

ŠÍŘENÍ VLN V SI VLÁKNECH

- SKALÁRNÍ VIDY V APROXIMACI SLABĚ VEDOUcíHO VLNOVODU
- ANALÝZA VIDŮ VE VLÁKNECH SE STUPŇOVITÝM INDEXEM LOMU (SI)
- POMĚRNÝ VÝKON PŘENÁŠENÝ VIDY V JÁDRU

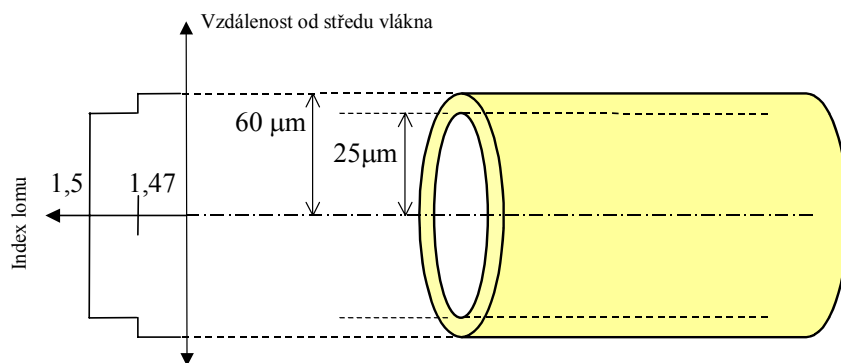
Literatura:

Chatak A., Thyagarajan K.: Introduction To Fiber Optics,
Cambridge University Press, 1998

SKALÁRNÍ VIDY V APROXIMACI SLABĚ VEDOUcíHO VLNOVODU

Vlákno se stupňovitým průběhem indexu lomu (SI):

$$\begin{aligned} n(r) &= n_1 & 0 < r < a & \text{jádro} \\ &= n_2 & r > a & \text{plášť} \end{aligned} \quad (4.1)$$



V reálných vláknech obvykle platí

$$n_1 \approx n_2 \quad (4.2)$$

takže je možné použít tzv. skalární vlnovou aproximaci (někdy také nazývanou aproximaci slabě vedoucího vlnovodu). V této aproximaci se předpokládá, že vidy mají pouze příčné složky pole a mohou nabývat libovolný stav polarizace. Takže dvě nezávislé sady vidů můžeme předpokládat jako x- a y- polarizované s téměř shodnou konstantou šíření. Takové lineárně polarizované vidy se obvykle označují jako LP vidy.

Jedná se o analogii TE a TM vidů pro $n_1 \approx n_2$, viz předchozí kapitola.

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu

V přiblížení slabě vedoucího vlnovodu vyhovují příčné složky elektrického pole (E_x nebo E_y) skalární vlnové rovnici

$$\nabla^2 \Psi = \varepsilon_0 \mu_0 n^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Pokud bude n^2 záviset pouze na příčných souřadnicích (r, ϕ)

$$\Psi(r, \phi, z, t) = \psi(r, \phi) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (4.4)$$

kde ω je úhlový kmitočet a β konstanta šíření. Tato rovnice představuje rozložení vidů v daném systému. Dosazením do (4.3) dostáváme

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \left[\frac{\omega^2}{c^2} n^2(r, \phi) - \beta^2 \right] \psi = 0 \quad (4.5)$$

Ve většině praktických případů n^2 závisí pouze na radiální souřadnici r , je tedy vhodnější použít válcový souřadnicový systém

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \left[k_0^2 n^2(r) - \beta^2 \right] \psi = 0 \quad (4.6)$$

kde

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (4.7)$$

je vlnové číslo ve vakuu.

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu

Protože vlákno má válcovou symetrii, můžeme rovnici (4.6) řešit separací proměnných:

$$\psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \quad (4.8)$$

Po substituci a dělení výrazem $\psi(r, \phi) / r^2$ dostáváme

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + r^2 \left[n^2(r) k_0^2 - \beta^2 \right] = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = +l^2 \quad (4.9)$$

Závislost na ϕ bude mít tvar $\cos l\phi$ nebo $\sin l\phi$ a pro periodické řešení (tj. $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$) musí platit

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

(Záporné hodnoty l odpovídají stejnému radiálnímu rozložení pole).

Protože pro každou hodnotu l dostáváme dva nezávislé stavy polarizace, vidy s $l \geq 1$ jsou čtyřnásobně degenerované (dva ortogonální polarizační stavy a závislost na ϕ ve tvaru $\cos l\phi$ a $\sin l\phi$); vidy s $l = 0$ jsou nezávislé na ϕ a jsou dvojnásobně degenerované.

