Statistické metody a zpracování dat

IV. Odhady parametrů

Petr Dobrovolný

K čemu to je dobré?

Obvyklým případem při zpracování hromadných jevů je, že máme poměrně malý počet pozorování nějaké veličiny a chceme učinit závěry o tom, co bychom obdrželi, kdybychom měli pozorování mnohokrát více.

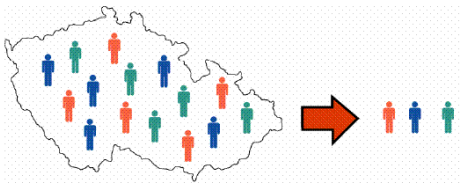
Z **výběru** spočítáme pouze **odhady** skutečných hodnot parametrů rozdělení

Cílem je ukázat,

1) Jaké vlastnosti má mít (náhodný) výběr
2) Jaké vlastnosti (rozdělení) mají výběrové statistiky
3) Jak lze odhadnout parametry základního souboru ze souboru výběrového

Výběrové metody zkoumání

- **Základní soubor** (populace) a jeho parametry
- **Výběrový soubor** a jeho statistiky



Jaké jsou **důvody**, proč ve statistice pracujeme s výběrovými soubory?

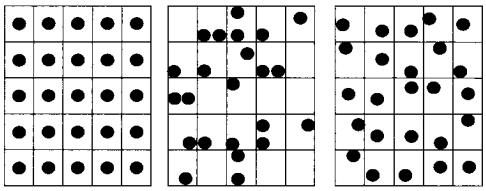
(rozsáhlost, nekonečnost, nákladnost, efektivita, rychlost, …)

Základní dělení způsobů výběru

Je-li pravděpodobnost každého členu základního souboru, že bude zařazen do výběru, stejná, potom hovoříme o **náhodném** výběru

- prostý náhodný výběr
- výběr s opakováním resp. bez opakování
- výběr oblastní (typický, stratifikovaný)
- výběr systematický (mechanický)
- výběr vícestupňový
- výběr záměrný (subjektivní – ne náhodný)

Techniky losování a generování náhodných čísel k zajištění požadavku náhodnosti výběru



Příklad systematického, náhodného a stratifikovaného náhodného výběru

Výběrové metody souvisí teorií odhadu …

Odhadování jako základ statistického usuzování

Používáme statistickou indukci - usuzujeme z části (výběr) na celek (základní soubor).

Odhad neznámých parametrů základního souboru provádíme:

1) na základě statistických charakteristik výběru.
2) na základě jistých předpokladů o jejich rozdělení

Vztahy mezi základním souborem a výběry

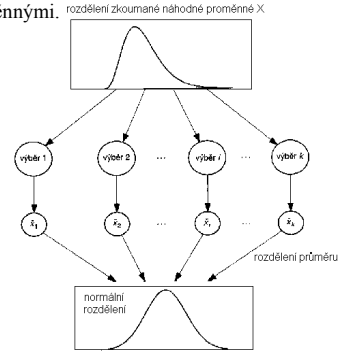
Základní pojmy a symboly

	Základní soubor	Výběrový soubor
• rozsah	N	n
• i-tý prvek	a_i	x_i
• aritmetický průměr	μ	$\bar{x}$
• směrodatná odchylka (rozptyl)	σ (σ^2)	s (s^2)

Odhady parametrů základního souboru: $\hat{\mu}$ $\hat{\sigma}$

Výběrové rozdělení

Z jistého základního souboru můžeme učinit několik náhodných výběrů – jejich statistické charakteristiky budou odlišné – jsou náhodnými proměnnými.



Průměr výběrových průměrů

$$\mu_{\bar{x}} = \left(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ... + \bar{x}_{r-1} + \bar{x}_r\right)/r = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_i$$

Směrodatná odchylka výběrových průměrů

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}}\right)^2}{r}}$$

kde *r* je počet výběrů.

Výběrový průměr a výběrové rozdělení průměrů

V případě velkého rozsahu základního souboru s normálním rozdělením a s parametry μ, σ platí, že **rozdělení výběrových průměrů** je také normální s parametry:

průměr $\mu_{\bar{x}} = \mu$

směrodatná odchylka $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$

Směrodatná odchylka rozdělení výběrových průměrů je menší než směrodatná odchylka základního souboru a to tím menší, čím větší je rozsah výběru.

