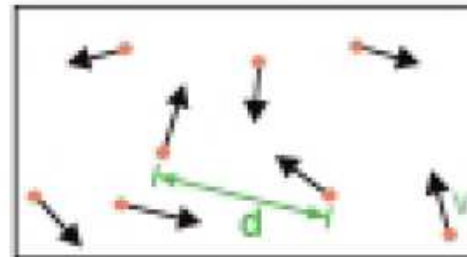
nejnižší teplota, při níž jsou všechny atomy ještě v plynné fázi:

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left( \frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,52725 \frac{h^2}{4\pi u k_B} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{M} = 8,0306 \times 10^{-19} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{M}$$

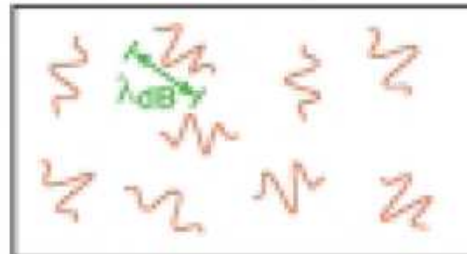
Několik odhadů:

system	$M$	$n$	$T_c$
He-4 kapalně	4	$2 \times 10^{28}$	1.47 K
Na past	23	$2 \times 10^{20}$	1.19 $\mu$ K
Rb past	87	$2 \times 10^{17}$	3.16 nK

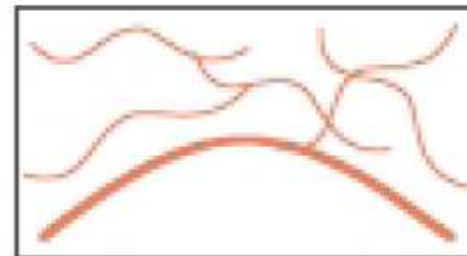
# Ketterle vysvětluje BEC švédskému králi



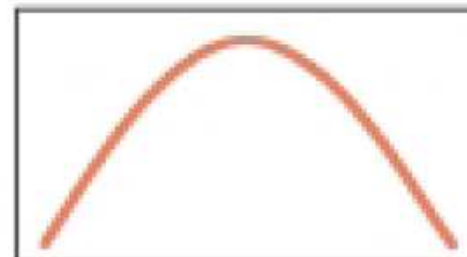
**High Temperature T:**  
thermal velocity  $v$   
density  $d^{-3}$   
"Billiard balls"



**Low Temperature T:**  
De Broglie wavelength  
 $\lambda_{dB} = h/mv \propto T^{-1/2}$   
"Wave packets"



**T = T<sub>crit</sub>:**  
**Bose-Einstein Condensation**  
 $\lambda_{dB} \sim d$   
"Matter wave overlap"



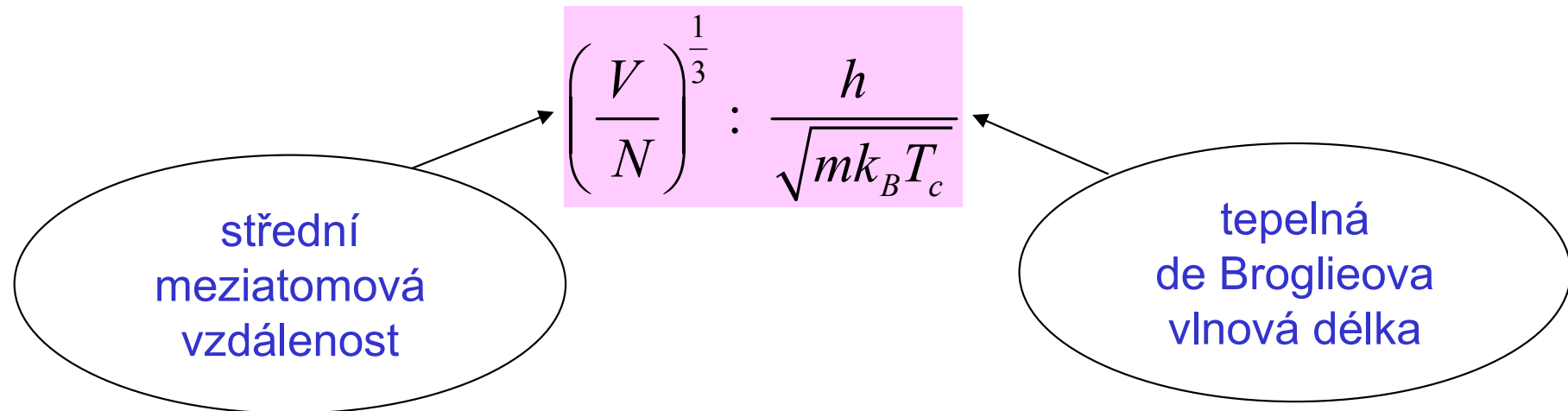
**T = 0:**  
**Pure Bose condensate**  
"Giant matter wave"

# Fyzikální interpretace $T_c$ podrobně

Formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left( \frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Upravíme na



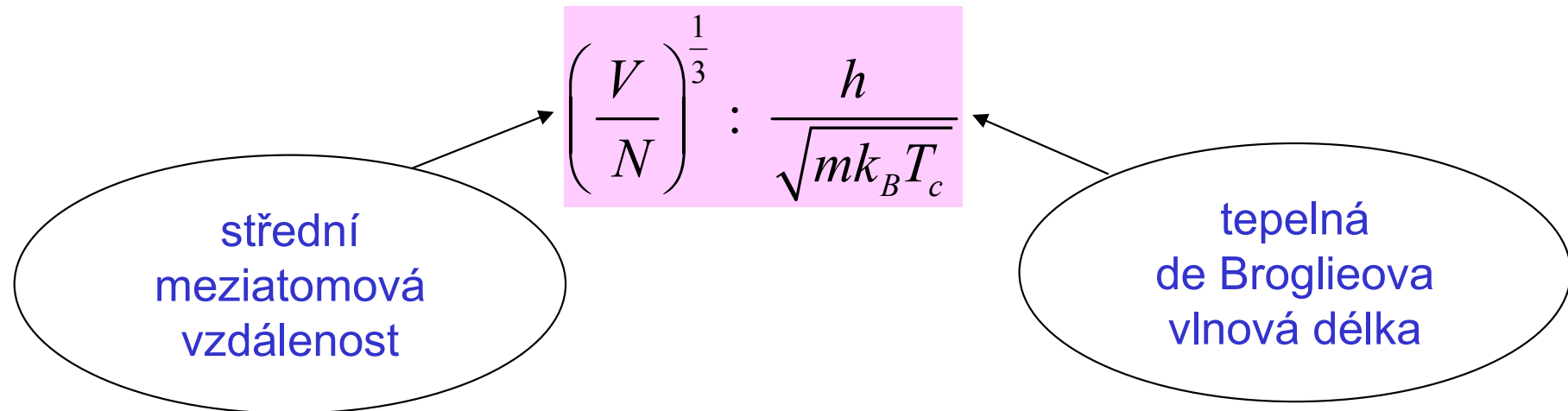


# Fyzikální interpretace $T_c$ podrobně

Formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left( \frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}}$$


Upravíme na



Kvantový přechod nastane když

vlnová oblaka atomů se začnou překrývat

# Vzpomínka: de Broglieho vlnová délka pro atomy a molekuly


$$\lambda = \frac{2\pi h}{p}$$

Tepelné energie jsou malé .... platí NR vzorce

$$\lambda = \frac{2\pi h}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}} \quad m = Au$$

V tepelné rovnováze

... rel. at. (mol.) hmotnost

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

tepelná vlnová  
délka

$$\lambda = \frac{2\pi h}{\sqrt{3u k_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{AT}} = 2,5 \times 10^{-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{AT}}$$

Dva užitečné vzorce

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} T / 11600 \quad \text{eV K} \quad \bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 158 \sqrt{\frac{T}{A}}$$

## Hustota kondensátu

$$n_G = \frac{\mathcal{N}(T)}{V} = BT^{\frac{3}{2}} = BT_C^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} = n \cdot \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro } T < T_C$$

# Hustota kondensátu

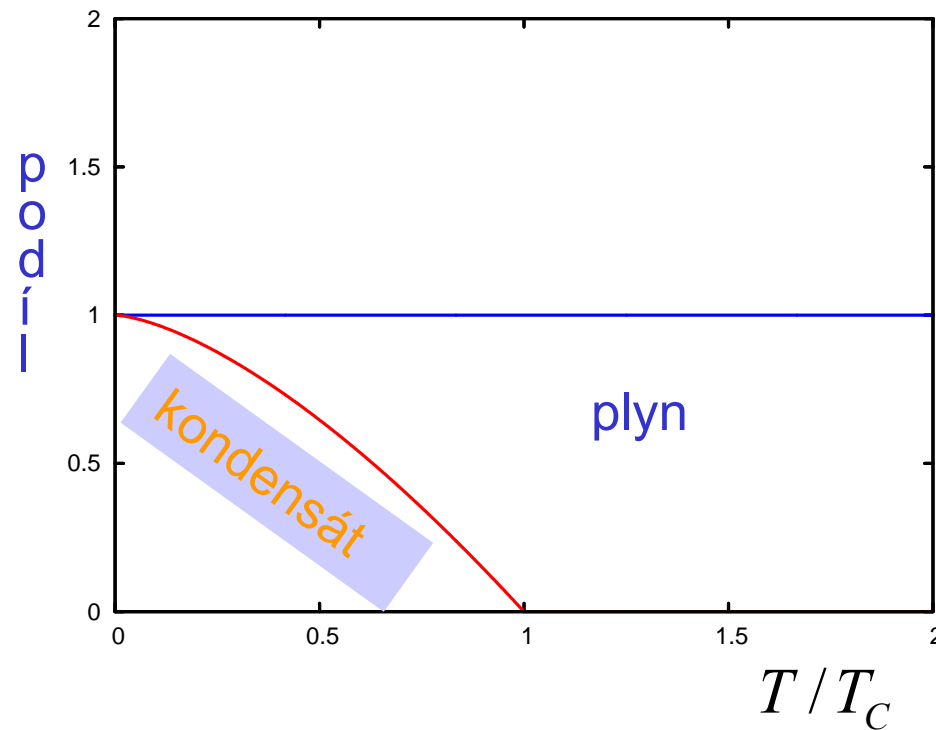
$$n_G = \frac{\mathcal{N}(T)}{V} = BT^{\frac{3}{2}} = BT_C^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} = n \cdot \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro } T < T_C$$

$$n \equiv n_G + n_{BEC} = n \cdot \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} + n \cdot \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