Pozn.: Fyzikálně má l podobný význam jako vedlejší kvantové číslo popisující z-ovou složku orbitálního úhlového momentu elektronu v cylindricky symetrickém potenciálním poli. Pokud tedy kladné znaménko před $l\phi$ odpovídá pravotočivé „rotaci“ fotonu kolem osy z , pak záporné znaménko představuje rotaci „levotočivou“. Protože ve vláknu není žádný směr rotace preferovaný jedná se o degenerované stavy.

Radiální tvar rovnice (4.9) bude

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \left\{ \left[k_0^2 n^2(r) - \beta^2 \right] r^2 - l^2 \right\} R = 0 \quad (4.11)$$

Řešení této rovnice pro vlákno se stupňovitým indexem lomu bude provedeno v následující kapitole.

Nyní však můžeme provést všeobecnou analýzu rovnice (4.11) pro libovolný válcově symetrický profil indexu lomu, který klesá monotónně z hodnoty n_1 v ose, na konstantní hodnotu n_2 za hranicí rozhraní jádra a pláště ($r=a$). Řešení rovnice (4.11) můžeme opět rozdělit na dvě oblasti - jádro x plášť:

$$\text{a) } k_0^2 n_1^2 > \beta^2 > k_0^2 n_2^2 \quad \textbf{jádro} \quad (4.12)$$

Pro konstanty šíření v této oblasti pole $R(r)$ kmitá v jádru a v plášti je tlumeno, konstanty šíření nabývají diskrétních hodnot – jedná se o vedené vidy. Pro danou hodnotu l dostáváme několik vedených vidů, označují se LP_{lm} ($m = 1, 2, 3, \dots$). (LP značí „**L**ineární **P**olarizaci“). Protože LP vidy jsou řešením skalární vlnové rovnice, dá se očekávat, že budou vyhovovat podmínce ortonormality

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \psi_{lm}^*(r, \phi) \psi_{l'm'}(r, \phi) r dr d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.13)$$

$$\text{b) } \beta^2 < k_0^2 n_2^2 \qquad \text{plášť} \qquad (4.14)$$

Pro takové hodnoty β je pole harmonické i v plášti a β může nabývat libovolných hodnot. Jedná se o vyzářené vidy.

Vedené a vyzářené vidy tvoří kompletní soustavu, která umožňuje popsat libovolné rozložení pole

$$\psi(r, \phi, z) = \sum_{l,m} c_{lm} \psi_{lm}(r, \phi) e^{-i\beta_{lm}z} + \int c(\beta) \psi_{\beta}(r, \phi) e^{-i\beta z} d\beta \quad (4.15)$$

kde první člen na pravé straně představuje součet přes diskrétní vedené vidy a druhý člen integrál přes kontinuum vyzářených vidů. Veličina $|c_{lm}|^2$ je úměrná výkonu přenášenému videm řádu (lm) . Konstanty c_{lm} lze získat ze znalosti tvaru pole pro $z = 0$. Podobně $|c(\beta)|^2 d\beta$ je úměrné výkonu přenášenému vyzářenými vidy s hodnotou β v intervalu β a $\beta + d\beta$.

ANALÝZA VIDŮ VE VLÁKNECH SE STUPŇOVITÝM INDEXEM LOMU (SI)

V této kapitole odvodíme vlastnosti vidů a odpovídající konstanty šíření pro SI optická vlákna s průběhem indexu lomu podle vztahu (4.1). Většina vláken používaných v komunikacích splňuje podmínku aproximace slabě vedoucího vlnovodu, tj. platí $(n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$, takže radiální složka příčného elektrického pole je dána následující rovnicí (viz. (4.11))

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \left\{ [k_0^2 n^2(r) - \beta^2] r^2 - l^2 \right\} R = 0 \quad (4.16)$$

a kompletní příčné pole je dáno relací

$$\Psi(r, \phi, z, t) = R(r) e^{-i(\omega t - \beta z)} \begin{cases} \cos l\phi \\ \sin l\phi \end{cases} \quad (4.17)$$

Pokud dosadíme výraz pro $n^2(r)$ z (4.1) do (4.16) dostáváme

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \left(U^2 \frac{r^2}{a^2} - l^2 \right) R = 0 \quad \text{pro } 0 < r < a \quad (4.18)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \left(W^2 \frac{r^2}{a^2} + l^2 \right) R = 0 \quad \text{pro } r > a \quad (4.19)$$

kde

$$U = a \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad (4.20)$$

$$W = a \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_0^2} \quad (4.21)$$

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu

normovaný parametr vlnovodu (tzv. normovaný kmitočet) V je definován jako (viz planární vlnovody)

$$V = \sqrt{U^2 + W^2} = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (4.22)$$

Protože pro vedené vidy platí $n_2^2 k_0^2 < \beta^2 < n_1^2 k_0^2$, musí být U a W reálná čísla.

