

## Příklady na první cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2007

**Příklad 1.:** Je dán homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  s množinou stavů  $J = \{0,1,2\}$ ,

vektorem počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  a maticí přechodu  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

Určete vektor absolutních pravděpodobností po jednom až po čtyřech krocích.

**Řešení:**

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

**Návod na řešení v MATLABu:**

`P=[0.5 0.5 0;0 0 1;0.5 0.5 0];`

`p0=[1/3 1/3 1/3];`

`p1=p0*P`

`p2= p0*P^2`

`p3= p0*P^3`

`p4= p0*P^4`

Nebo:

`p2=p1*P`

`p3=p2*P`

`p4=p3*P`

**Příklad 2.:** (Model mužských zaměstnání) Předpokládáme rozdělení mužských zaměstnání do tří tříd: vědeckí pracovníci, kvalifikovaní pracovníci, nekvalifikovaní pracovníci. Je známo, že 80% synů vědeckých pracovníků se stane vědeckými pracovníky, 10% kvalifikovanými a 10% nekvalifikovanými pracovníky. Ze synů kvalifikovaných pracovníků 60% bude kvalifikovanými pracovníky, 20% vědeckými a 20% nekvalifikovanými pracovníky. Konečně v případě nekvalifikovaných pracovníků 50% synů bude nekvalifikovanými pracovníky, 25% kvalifikovanými a 25% vědeckými pracovníky. Předpokládejme, že každý muž má syna. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

**Řešení:** Zavedeme homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  s množinou stavů  $J = \{0,1,2\}$ , kde stav 0 znamená „vědecký pracovník“, stav 1 – „kvalifikovaný pracovník“, stav 2 – „nekvalifikovaný pracovník“. Náhodná veličina  $X_n$  nabývá hodnoty  $j$ , když muž v  $n$ -té generaci má zaměstnání typu  $j$ . Nejprve sestavíme matici přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}. \text{ Zajímá nás pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka}$$

se stane vědeckým pracovníkem. Hledáme tedy prvek  $p_{20}(2)$  matice  $P^2$ .

$$p_{20}(2) = p_{20}p_{00} + p_{21}p_{10} + p_{22}p_{020} = 0,25 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,375.$$

**Návod na řešení v MATLABu:**

`P=[0.8 0.1 0.1;0.2 0.6 0.2; 0.25 0.25 0.5];`

`P^2`

Dostaneme

```
0.6850  0.1650  0.1500
0.3300  0.4300  0.2400
0.3750  0.3000  0.3250
```

Hledaná pravděpodobnost je tedy 0,375.

**Příklad 3.:** V příkladu 2 nyní předpokládejme, že muž má syna jen s pravděpodobností 0,8. Zaveďte nyní homogenní markovský řetězec se čtyřmi stavy – první tři jsou stejné jako v předešlé úloze a čtvrtý odpovídá případu, kdy muž nemá syna a proces končí. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

**Řešení:** Matice přechodu bude nyní řádu 4.

$$P = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,08 & 0,08 & 0,2 \\ 0,16 & 0,48 & 0,16 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Opět nás zajímá prvek } p_{20}(2) = 0,2 \cdot 0,64 + 0,2 \cdot 0,16 + 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0 = 0,24$$

**Příklad 4.:** (Klasifikace roků podle úrody jablek) V severní Nové Anglii můžeme klasifikovat roky podle úrody jablek jako úrodné, průměrné a neúrodné. Pravděpodobnost, že po úrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,4; 0,4; 0,2. Pravděpodobnost, že po průměrném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,6; 0,2. Pravděpodobnost, že po neúrodném roce bude následovat rok úrodný,

průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,4; 0,4. Rok 1965 byl úrodný. Vypočtete vektor absolutních pravděpodobností pro rok 1967.

**Řešení:** Sestavíme matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}. \text{ Vektor počátečních pravděpodobností je } \mathbf{p}(0) = (1, 0, 0). \text{ Hledáme}$$

$$\text{vektor } \mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2 = (0,28, 0,48, 0,24).$$

**Příklad 5.:** V příkladu 4 předpokládejme, že pravděpodobnost, že rok bude úrodný, je  $\frac{1}{4}$ , průměrný  $\frac{1}{2}$  a neúrodný  $\frac{1}{4}$ . Jaký je vektor absolutních pravděpodobností pro příští rok?

**Řešení:** Vektor počátečních pravděpodobností nyní bude  $\mathbf{p}(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ . Vypočteme vektor absolutních pravděpodobností  $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ .

**Příklad 6.:** Homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in N_0\}$  má množinu stavů  $J = \{0,1,2,3\}$  a

$$\text{matici přechodu } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,04 & 0,32 & 0,64 & 0 \\ 0,008 & 0,096 & 0,384 & 0,512 \end{pmatrix}.$$

Je-li vektor počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (0,0,0,1)$ , najděte vektor absolutních pravděpodobností po třech krocích.

**Řešení:**

Vektor absolutních pravděpodobností po třech krocích:

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^3 = (0,1162 \ 0,3658 \ 0,3838 \ 0,1342)$$