# Hustota kondensátu

$$n_G = \frac{\mathcal{N}(T)}{V} = BT^{\frac{3}{2}} = BT_C^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} = n \cdot \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro } T < T_C$$

$$n \equiv n_G + n_{BEC} = n \cdot \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} + n \cdot \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$



# Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky ... fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)

# Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky ... fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve

# Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky ... fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. **Experimentální objev BEC má proto zásadní význam**



# Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky ... fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. **Experimentální objev BEC má proto zásadní význam**
- I když nebereme „momentum condensation“ doslova, BEC vyvolává kvantovou koherenci mezi vzdálenými místy, tak jako obyčejná rovinná vlna

# Podrobnější rozbor BEC

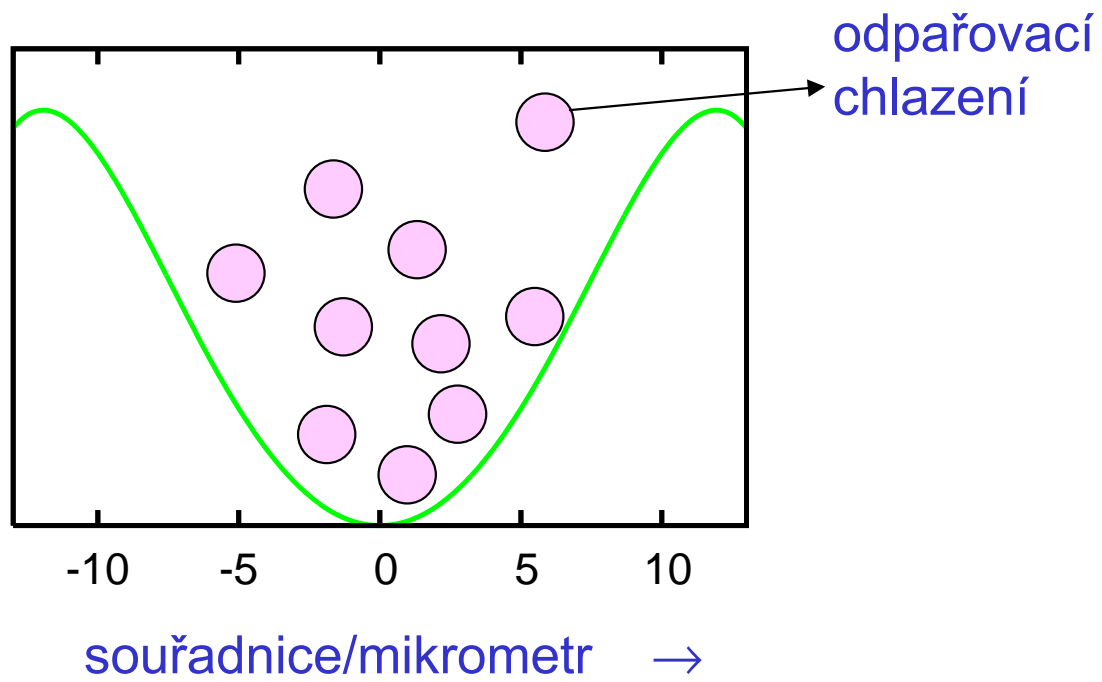
- Termodynamicky ... fázový přechod, i když podivný
  - Čistě kvantový efekt
  - Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
  - BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
  - BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. **Experimentální objev BEC má proto zásadní význam**
  - I když nebereme „momentum condensation“ doslova, BEC vyvolává kvantovou koherenci mezi vzdálenými místy, tak jako obyčejná rovinná vlna
- BEC je **makroskopický kvantový jev** ve dvou ohledech:
    - ♠ korelace makroskopické frakce všech atomů
    - ♠ odpovídající koherence prochází celým makroskopicky rozlehlým vzorkem

# BEC v atomových pastech

# Potenciál pasti

Typický profil

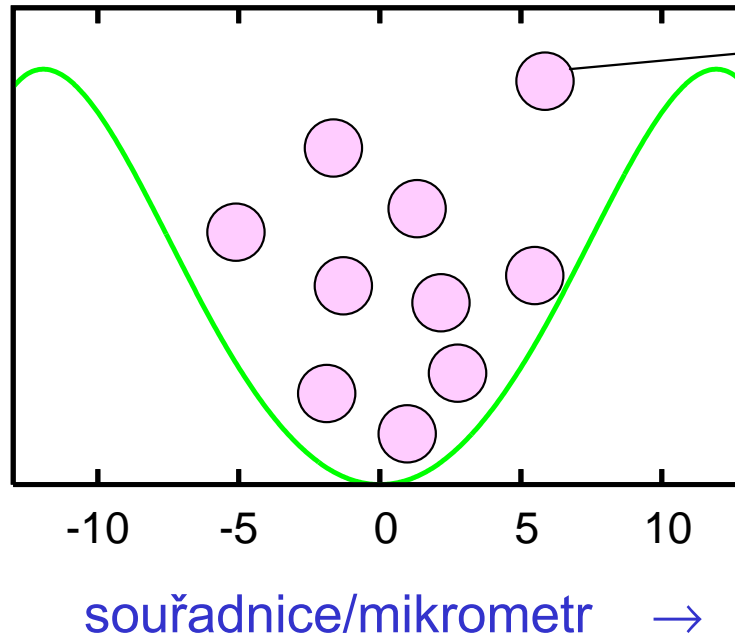
?



# Potenciál pasti

Typický profil

?

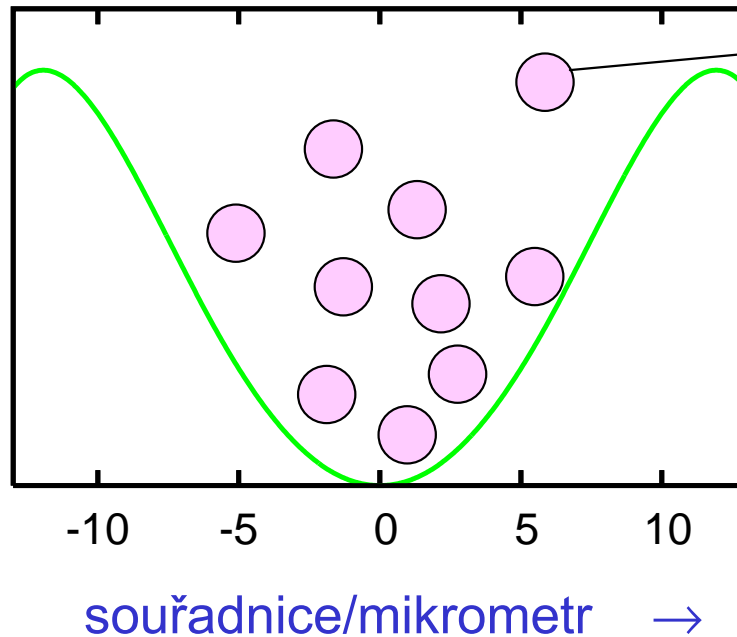


odpařovací  
chlazení ... to  
teprve sníží  
teplotu až ke  
kritické

# Potenciál pasti

Typický profil

?



odpařovací  
chlazení ... to  
teprve sníží  
teplotu až ke  
kritické

Jeden směr

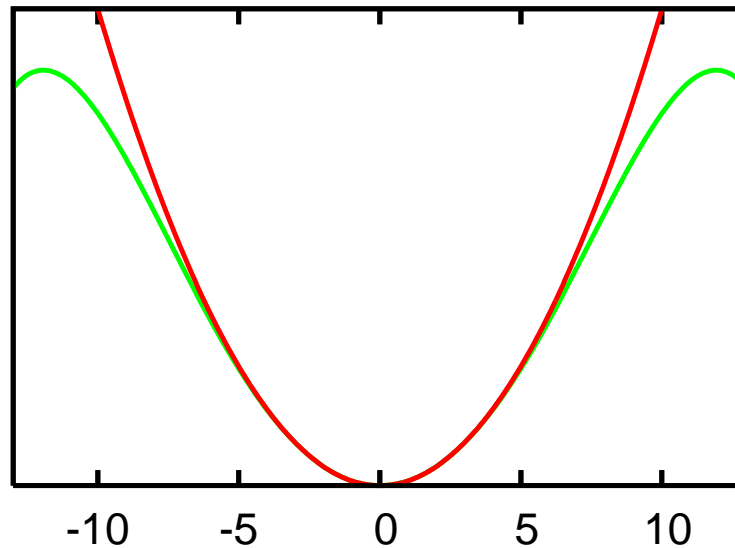
past zpravidla 3D, tvaru protáhlého elipsoidu