(poznámka)

Rozptyl výběrových průměrů

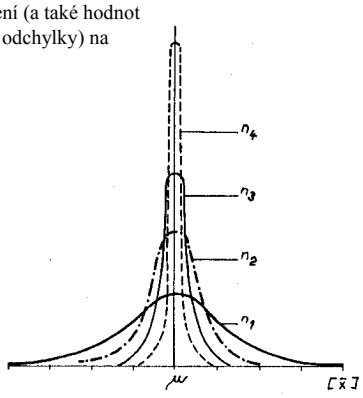
$$\sigma^2_{\bar{x}} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + ... + \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

a tedy směrodatná odchylka výběrového průměru:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$$

Závislost tvaru rozdělení (a také hodnot rozptylu a směrodatné odchylky) na rozsahu výběru

$n_1 < n_2 < n_3 < n_4$

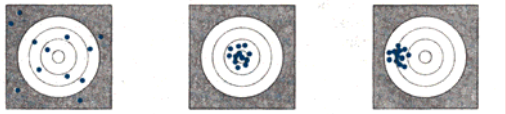


Vlastnosti parametrů výběrového rozdělení průměrů

- Bez ohledu na tvar původního rozdělení se rozdělení výběrového průměru blíží k normálnímu rozdělení pro rozsah výběru jdoucí do nekonečna.
- Rozdělení velkého počtu takových výběrových průměrů bude tedy užší než původní rozdělení a bude mít stejný střed.
- Je rozumné očekávat, že čím větší bude rozsah výběru, tím více se bude průměr výsledného rozdělení blížit středu původního rozdělení a výsledné rozdělení bude užší.
- Směrodatná odchylka výběrového rozdělení průměrů se nazývá **směrodatná chyba odhadu průměru** (nebo též střední chyba průměru).

Vlastnosti odhadů ve statistice

- Odhad musí být **konzistentní** – rozdíl mezi odhadnutou a skutečnou hodnotou se zmenšuje s růstem n. (rozsah výběru).
- Odhad má být **nezkreslený** (nevychýlený) - všechny odchylky odhadu od skutečné hodnoty se kompenzují (naopak – odhad vychýlený).
- Odhad má být **vydatný** – vydatnou je charakteristika, jejíž rozptyl je ze všech možných výběrů nejmenší
- Odhad neznámých parametrů základního souboru provádíme s jistou **přesností** a **spolehlivostí**.



Přesnost a spolehlivost odhadu

- **Přesnost odhadu** – je dána násobkem střední výběrové chyby (je to směrodatná odchylka příslušné charakteristiky ze všech teoreticky možných výběrů).
- **Spolehlivost odhadu** – je určena pravděpodobností, se kterou je možné určitý odhad považovat za správný.
- Pro určení přesnosti a spolehlivosti je nutná **znalost rozdělení** výběrových charakteristik. Pro n > 30 se výběrové rozdělení obvykle považuje za normální. Jiná teoretická rozdělení se používají u malých výběrů.
- Neznámé parametry základního souboru odhadujeme dvěma způsoby
  - **bodový odhad**
  - **intervalový odhad**

Bodový odhad parametrů základního souboru

Bodový odhad aritmetického průměru základního souboru

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Bodový odhad směrodatné odchylky základního souboru

Určuje se z odchylek jednotlivých prvků od výběrového průměru. Pro n-1 **stupňů volnosti** platí:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

(poznámka)

Stupně volnosti

Máme odhad aritmetického průměru a platí následující výraz:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \bar{x}$$

K určení hodnoty $\hat{\sigma}$ lze tedy využít pouze *(n-1)* nezávislých členů tzv. **stupňů volnosti**

Odhadem průměru „ztrácíme“ jeden nezávislý „pokus“

Příklad:

- průměr vypočtený ze tří měření je 5
- dvě náhodná (nezávislá) měření budou 4 a 5
- zbývající třetí měření musí být 6, aby byl průměr roven 5, tedy není nezávislé