Řešením rovnic (4.18) a (4.19) jsou standardní Besselovy funkce.

Řešením rovnice (4.18) jsou $J_l(x)$ a $Y_l(x)$, kde $x = U \frac{r}{a}$. Řešení

$Y_l(x)$ můžeme zamítnout, protože tato funkce diverguje pro $x \rightarrow 0$.

Řešením rovnice (4.19) jsou modifikované Besselovy funkce $K_l(\tilde{x})$ a $I_l(\tilde{x})$ s asymptotickými vztahy

$$K_l(\tilde{x}) \xrightarrow{\tilde{x} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{x}}} e^{-\tilde{x}} \quad (4.23)$$

$$I_l(\tilde{x}) \xrightarrow{\tilde{x} \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{x}}} e^{\tilde{x}} \quad (4.24)$$

kde $\tilde{x} = W \frac{r}{a}$. Řešení $I_l(\tilde{x})$ zamítneme, protože pro $x \rightarrow \infty$ diverguje.

Besselovy funkce

Besselova funkce prvního druhu, řádu (indexu) n je definována rovnicí:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Řada je konvergentní pro každé reálné n a pro každé x .

Věta: Pro celé n platí $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

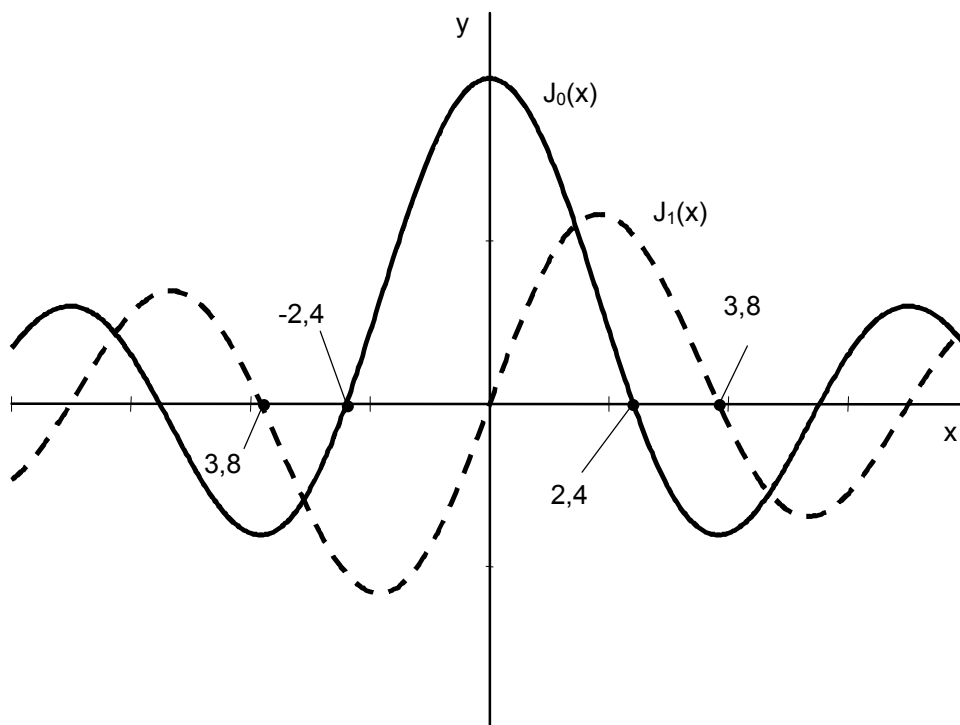
Věta: Funkce $y = J_n(x)$ vyhovuje Besselově diferenciální rovnici:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Věta: Integrální tvar

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \vartheta - n\vartheta) d\vartheta$$

Věta: $J_0'(x) = -J_1(x)$



Příčné pole je tedy definováno jako

$$\psi(r, \phi) = \begin{cases} \frac{A}{J_l(U)} J_l\left(\frac{Ur}{a}\right) \begin{bmatrix} \cos l\phi \\ \sin l\phi \end{bmatrix} & r < a \\ \frac{A}{K_l(W)} K_l\left(\frac{Wr}{a}\right) \begin{bmatrix} \cos l\phi \\ \sin l\phi \end{bmatrix} & r > a \end{cases} \quad (4.25)$$

kde jsme předpokládali spojitost ψ na rozhraní jádro-plášť. Ze spojitosti $\partial\psi/\partial r$ pro $r = a$ vyplývá

