Příklady na čtvrté cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2007

Příklad 1.: Máme populaci diploidní cizosprašné rostliny, ve které sledujeme gen se dvěma alelami a,A. Z populace náhodně vybereme jedince, sprášíme ho homozygotním jedincem typu AA a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jejich potomky. Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce s množinou stavů J = {0,1,2}, kde stav 0 = aa, stav 1 = Aa = aA, stav 2 = AA.
a) Najděte matici přechodu **P**.
b) Ukažte, že řetězec je absorpční.
c) Najděte fundamentální matici **M** a interpretujte její prvky.
d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů **B** a interpretujte její prvky.
e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

ad a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ad b) Řetězec má jediný trvalý stav AA, který je absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad c) Nejprve je nutné najít kanonický tvar matice přechodu.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Vidíme, že $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Dále $M = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aa (tj. od recesivního homozygota) v něm v průměru setrvá 1 krok než bude absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aa setrvá ve stavu aA v průměru 2 kroky než bude absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aA v něm v průměru setrvá 2 kroky než bude absorbován.

ad d) $B = MR = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Interpretace: Ať řetězec vychází ze stavu aa nebo aA, tak s pravděpodobností 1 bude absorbován ve stavu AA.

ad e) $t = Me = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aa bude v průměru za 3 kroky absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aA bude v průměru za 2 kroky absorbován.

Příklad 2.: Máme populaci diploidní samosprašné rostliny, ve které sledujeme gen se dvěma alelami a,A. Z populace náhodně vybereme jedince, samosprášíme ho a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jeho potomky. Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce s množinou stavů J = {0,1,2}, kde stav 0 = aa, stav 1 = Aa = aA, stav 2 = AA.
a) Najděte matici přechodu **P**.
b) Ukažte, že řetězec je absorpční.
c) Najděte fundamentální matici **M** a interpretujte její prvky.
d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů **B** a interpretujte její prvky.
e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

ad a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ad b) Řetězec má dva trvalé stavy aa a AA, oba jsou absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad c) Nejprve je nutné najít kanonický tvar matice přechodu.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$. Vidíme, že $R = (1/4 \quad 1/4)$, $Q = (1/2)$. Dále $M = (I - Q)^{-1} = (2)$.

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA v něm v průměru setrvá 2 kroky než bude absorbován.

ad d) $B = MR = (1/2 \quad 1/2)$. Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA bude s pravděpodobností 1/2 absorbován ve stavu aa a s pravděpodobností 1/2 bude absorbován ve stavu AA.

ad e) $t = Me = (2)$. Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA bude v průměru za 2 kroky absorbován.

Příklad 3.: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do třicetidenních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4, 5}, kde stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti, stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti, stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti, stav 4 splacené pohledávky a stav 5 nedobytné pohledávky. Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou: p_{12} = 0,77, p_{14} = 0,23, p_{23} = 0,34, p_{24} = 0,66, p_{34} = 0,73 a p_{35} = 0,27.

a) Sestavte matici přechodu.

b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.

c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

f) Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých třicetidenních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Řešení:

ad a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 & 0{,}23 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 & 0{,}66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}73 & 0{,}27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ad b) Řetězec má tři přechodné stavy, a to 1, 2, 3 a dva trvalé stavy, a to 4 a 5. Oba jsou absorpční, tedy řetězec je absorpční.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}23 & 0 & 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0{,}66 & 0 & 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0{,}73 & 0{,}27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0 \\ 0{,}66 & 0 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad c) $M = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 0 & 1 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 v něm v průměru stráví 1 x 30 = 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,77 x 30 = 23,1 dne ve stavu 2 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,26 x 30 = 7,8 dne ve stavu 3 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad d) $B = MR = \begin{pmatrix} 0{,}9293 & 0{,}0707 \\ 0{,}9082 & 0{,}0918 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix}.$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 bude s pravděpodobností 0,9293 splacena a s pravděpodobností 0,0707 se stane nedobytnou.

ad e) $t = Me = \begin{pmatrix} 2{,}03 \\ 1{,}34 \\ 1 \end{pmatrix}$

Interpretace:
2,03 x 30 = 60,9 – pohledávce zařazené do stavu 1 bude v průměru trvat 60,9 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.
1,34 x 30 = 40,2 – pohledávce zařazené do stavu 2 bude v průměru trvat 40,2 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.
1 x 30 = 30 – pohledávce zařazené do stavu 3 bude v průměru trvat 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad f) Průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek:

$$\begin{pmatrix} 4030000 & 9097000 & 3377000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9293 & 0{,}0707 \\ 0{,}9082 & 0{,}0918 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14472184 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Průměrná hodnota splacených pohledávek je tedy 14 472 184 Kč a nedobytných pohledávek je 2 031 816 Kč.