Pasti jsou z reálného světa, obláčky víceméně viditelné okem

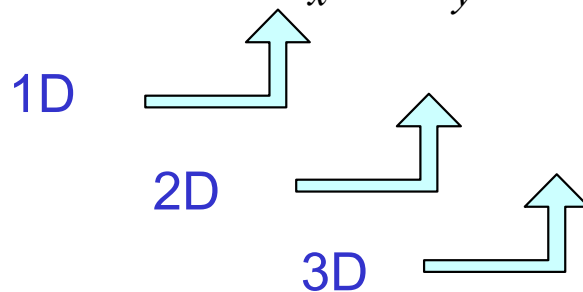
# Potenciál pasti

## Parabolická approximace

zpravidla anizotropní  
harmonický oscilátor  
*s axiální symetrií*

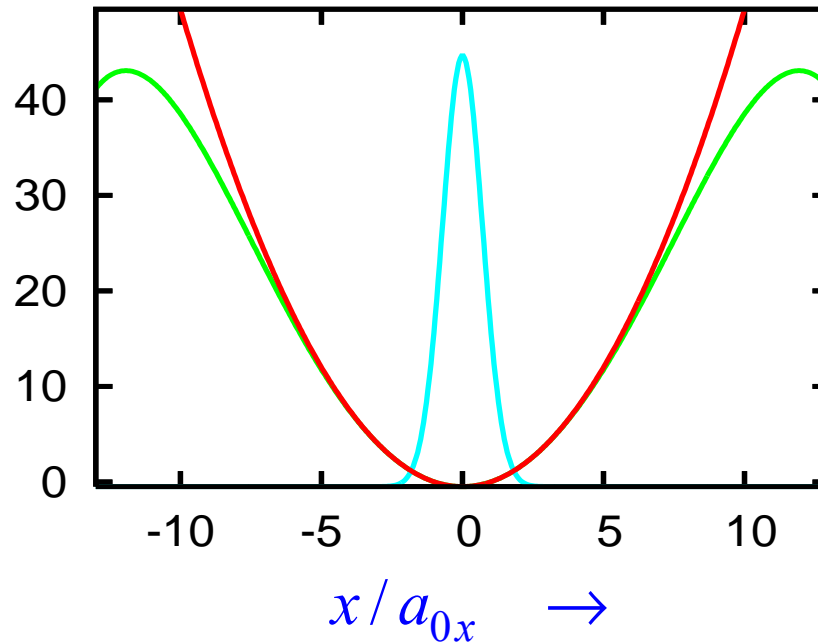


$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2$$
$$= H_x + H_y + H_z$$



# Základní stav a potenciál

číslo hladiny  
lineárního  
oscilátoru



200 nK

100 nK

$^{87}\text{Rb}$

$a_0 = 1\mu\text{m}$

$\hbar\omega = 10\text{ nK}$

$N \approx 10^6$

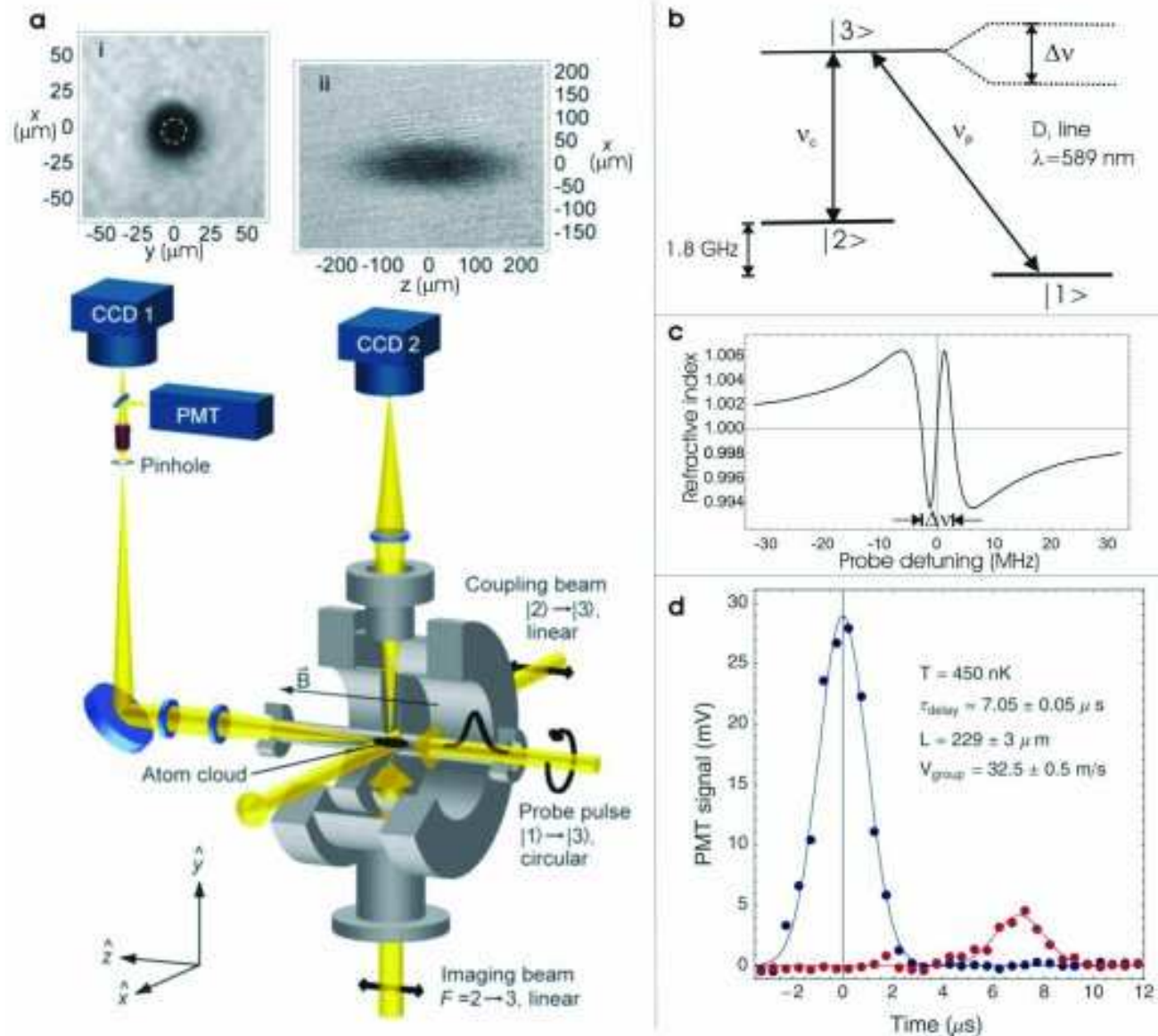
$$\psi_0(x, y, z) = \phi_{0x}(x)\phi_{0y}(y)\phi_{0z}(z)$$

$$\phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a_0^2}}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar^2}{ma_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar^2}{Mu_m a_0^2}$$

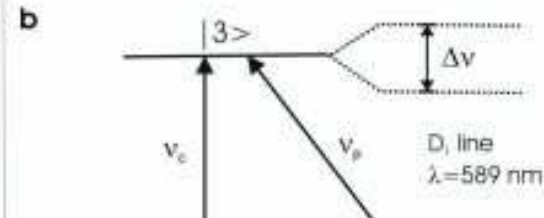
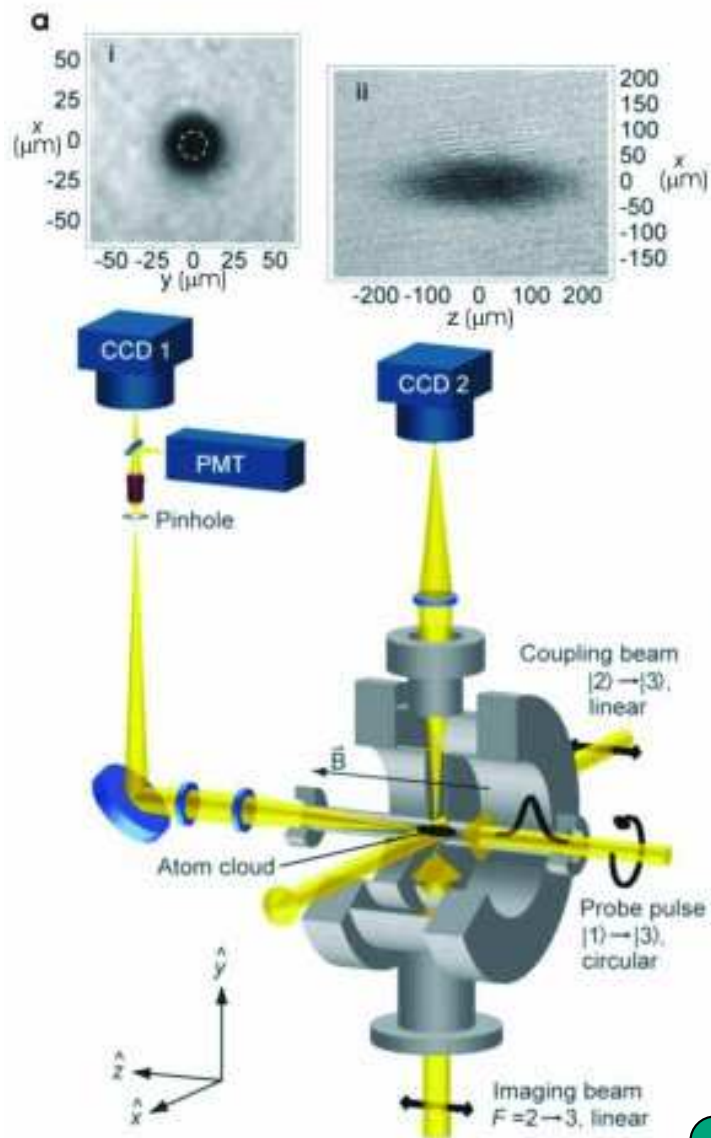
$$V(u) = \frac{1}{2}m\omega^2 u^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \left(\frac{u}{a_0}\right)^2$$