$$\frac{U J'_l(U)}{J_l(U)} = \frac{W K'_l(W)}{K_l(W)} \quad (4.26)$$

Využijeme vlastností Besselových funkcí

$$\pm U J'_l(U) = l J_l(U) - U J_{l\pm 1}(U) \quad (4.27)$$

$$\pm W K'_l(W) = l K_l(W) \mp W K_{l\pm 1}(W) \quad (4.28)$$

$$J_{l+1}(U) = \left(\frac{2l}{U}\right) J_l(U) - J_{l-1}(U) \quad (4.29)$$

$$K_{l+1}(W) = \left(\frac{2l}{W}\right) K_l(W) + K_{l-1}(W) \quad (4.30)$$

a rovnici (4.26) můžeme přepsat do některého z následujících tvarů

$$U \frac{J_{l+1}(U)}{J_l(U)} = W \frac{K_{l+1}(W)}{K_l(W)} \quad (4.31)$$

nebo

$$U \frac{J_{l-1}(U)}{J_l(U)} = -W \frac{K_{l-1}(W)}{K_l(W)} \quad (4.32)$$

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu

Pokud však použijeme limitního tvaru $K_l(W)$ pro $W \rightarrow 0$, lze ukázat, že

$$\lim_{W \rightarrow 0} W \frac{K_{l-1}(W)}{K_l(W)} \rightarrow 0; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

Důkaz:

Limitní tvary jsou

$$K_0(W) \xrightarrow{W \rightarrow 0} -\ln(W/2)$$

a

$$K_l(W) \xrightarrow{W \rightarrow 0} \frac{1}{2} \Gamma(l) (2/W)^l; \quad l > 0$$

pro analýzu vidů použijeme tedy vztah (4.32). Pro $l = 0$ máme

$$U \frac{J_1(U)}{J_0(U)} = W \frac{K_1(W)}{K_0(W)} \quad (4.34)$$

kde jsme využili relací (viz Besselovy funkce) $J_{-1}(U) = -J_1(U)$ a $K_{-1}(W) = K_1(W)$.

Je třeba zmínit, že okrajové podmínky, které jsme použili pro odvození charakteristické rovnice (4.32) odpovídají použité aproximaci pro skalární vlnovou rovnici. Pokud bychom například uvažovali, že ψ reprezentuje E_y , pak přesně řečeno E_y a $\partial E_y / \partial r$ nebudou spojité pro $r = a$ pro všechna ϕ . Správně musíme uvažovat spojitost E_ϕ, E_z a $n^2 E_r$ na rozhraní. Naštěstí pro $n_1 \approx n_2$ je chyba zanedbatelná.

Často je vhodné zavést normalizovanou konstantu šíření

$$b = \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{W^2}{V^2} \quad (4.35)$$

Takže

$$W = V\sqrt{b} \quad (4.36)$$

a

$$U = \sqrt{V^2 - W^2} = V\sqrt{1-b} \quad (4.37)$$

Protože pro vedené vidy platí

$$n_2^2 < \frac{\beta^2}{k_0^2} < n_1^2 \quad (4.38)$$

dostáváme

$$0 < b < 1 \quad (4.39)$$

Pomocí normalizované konstanty šíření můžeme rovnice (4.32)