Bodový odhad parametrů základního souboru

Je-li výběrová směrodatná odchylka s rovna:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

potom z toho plyne, že $\hat{\sigma} > s$

Další úpravou lze získat:

$$\frac{\hat{\sigma}}{s} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n}}} \quad \text{a dále} \quad \hat{\sigma} = s \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Bodový odhad parametrů základního souboru

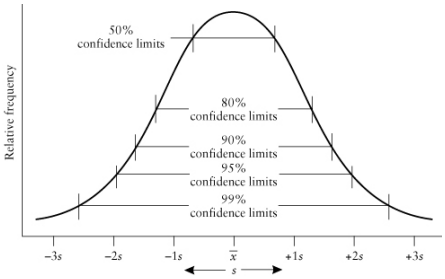
Pro odhad směrodatné odchylky výběrových průměrů:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{a dále} \qquad \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

Odhady parametrů základního souboru ($\hat{\mu}, \hat{\sigma}$) se výběr od výběru mění.

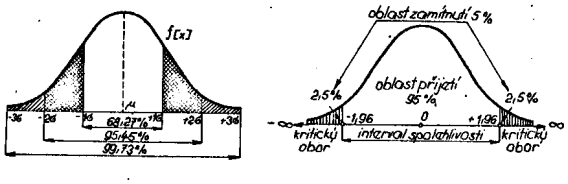
Musíme proto stanovit jejich odchylky od skutečných parametrů (μ, σ) a také určit jejich přesnost odhadu pomocí tzv. **intervalů spolehlivosti.**

Intervaly spolehlivosti (viz. vlastnosti normálního rozdělení)



Z vlastností normálního rozdělení lze pomocí hodnoty aritmetického průměru a násobků směrodatné odchylky určit meze, které vyjadřují pravděpodobnosti, s nimiž dané hodnoty leží v určitém intervalu

Intervaly spolehlivosti



Vnitřní interval vymezený jistým násobkem se označuje jako **interval spolehlivosti**. Odchylky od průměru, které se nacházejí uvnitř tohoto intervalu označujeme jako **odchylky přípustné**, nevýznamné. Analogicky jsou definovány **odchylky významné**. Meze spolehlivosti dále vymezují tzv. **kritický obor (**oblast zamítnutí) a **oblast přijetí**.

Intervaly spolehlivosti

Šířku intervalu spolehlivosti volíme podle povahy problému a závisí také na rozsahu náhodného výběru. Nejčastěji používané intervaly:

Násobky *s*	Oblast přijetí	Oblast zamítnutí
1,960	95 %	5 %
2,576	99 %	1 %
3,291	99,9%	0,1 %

Interpretace intervalů spolehlivosti: 95 % interval spolehlivosti stanovený na základě náhodného výběru zahrne s pravděpodobností 95 % skutečnou hodnotu odhadovaného parametru.

Intervalový odhad parametrů základního souboru

Na rozdíl od bodového odhadu zde určujeme interval, v němž se zadanou pravděpodobností leží odhadovaný neznámý parametr.

Intervalový odhad se liší podle rozsahu souboru a také podle toho, jaké parametry známe.

Dále budeme značit:

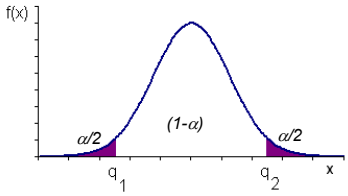
q_1, q_2 - krajní hodnoty intervalu spolehlivosti – meze spolehlivosti

α – **hladina významnosti** - pravděpodobnost, že skutečný parametr základního souboru není z intervalu spolehlivosti.

(1-α) – **hladina spolehlivosti** (spolehlivost odhadu) – představuje pravděpodobnost, že skutečný parametr základního souboru se nachází uvnitř intervalu spolehlivosti.