# Pomalé světlo ve studených obláčcích sodíku



# Pomalé světlo ve studených obláčcích sodíku



## CO VIDÍME

- obláček je *makroskopický*
- vidíme *tepelné rozdělení*
- cigárový tvar: *protažený rotační elipsoid*
- difusní obrysy: *Maxwellovo–Boltzmannovo rozdělení*
- *prostorová hustota v parabolickém potenciálu*

# Hustota částic v prostoru: Boltzmannova limita

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou  
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$\begin{aligned}f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= e^{\beta(\mu - W - U(\mathbf{r}))} \\n_{\text{THERM}}(\mathbf{r}) &= \int d^3 \mathbf{p} \cdot f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\&\propto e^{-\beta U(\mathbf{r})} \\&= e^{-\frac{1}{2} \beta m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}\end{aligned}$$

# Hustota částic v prostoru: Boltzmannova limita

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou  
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$\begin{aligned}f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= e^{\beta(\mu - W - U(\mathbf{r}))} \\n_{\text{THERM}}(\mathbf{r}) &= \int d^3 \mathbf{p} \cdot f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\&\propto e^{-\beta U(\mathbf{r})} \\&= e^{-\frac{1}{2} \beta m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}\end{aligned}$$

Vzpomínka na Perrina a  
barometrickou formuli

# Hustota částic v prostoru: BE kondensát při $T = 0$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$\begin{aligned} n_{\text{BEC}}(\mathbf{r}) &= |\phi_{0x}(x)|^2 |\phi_{0y}(y)|^2 |\phi_{0z}(z)|^2 \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \\ &= \frac{1}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} e^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \end{aligned}$$

# Hustota částic v prostoru: BE kondensát při $T = 0$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$n_{\text{BEC}}(\mathbf{r}) = |\phi_{0x}(x)|^2 |\phi_{0y}(y)|^2 |\phi_{0z}(z)|^2 \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$
$$= \frac{1}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} e^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \rightarrow N \quad \text{při} \quad T \rightarrow 0$$

# Hustota částic v prostoru: srovnání obou limit

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou  
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$\begin{aligned}f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= e^{\beta(\mu - W - U(\mathbf{r}))} \\n_{\text{THERM}}(\mathbf{r}) &= \int d^3 \mathbf{p} \cdot f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\&\propto e^{-\beta U(\mathbf{r})} \\&= e^{-\frac{1}{2} \beta m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}\end{aligned}$$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$\begin{aligned}n_{\text{BEC}}(\mathbf{r}) &= |\phi_{0x}(x)|^2 |\phi_{0y}(y)|^2 |\phi_{0z}(z)|^2 \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \\&= \frac{1}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} e^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}\end{aligned}$$

# BE kondensát při $T = 0$ a makroskopická vlnová funkce

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$\begin{aligned}n_{\text{BEC}}(\mathbf{r}) &= N \cdot |\phi_{0x}(x)|^2 |\phi_{0y}(y)|^2 |\phi_{0z}(z)|^2 \\ &= \frac{N}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} e^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}} \\ &= N \int d^3 \bar{\mathbf{r}} \varphi^*(\bar{\mathbf{r}}) \delta(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}) \varphi(\bar{\mathbf{r}}) \equiv \int d^3 \bar{\mathbf{r}} \Psi^*(\bar{\mathbf{r}}) \delta(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}) \Psi(\bar{\mathbf{r}}) \\ &\boxed{\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \varphi(\mathbf{r}) e^{i\Phi} \equiv \sqrt{N} \sqrt{n(\mathbf{r})} e^{i\Phi}}\end{aligned}$$

Jediná vlnová funkce normovaná ne na 1, ale na  $N$ , popisuje chování kondensátu ... **extrémní koherence** ("zpívají unisono")

ALE → → →

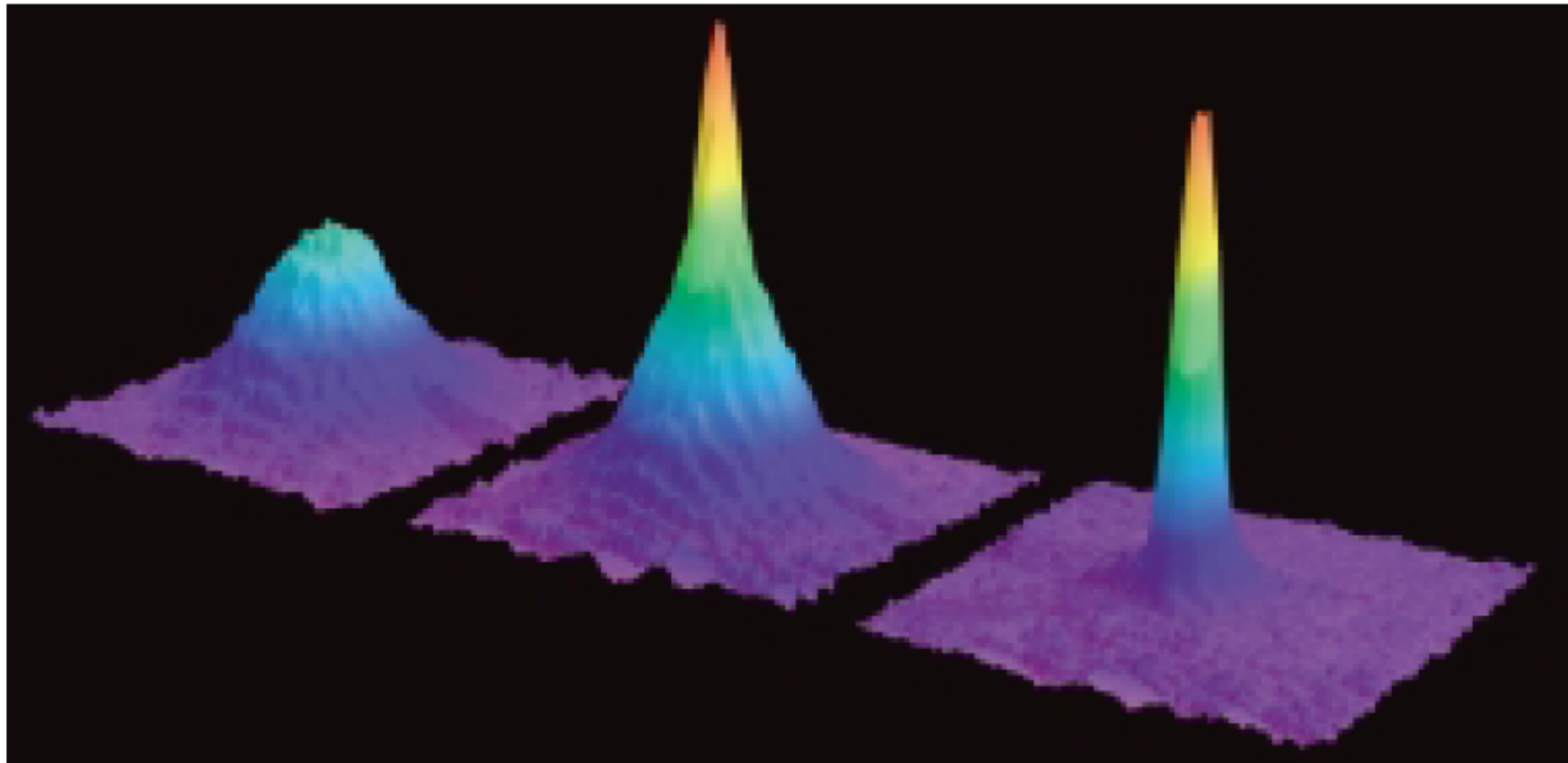


## F.Laloë: Do we really understand Quantum mechanics, Am.J.Phys.**69**, 655 (2001)

In passing, and as a side remark, it is amusing to notice that the recent observation of the phenomenon of Bose–Einstein condensation in dilute gases (Ref. 25) can be seen, in a sense, as a sort of realization of the initial hope of Schrödinger: This condensation provides a case where the many-particle matter wave does propagate in ordinary space. Before condensation takes place, we have the usual situation: The atoms belong to a degenerate quantum gas, which has to be described by wave functions defined in a huge configuration space. But, when they are completely condensed, they are restricted to a much simpler many-particle state that can be described by the same wave function, exactly as a single particle. In other words, the matter wave becomes similar to a classical field with two components (the real part and the imaginary part of the wave function), resembling an ordinary sound wave for instance. This illustrates why, somewhat paradoxically, the “exciting new states of matter” provided by Bose–Einstein condensates are not an example of an extreme quantum situation; they are actually more classical than the gases from which they originate (in terms of quantum description, interparticle correlations, etc.). Conceptually, of course, this remains a very special case and does not solve the general problem associated with a naive view of the Schrödinger waves as real waves.

Studium BEC metodou TOF  
( time of flight -- doby letu)

## BEC pozorovaná metodou TOF



*Figure 7.* Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about  $7 \times 10^5$ , the temperature at the transition point is  $2 \mu\text{K}$ .