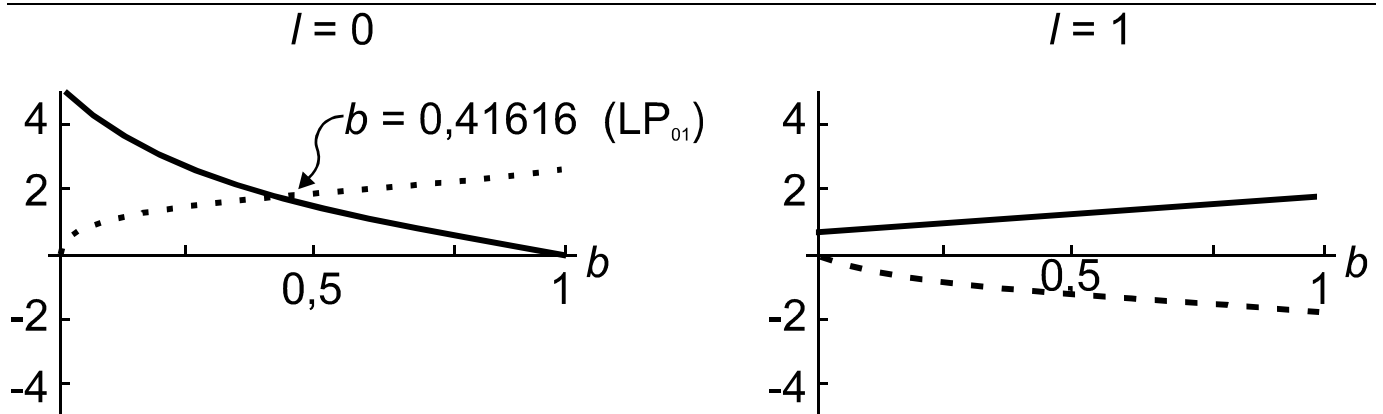
a (4.34) zapsat ve tvaru

$$V\sqrt{1-b} \frac{J_{l-1}[V\sqrt{1-b}]}{J_l[V\sqrt{1-b}]} = -V\sqrt{b} \frac{K_{l-1}[V\sqrt{b}]}{K_l[V\sqrt{b}]} \quad l \geq 1 \quad (4.40)$$

$$V\sqrt{1-b} \frac{J_1[V\sqrt{1-b}]}{J_0[V\sqrt{1-b}]} = V\sqrt{b} \frac{K_1[V\sqrt{b}]}{K_0[V\sqrt{b}]} \quad l = 0 \quad (4.41)$$

Řešením těchto transcendentálních rovnic jsou křivky charakterizující závislost b (a tedy i U a W) na V . Pro dané l existuje konečný počet řešení. M -té řešení se označuje jako LP_{lm} vid.

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu



Grafické řešení rovnice (4.41) a (4.40) pro $l = 0$ a $l = 1$ při $V = 2$. Z obrázků je vidět, že pro $l = 0$ dostáváme pouze jeden vid (jeden průsečík) a pro $l = 1$ se grafická znázornění LHS a RHS (4.40) neprotínají, pro takovou hodnotu V se nešíří žádný vid.

Příklad 4.1:

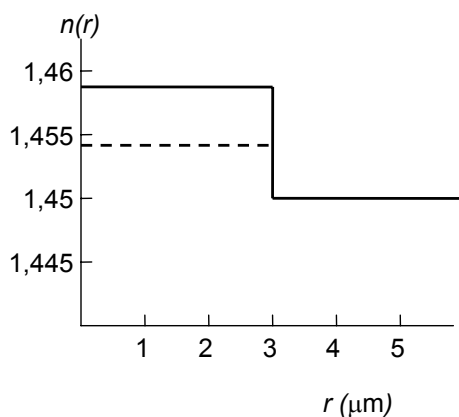
Uvažujme SI vlákno s následujícími parametry:

$$n_2 = 1,45 \quad \Delta = 0,0064 \quad a = 3,0 \mu\text{m} \quad (4.42)$$

takže normovaný kmitočet pro $\lambda_0 = 1,546 \mu\text{m}$ bude

$$V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2,0, \text{ takže}$$

$$\frac{\beta}{k_0} = \sqrt{n_2^2 + b(n_2^2 - n_1^2)} \approx 1,4539 \quad (4.43)$$