Intervalový odhad dvoustranný

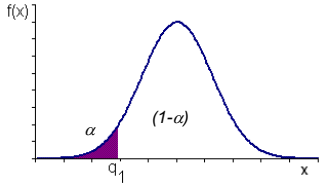
$$P(q_1 \le \mu \le q_2) = 1 - \alpha$$



Interpretace: Pravděpodobnost, že parametr μ základního souboru se nachází mezi hodnotami q_1, q_2 je *(1-α)*

Intervalový odhad jednostranný

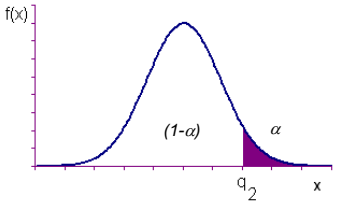
zdola ohraničený $P(q_1 \le \mu_2) = 1-\alpha$



Interpretace: Pravděpodobnost, že parametr μ základního souboru má větší hodnotu než q_1, je *(1-α)*

Intervalový odhad jednostranný

shora ohraničený $P(\mu \le q_2) = 1-\alpha$



Interpretace: Pravděpodobnost, že parametr μ základního souboru má menší hodnotu než q_2, je *(1-α)*

Intervalový odhad parametru μ pro velké rozsahy výběru (n > 30)

Jak plyne z výše uvedeného, rozdělení výběrových průměrů lze považovat za normální s parametry:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \qquad \sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

Intervalový odhad lze obecně zapsat: $P(q_1 \le \mu \le q_2) = 1-\alpha$

Pokud známe hodnotu σ
hodnoty q_1, q_2 lze určit takto:

$$q_1 = \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad q_2 = \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je příslušný kvantil normovaného normálního rozdělení (lze ho najít v tabulkách či vypočítat)

Intervalový odhad parametru μ pro velké rozsahy výběru (n > 30)

Pokud neznáme hodnotu σ
hodnoty q_1, q_2 lze určit takto:

$$q_1 = \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \qquad q_2 = \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

Intervalový odhad parametru μ lze potom zapsat:

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalový odhad parametru μ pro velké rozsahy výběru (n > 30)

Výše uvedená nerovnice je splněna s pravděpodobnosti *(1-α):*

$$P[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 1-\alpha$$

analogicky při neznámém σ

$$P[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}}] = 1-\alpha$$

Výraz (delta) $\Delta = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se označuje jako **přípustná chyba**

Intervalový odhad parametru *μ* lze jednoduše zapsat jako

$$\mu = \bar{x} \pm \Delta$$

Příklad (1/1): Určete 95% interval spolehlivosti pro průměrnou návštěvnost rekreačního střediska, když pro náhodný výběr 100 návštěvníků je průměrná délka pobytu 2,2 dne a rozptyl délky pobytu **všech** návštěvníků je 0,36

$n = 100$
$\bar{x} = 2{,}2$
$\sigma = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$
$\alpha = 0{,}05$

Z tabulek kvantilů normovaného normálního rozdělení určíme hodnotu z pro α=0,05: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}96$

p	z_p	p	z_p	p	z_p	p	z_p
0,50	0,000	0,75	0,674	0,950	1,645	0,975	1,96
0,51	0,025	0,76	0,706	0,951	1,655	0,976	1,977
0,52	0,050	0,77	0,739	0,952	1,665	0,977	1,995
0,53	0,075	0,78	0,772	0,953	1,675	0,978	2,014
0,54	0,100	0,79	0,806	0,954	1,685	0,979	2,034

dále vypočítáme hranice intervalu spolehlivosti …

Příklad (1/2):

Vypočítáme hranice intervalu spolehlivosti:

$$q_1 = \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}2 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}} = 2{,}0824$$

$$q_2 = \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}2 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}} = 2{,}3176$$

Výsledný intervalový odhad lze zapsat:

$$P(2{,}0824 \le \mu \le 2{,}3176) = 0{,}95$$

Můžeme tvrdit, že s pravděpodobností 95% (na hladině významnosti α=0,05) se průměrná délka pobytu všech návštěvníků rekreačního střediska pohybuje v intervalu <2,0824;2,3176>

Často užívané intervalové odhady parametru μ

α=0,1 $$P[\bar{x} - 1{,}645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1{,}645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 90\%$$

α=0,05 $$P[\bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 95\%$$

α=0,01 $$P[\bar{x} - 2{,}576\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 2{,}576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 99\%$$

Intervalový odhad parametru μ pro malé rozsahy výběru (n < 30)

V případě výběrů malého rozsahu je nutné nahradit hodnotu jistého kvantilu normovaného normálního rozdělení (z) kritickou hodnotou **t-rozdělení** pro $\nu = n - 1$ stupňů volnosti.