## BEC pozorovaná metodou TOF



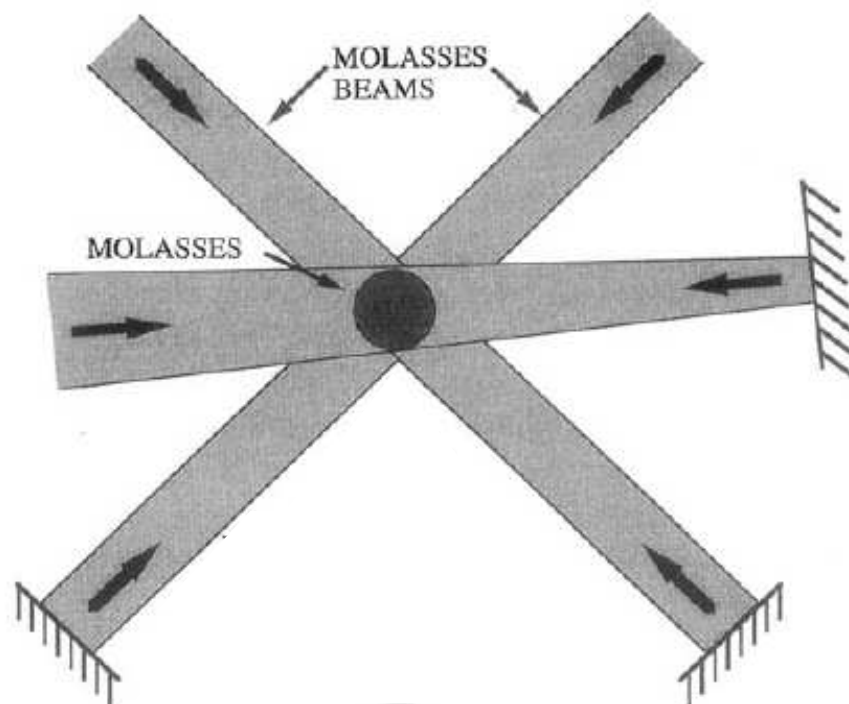
*Figure 7.* Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about  $7 \times 10^5$ , the temperature at the transition point is  $2 \mu\text{K}$ .

# 3D laserové chlazení

20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund



# TOF experiment

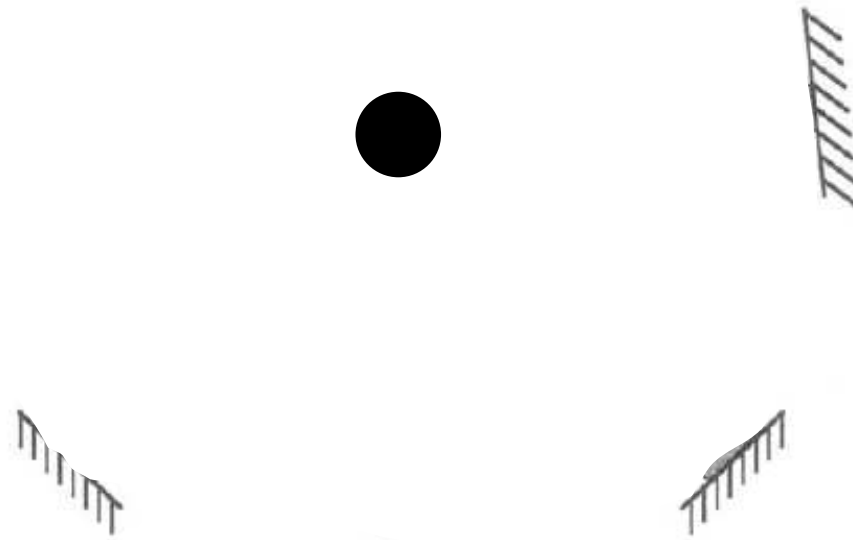
20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund

měření tepelného  
rozdělení: vypneme  
lasery. Atomy klesají v  
tíhovém poli

Zároveň se rozletují  
balistickým způsobem



# TOF experiment

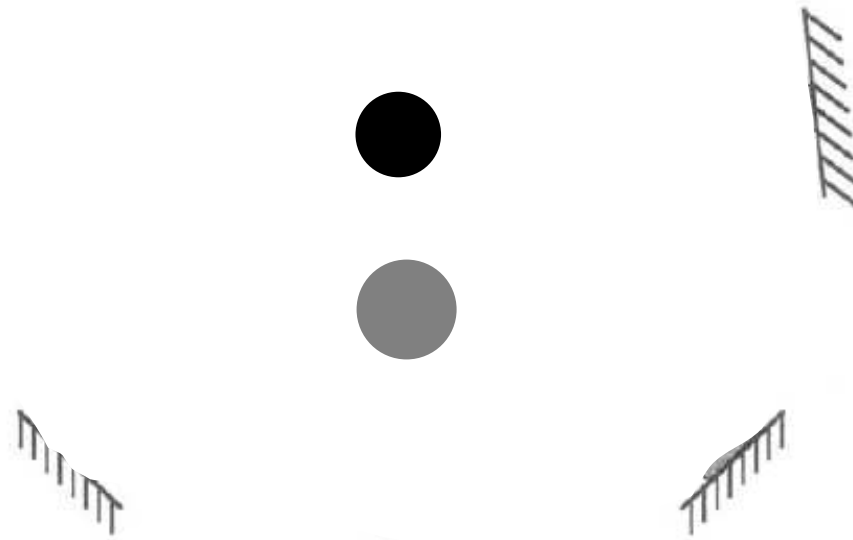
20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund

měření tepelného  
rozdělení: vypneme  
lasery. Atomy klesají v  
tíhovém poli

Zároveň se rozletují  
balistickým způsobem



# TOF experiment

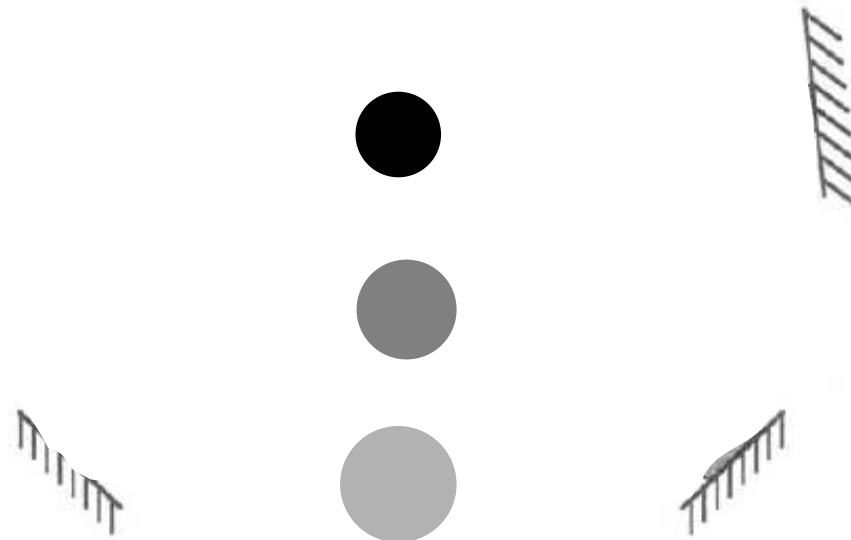
20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund

měření tepelného  
rozdělení: vypneme  
lasery. Atomy klesají v  
tíhovém poli

Zároveň se rozletují  
balistickým způsobem





# měření distribuce

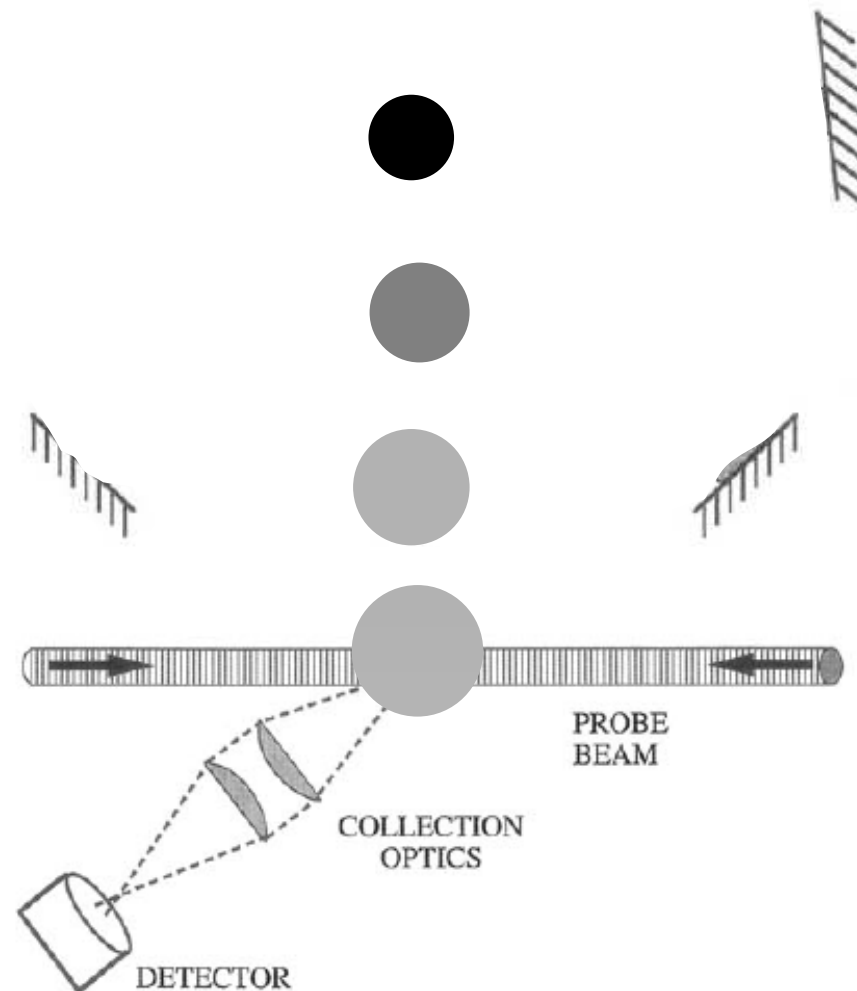
20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund

měření tepelného  
rozdělení: vypneme  
lasery. Atomy klesají v  
tíhovém poli

Zároveň se rozletují  
balistickým způsobem



sondovací laserový  
svazek vyvolá  
fluorescenci atomů

z tvaru a velikosti  
obláčky je určeno  
rychlostní rozdělení

# Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$\begin{aligned}f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= e^{\beta(\mu - W - U(\mathbf{r}))} \\f_{\text{THERM}}(\mathbf{p}) &= \int d^3 \mathbf{r} \cdot f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\&\propto e^{-\beta W} \\&= e^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}\end{aligned}$$

# Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$\begin{aligned} f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= e^{\beta(\mu - W - U(\mathbf{r}))} \\ f_{\text{THERM}}(\mathbf{p}) &= \int d^3 \mathbf{r} \cdot f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ &\propto e^{-\beta W} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \beta m^{-1} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} \end{aligned}$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové reprezentaci – také "Gaussovka"

$$\begin{aligned} f_{\text{BEC}}(\mathbf{p}) &= \left| \phi_{0x}(p_x) \right|^2 \left| \phi_{0y}(p_y) \right|^2 \left| \phi_{0z}(p_z) \right|^2 \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \\ &\propto e^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad \boxed{b_{0w} = \frac{h}{a_{0w}}} \end{aligned}$$

# Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = e^{\beta(\mu - W - U(\mathbf{r}))}$$

$$f_{\text{THERM}}(\mathbf{p}) = \int d^3 \mathbf{r} \cdot f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$$\propto e^{-\beta W}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

Vlnová funkce kondensátu v impulsové reprezentaci – také "Gaussovka"

$$f_{\text{BEC}}(\mathbf{p}) = \left| \phi_{0x}(p_x) \right|^2 \left| \phi_{0y}(p_y) \right|^2 \left| \phi_{0z}(p_z) \right|^2 \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$

anisotropní

$$\propto e^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1},$$

$$b_{0w} = \frac{h}{a_{0w}}$$

# Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

Dvojí přímo měřitelné charakteristické délky

$$f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = e^{\beta(\mu - W - U(\mathbf{r}))}$$

$$f_{\text{THERM}}(\mathbf{p}) = \int d^3 \mathbf{r} \cdot f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$$\propto e^{-\beta W}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \beta m^{-1} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

$$b_0 = (b_{0x} b_{0y} b_{0z})^{\frac{1}{3}} = \frac{h}{a_0},$$

$$B_T = 1 / \sqrt{\beta m}$$

$$= b_0 \sqrt{k_B T / h^2} \quad b_0$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové reprezentaci – také "Gaussovka"

$$f_{\text{BEC}}(\mathbf{p}) = \left| \phi_{0x}(p_x) \right|^2 \left| \phi_{0y}(p_y) \right|^2 \left| \phi_{0z}(p_z) \right|^2 \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$

$$\propto e^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad b_{0w} = \frac{h}{a_{0w}}$$

anisotropní

# Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

Dvojí přímo měřitelné charakteristické délky

$$f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = e^{\beta(\mu - W - U(\mathbf{r}))}$$

$$f_{\text{THERM}}(\mathbf{p}) = \int d^3 \mathbf{r} \cdot f_B(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

$$\propto e^{-\beta W}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \beta m^{-1} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

$$b_0 = (b_{0x} b_{0y} b_{0z})^{\frac{1}{3}} = \frac{h}{a_0},$$

$$B_T = 1 / \sqrt{\beta m}$$

$$= b_0 \sqrt{k_B T / h^2} \quad \text{? } b_0$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové reprezentaci – také "Gaussovka"

$$f_{\text{BEC}}(\mathbf{p}) = \left| \phi_{0x}(p_x) \right|^2 \left| \phi_{0y}(p_y) \right|^2 \left| \phi_{0z}(p_z) \right|^2 \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$

$$\propto e^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad \boxed{b_{0w} = \frac{h}{a_{0w}}}$$

anisotropní

# BEC pozorovaná v rozdělení rychlostí metodou TOF

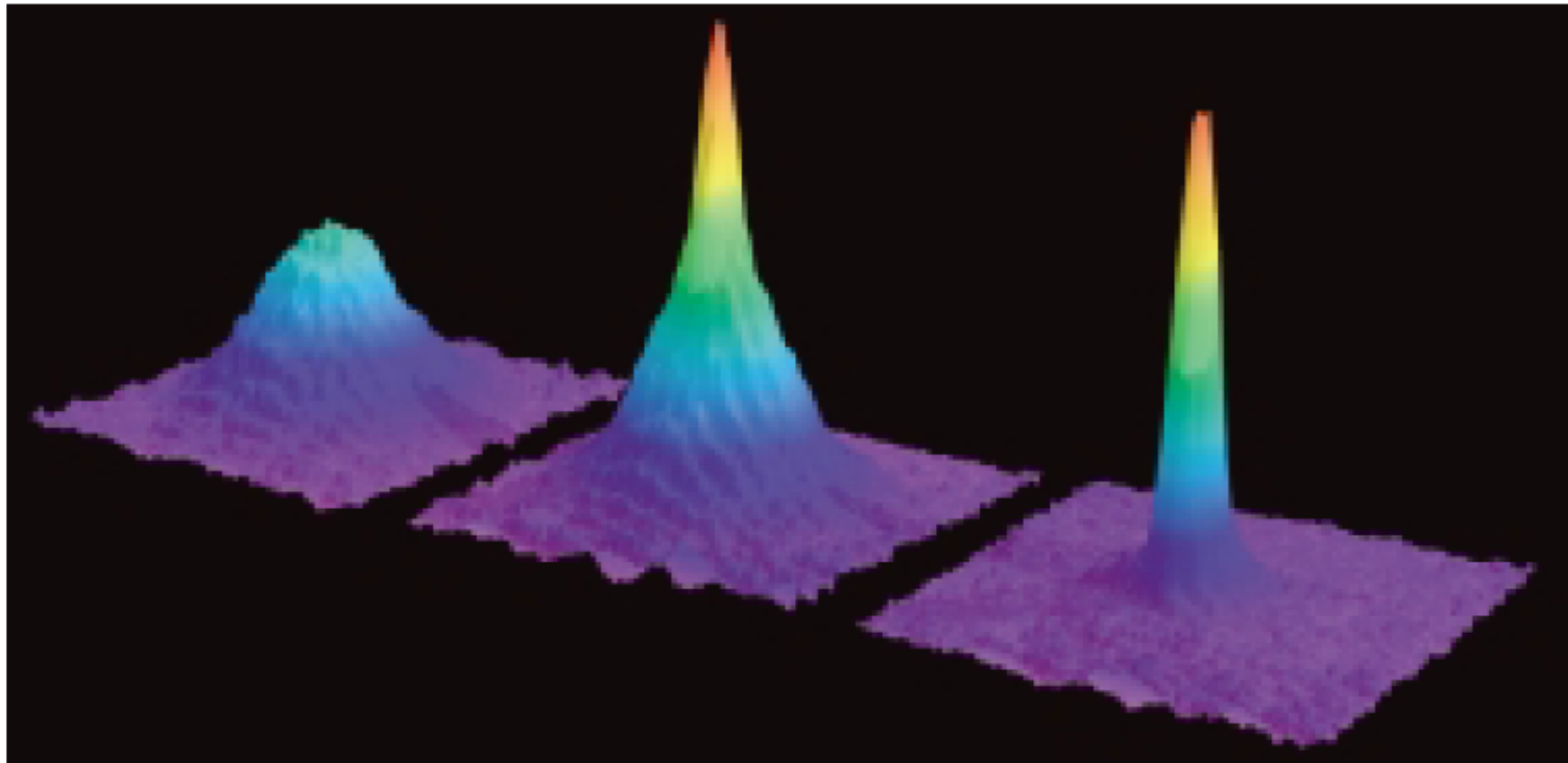


Figure 7. Comparison of the BEC vs. two species observed above the evaporative transition

## Kvalitativní vlastnosti:

- ♣ Gaussovy profily
- ♣ široké vs. úzké
- ♣ isotropní vs. anisotropní

observed by absorption imaging. Shown is absorption image of the condensate is characterized by its slow expansion. The left image shows an expanding cloud cooled to just above the transition point where the condensate appeared; right: after further expansion. The total number of atoms at the phase transition point is  $2 \mu\text{K}$ .

# Kvantitativní vyhodnocení: vliv atomových interakcí

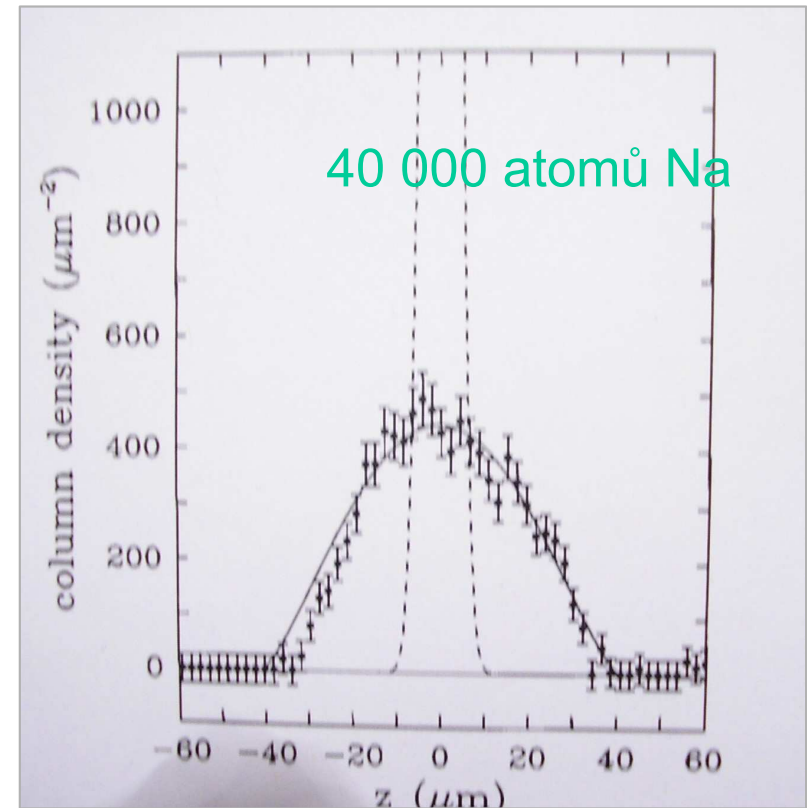
Oblak by se rozplýval jako kvantové klubko i bez meziatomových interakcí

Výsledek by pak odpovídal balistickému rozletování atomů jako klasických kuliček

Interakce jsou sice slabé, ale protože past drží atomy pohromadě, jejich účinek je značný,

jednak ještě za působení potenciálu pasti,

jednak v počátečních stadiích rozletu, kdy obláček je ještě hustý



## MAKROSKOPICKÁ VLNOVÁ FUNKCE KONDENSÁTU

bez interakcí by kondensát byl v základním stavu oscilátoru (čárkovaně - - - -)

Experiment ukazuje významné "nafouknutí" vnitřním tlakem; to je přesně reprodukováno řešením tzv. Gross-Pitajevského rovnice



# Příklad výpočtu balistického rozletu

Repulsivní interakce působí zpočátku silněji a atomy "předbíhají čas" proti čistě balistickému rozletu

Později je rozlet již zase lineární.