Jiné vlákno s parametry

$$n_2 = 1,45 \quad \Delta = 0,010 \quad a = 2,0 \mu\text{m}$$

bude mít $V = 0$ pro $\lambda_0 = 1,288 \mu\text{m}$ a odpoví-

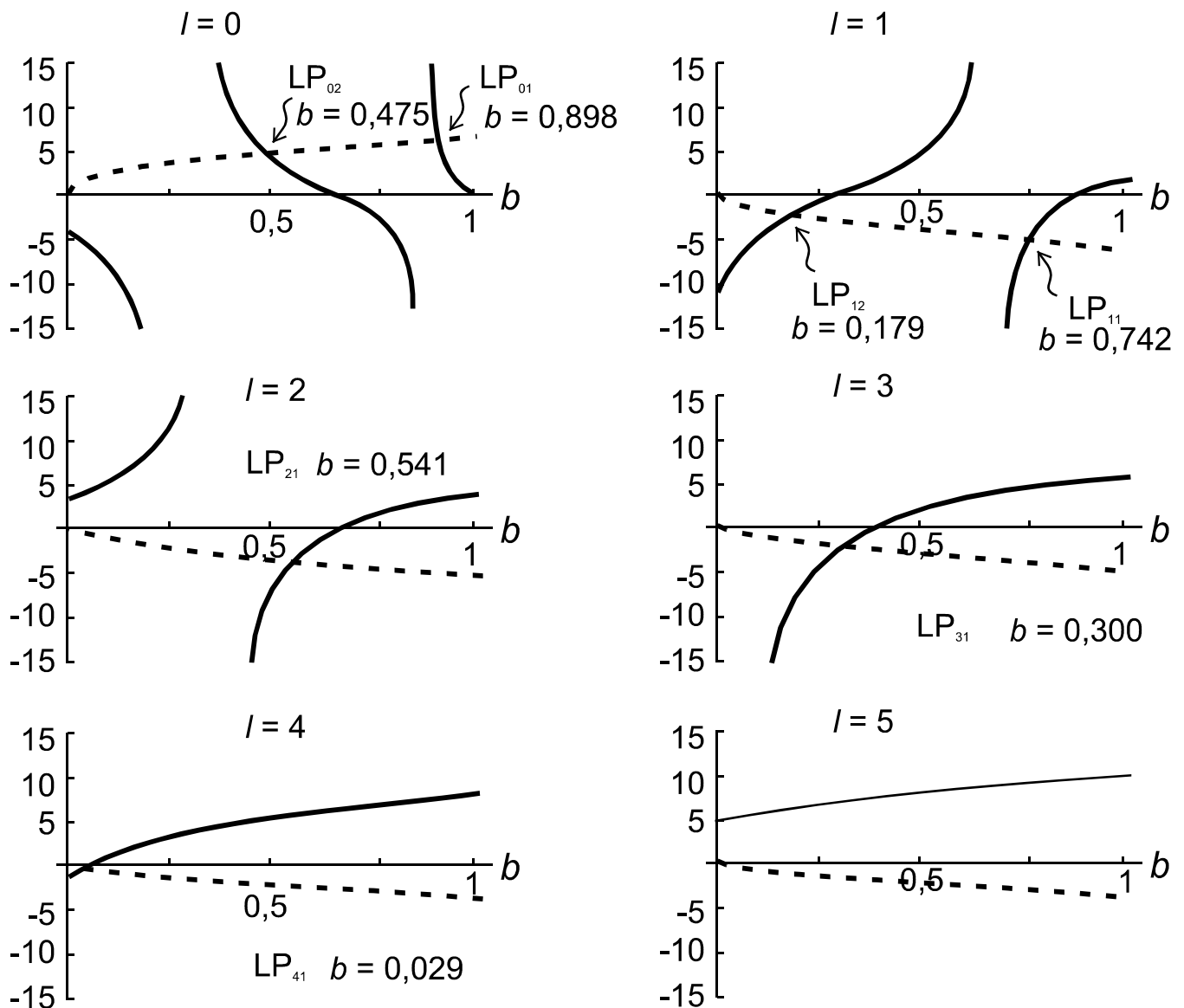
dající hodnota β/k_0 bude $\frac{\beta}{k_0} \approx 1,4560$

Čárkovaná čára na obrázku odpovídá diskretním hodnotám β/k_0 pro vedené vidy.

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu

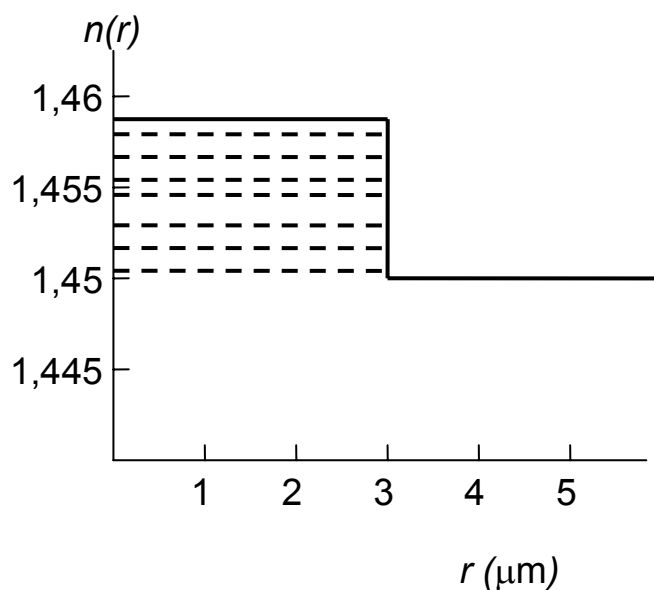
Příklad 4.2:

Uvažujme nyní vyšší hodnotu normovaného kmitočtu, např. $V = 6,5$ (větší průměr jádra). Na následujícím obrázku je zakreslena LHS a RHS rovnice (4.41) [$l=0$] a rovnice (4.40) [$l = 1, 2, 3, 4$ a 5]. $V = 6,5$



Z obrázků je patrné, že pro $l = 0$ máme dva vidy (označují se LP_{01} a LP_{02}), dva vidy pro $l = 1$ (LP_{11} a LP_{12}) a po jednom vidu pro $l = 2, 3, 4$ (LP_{21} , LP_{31} a LP_{41}). LP_{41} je velmi blízko ke kritické frekvenci.