Pokud tedy známe hodnotu rozptylu σ^2 potom pro krajní hodnoty intervalu spolehlivosti *q1, q2* dostáváme:

$$q_1 = \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad q_2 = \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Pokud neznáme hodnotu rozptylu σ^2 potom použijeme k jeho odhadu výběrové hodnoty *s*:

$$q_1 = \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \qquad q_2 = \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

Intervalový odhad parametru μ pro malý rozsah výběru

Příklad řešení s využitím funkcí EXCELu

Intervalový odhad parametru σ^2 základního souboru

Předpokládáme, že základní soubor má normální rozdělení. Intervalový odhad bude mít obecný tvar:

$$P(q_1 \le \sigma^2 \le q_2) = 1 - \alpha$$

Intervalový odhad se opírá o poznatek rozdělení výběrového rozptylu, že totiž náhodná veličina ns^2/σ^2 má χ^2 rozdělení s $\nu = n - 1$ stupni volnosti.

Hodnoty q_1, q_2 určujeme pomocí odhadnuté hodnoty *s* z výběrového souboru:

$$q_1 = \frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};(n-1)}} \qquad q_2 = \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)}}$$

Ze statistických tabulek či s využitím vhodného statistického programu potřebujeme určit kritické hodnoty χ2 rozdělení pro *(n-1)* stupňů volnosti

Intervalový odhad parametru σ^2 základního souboru

Intervalový odhad parametru σ^2 lze potom zapsat:

$$P[\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)}}] = 1 - \alpha$$

Odmocněním získáme výraz pro intervalový odhad směrodatné odchylky základního souboru.

Příklad: Pro výběrový soubor 12 měření výšky vodní hladiny byla zjištěna hodnota rozptylu $s^2 = 0{,}64$. Určete intervalový odhad rozptylu pro hladiny spolehlivosti 0,90, 0,95 a 0,99

Meze intervalu spolehlivosti počítáme podle vztahu:

$$P[\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(n-1)}}] = 1-\alpha$$

Řešení s využitím funkcí v programu EXCEL:

	C	D	E	F	G	H	I	J
13							odhad	
14	α	$\alpha/2$	$1-\alpha$	$1-\alpha/2$	CHIINV(α/2,n-1)	CHIINV(1-α/2,n-1)	dolní	horní
15	0,10	0,05	0,90	0,950	18,675	4,575	0,358	1,539
16	0,05	0,025	0,95	0,975	21,920	3,816	0,321	1,845
17	0,01	0,005	0,99	0,995	26,757	2,603	0,263	2,704

Zadání vzorců v EXCELU:

=CHIINV(0,005;11)

=11*0,64/G17

=11*0,64/H17

Určení rozsahu *n* náhodného výběru

Potřebujeme ho k tomu, abychom z výběru odhadli neznámý průměr s předem zvolenou přesností – tedy aby měl interval spolehlivosti požadovanou šířku.

Rozsah vypočteme ze vztahu pro výpočet tzv. **přípustné chyby** (delta), která je polovinou požadované šířky intervalu spolehlivosti.

$$\Delta = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

z čehož pro n platí:

$$n = \left(\frac{\sigma \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\Delta} \right)^2$$

Určení rozsahu *n* náhodného výběru

Příklad: Z náhodného výběru 60-ti zákazníků hypermarketu zjistili jejich průměrný věk 28 roků. Za předpokladu, že známe směrodatnou odchylku **všech** zákazníků (9 roků) určete:

$n = 60$
$\bar{x} = 28$
$\sigma = 9$
$\alpha = 0{,}05$

a) 95 % interval pro průměrný věk všech zákazníků

$$(28 - 1{,}96\frac{9}{\sqrt{60}} \le \mu \le 28 + 1{,}96\frac{9}{\sqrt{60}})$$

$$(25{,}7 \le \mu \le 30{,}3)$$

b) potřebujeme, aby 95 % interval byl pouze plus minus 2 roky. Jak velký výběr je zapotřebí?

Předpokládáme, že přípustná chyba Δ je 2

$$n = \left(\frac{\sigma \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\Delta} \right)^2 = \left(\frac{9 \cdot 1{,}96}{2} \right)^2 = 8{,}82^2 = 78$$

Výběr by musel obsahovat 78 zákazníků