Výpočet byl ve shodě s experimentem pro vhodnou sílu interakce, která odpovídá nezávislým měřením atomových srážek.

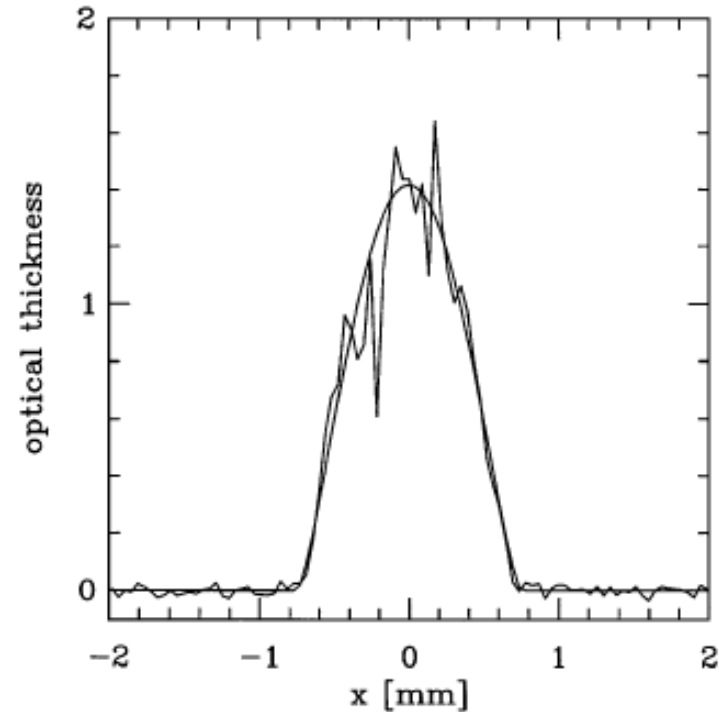
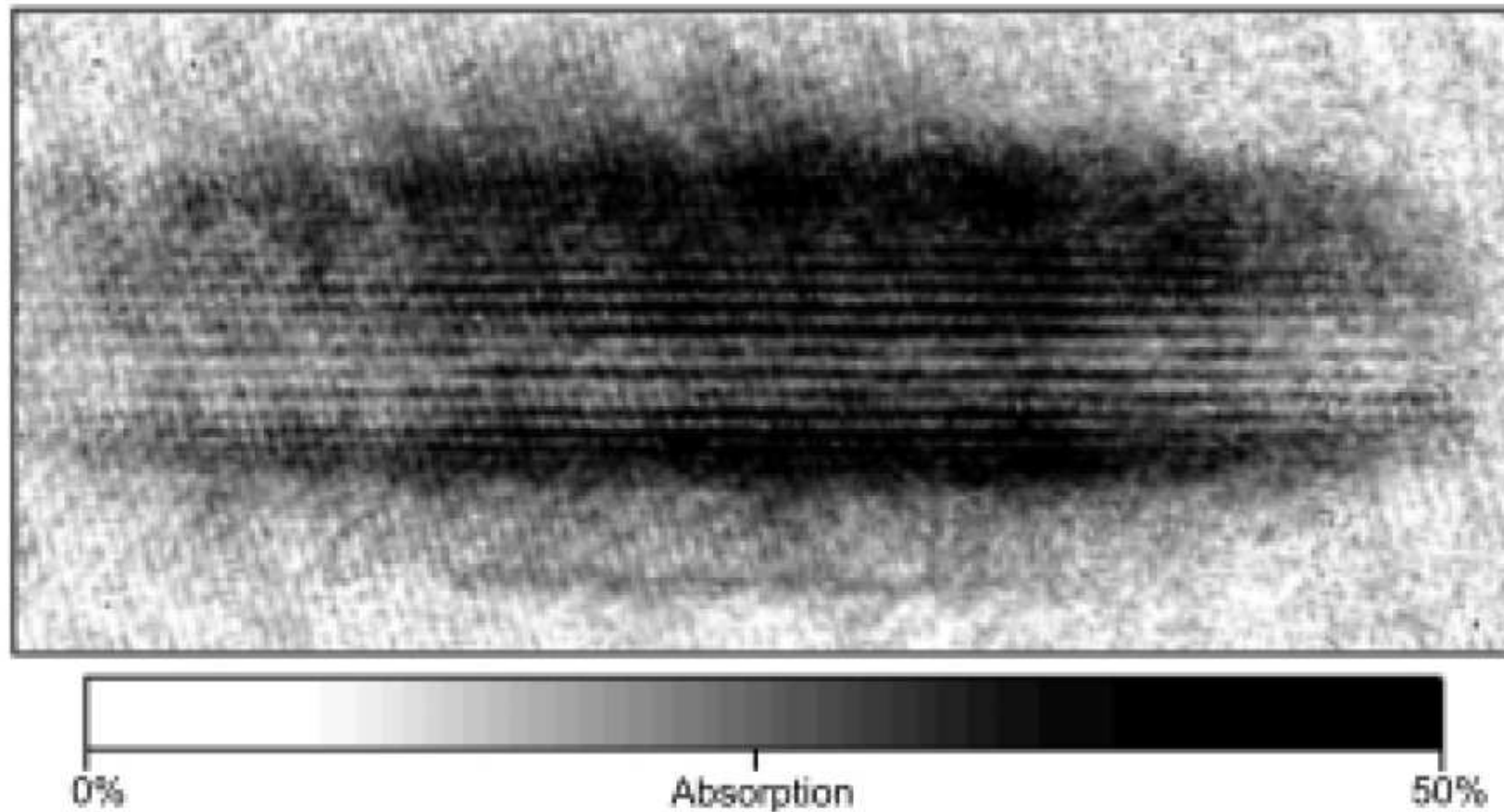


FIG. 1. Spatial density of an expanding condensate integrated along the  $y$  axis, cut along the  $x$  axis (that is, at  $z = 0$ ). Experimental data obtained at MIT (expansion time of 40 ms) and fit from theory.

Castin&Dum,  
PRL 77, 5315 (1996)

První přímý důkaz kvantové koherence  
atomárního BE kondensátu

# Interference atomů



Dva koherentní kondensáty se pronikají a interferují.  
Vertikální vzdálenost proužků je  $15\ \mu\text{m}$   
Vodorovný rozměr obláčku  $1,5\text{mm}$

# Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

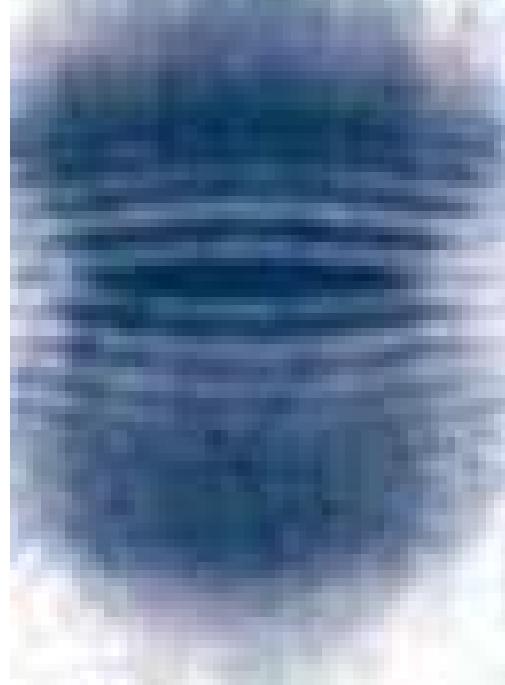
Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

*experiment ve skupině Ketterle a spol.*



vlny na vodě



# Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

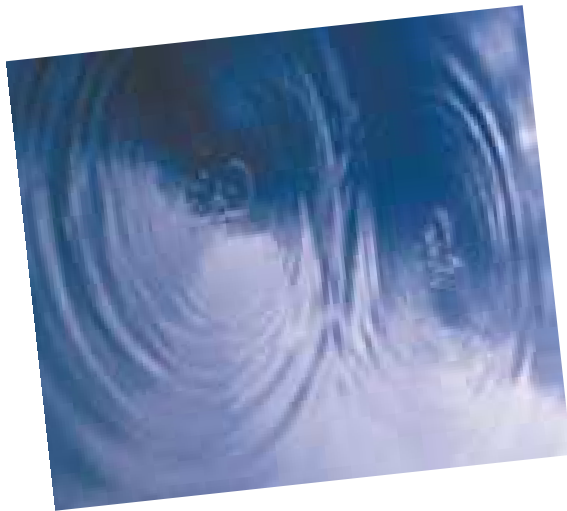
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