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu



$n_2 = 1,45$ $\Delta = 0,0064$ $a = 3,0\text{ }\mu\text{m}$. Vláknem s těmito parametry bude mít $V=6,5$ pro $\lambda_0 \simeq 0,4757$. Čárkované čáry na obrázku odpovídá diskretním hodnotám β/k_0 pro vedené vlny.

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu

Kritické frekvence různých vidů LP_{lm} v SI optickém vlákne

| $l = 0$ vidy | $J_1(V_c) = 0$ | $l = 1$ vidy | $J_0(V_c) = 0$ |
|--------------|---------------------------------|--------------|---------------------------------|
| Vid | V_c | Vid | V_c |
| LP_{01} | 0 | LP_{11} | 2,4048 |
| LP_{02} | 3,8317 | LP_{12} | 5,5201 |
| LP_{03} | 7,0156 | LP_{13} | 8,6537 |
| LP_{04} | 10,1735 | LP_{14} | 11,7915 |
| $l = 2$ vidy | $J_1(V_c) = 0 \quad V_c \neq 0$ | $l = 1$ vidy | $J_0(V_c) = 0 \quad V_c \neq 0$ |
| Vid | V_c | Vid | V_c |
| LP_{21} | 3,8317 | LP_{31} | 5,1356 |
| LP_{22} | 7,0156 | LP_{32} | 8,4172 |
| LP_{23} | 10,1735 | LP_{33} | 11,6198 |
| LP_{24} | 13,3237 | LP_{34} | 14,7960 |

Z analýzy Besselových funkcí a podmínky pro normovanou konstantu šíření $0 < b < 1$ vyplývá, že vedených vidů bude pouze omezený počet. Uvažujme například LHS rovnice (4.41).

$$f(b) = V\sqrt{1-b} \frac{J_1(V\sqrt{1-b})}{J_0(V\sqrt{1-b})} \quad (4.44)$$

Nyní pro $V = 2$

$$f(b) = 0 \quad \text{když} \quad V\sqrt{1-b} = 0; 3,8317; 7,0156; \dots$$

a

$$f(b) = \infty \quad \text{když} \quad V\sqrt{1-b} = 2,4048; 5,5201; \dots$$

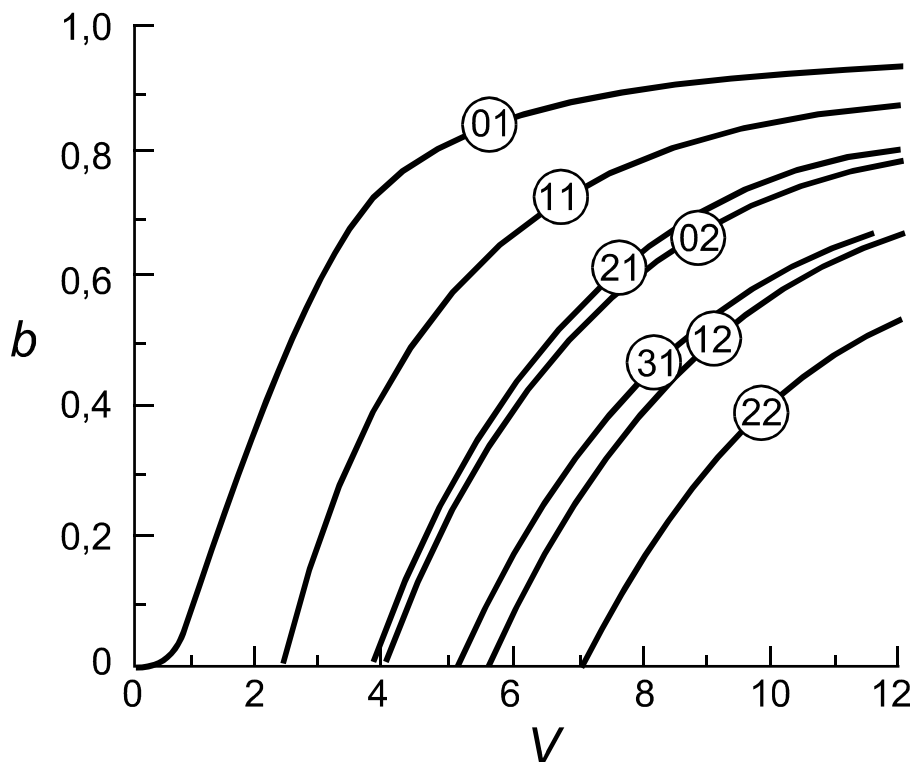
Pro $V = 6,5$

$$f(b) = 0 \quad \text{když} \quad b = 1; 0,6525; \dots$$

$$f(b) = \infty \quad \text{když} \quad b = 0,8631; 0,2788 \dots$$

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu

Na základě znalosti kořenů Besselových funkcí lze zjistit počet vidů a velikost normalizované konstanty šíření b . Vedené vidy jsou dány průsečíky podle obrázku v Příkl. 4.2. Závislost b na V tvoří sérii univerzálních křivek podle následujícího obrázku. Je vidět, že pro dané V existuje konečný počet vidů.