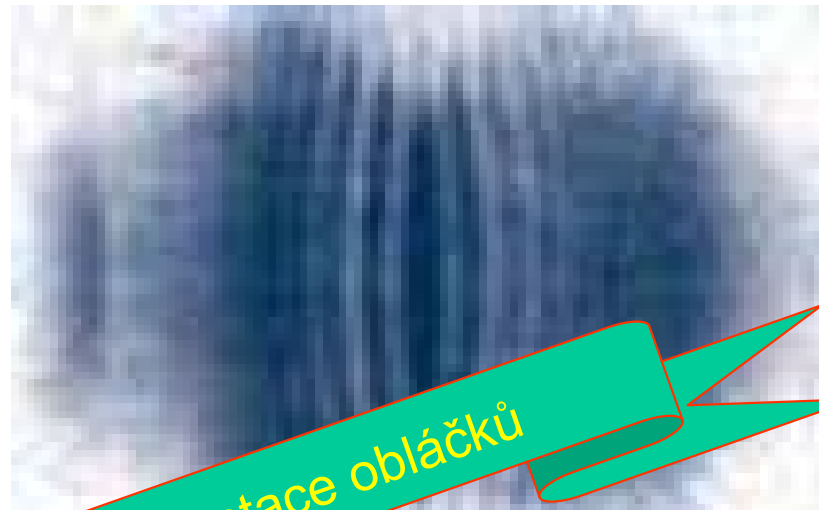
Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

*experiment ve skupině Ketterle a spol.*



vlny na vodě



skutečná orientace obláčku

# Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

*experiment ve skupině Ketterle a spol.*



# Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

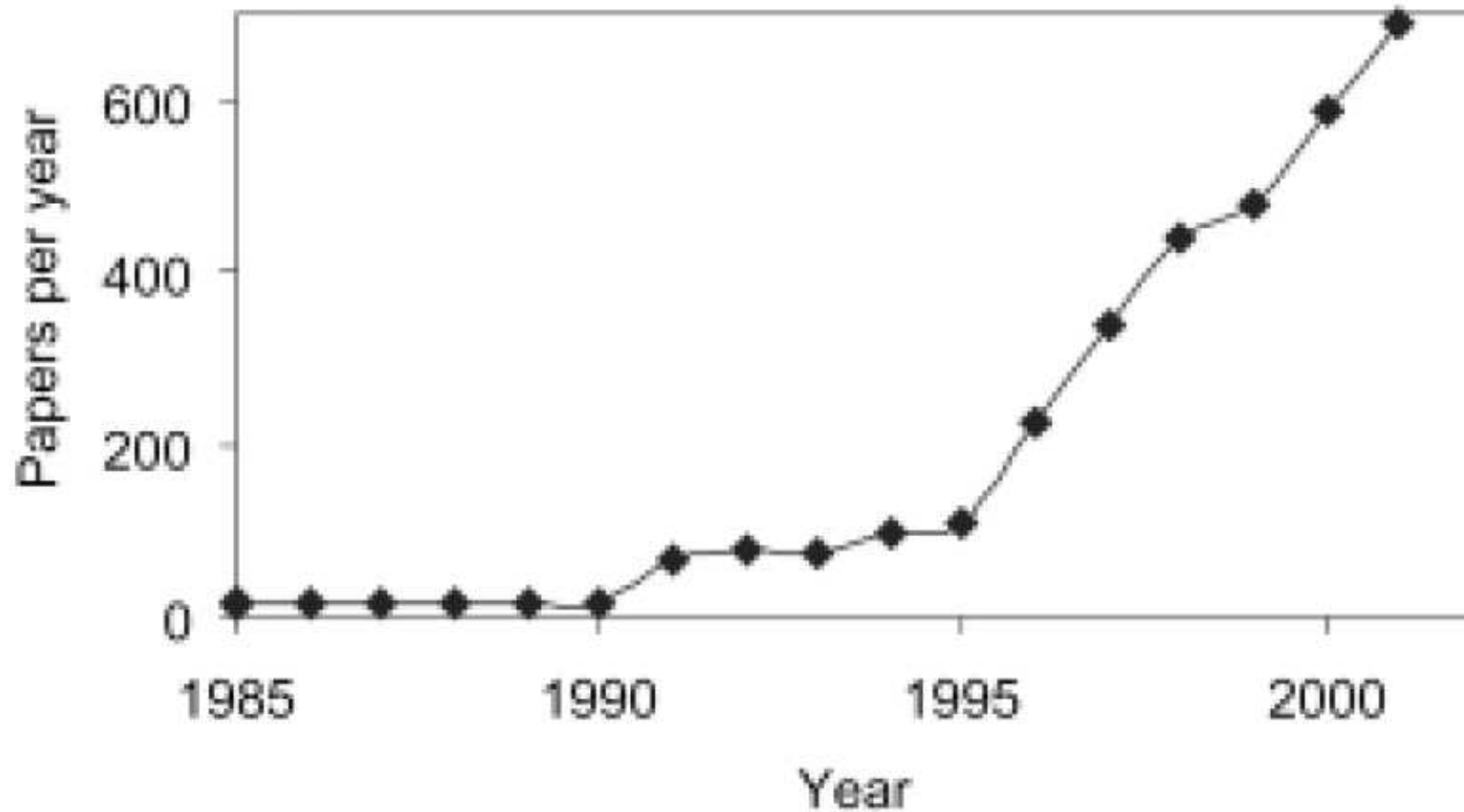
Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

*experiment ve skupině Ketterle a spol.*

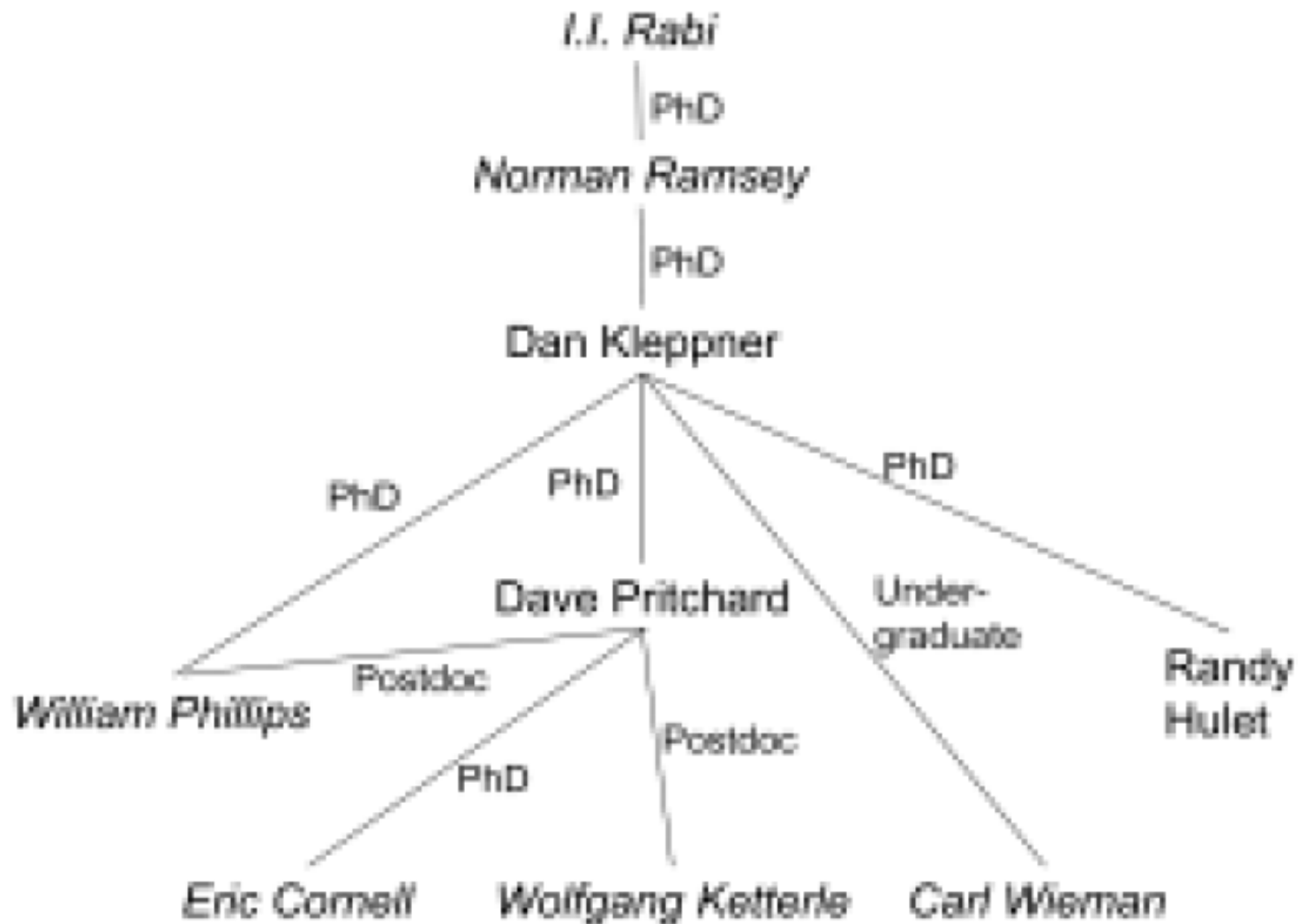
## Boom BEC, teď ještě mnohem živější



*Figure 1.* Annual number of published papers, which have the words “Bose” and “Einstein” in their title, abstracts or keywords. The data were obtained by searching the ISI (Institute for Scientific Information) database.



# Strom nobelistů (kursivou) v atomové fyzice



The end