Závislost normalizované konstanty šíření b na normalizované frekvenci V pro vidy nižších řádů v SI vláknu.

Podmínka $b = 0$ (tj. $\beta^2 = k_0^2 n_2^2$) odpovídá kritické (mezní) frekvenci vidu. Pro $b < 0$ (tj. $\beta^2 < k_0^2 n_2^2$) pole kmitá i v plášti a jedná se o vyzářené vidy. Při podmínce mezní frekvence platí:

$$\beta = k_0 n_2, \quad b = 0, \quad W = 0, \quad U = V = V_c \quad (4.45)$$

Kritické frekvence (*cutoffs*) jednotlivých vidů jsou dány kořeny

$$\begin{aligned} \text{vidy } l = 0: & \quad J_1(V_c) = 0 \\ \text{vidy } l = 1: & \quad J_0(V_c) = 0 \\ \text{vidy } l \geq 2: & \quad J_{l-1}(V_c) = 0; \quad V_c \neq 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pozn.: Pro vidy $l \geq 2$ je třeba vyloučit kořen $V_c = 0$, protože

$$\lim_{V \rightarrow 0} V \frac{J_{l-1}(V)}{J_l(V)} \neq 0 \quad \text{pro } l \geq 2 \quad (4.47)$$

Mezní normalizované frekvence jsou tedy kořeny Besselových funkcí (viz tabulka).

Z předchozího obrázku je zřejmé, že v SI vlákne při podmínce

$$0 < V < 2,4048 \quad (4.48)$$

dostáváme pouze jediný vedený vid – LP_{01} . Jedná se o jednovodové vlákno, které má velký význam např. v optických telekomunikačních systémech.

Podobně dostáváme vedené vidy i pro další kořeny:

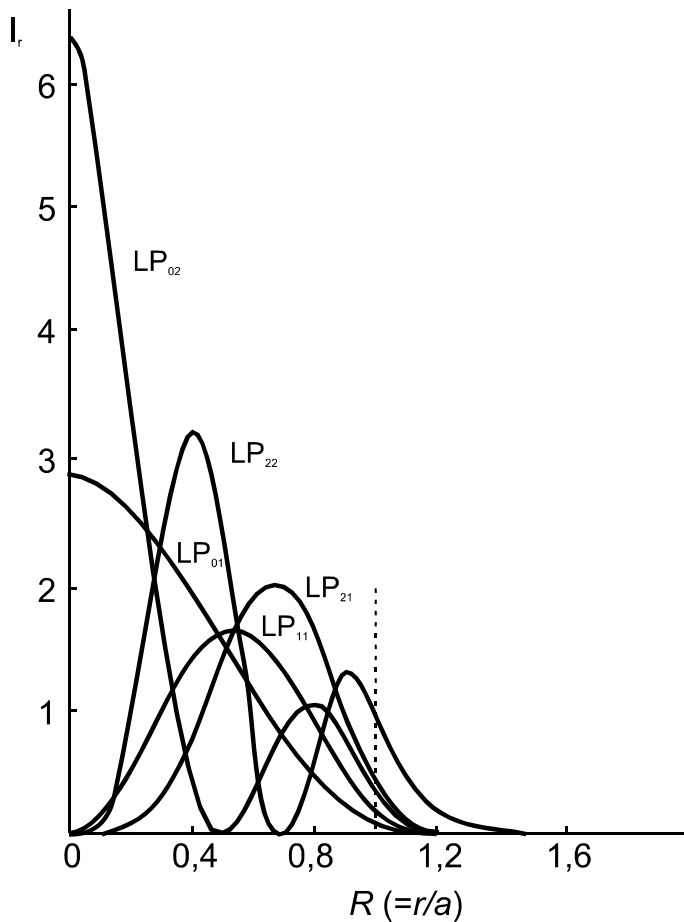
| | |
|-----------------------|--|
| $2,4048 < V < 3,8317$ | vidy LP_{01} a LP_{11} |
| $3,8317 < V < 5,1356$ | vidy LP_{01} , LP_{11} , LP_{21} a LP_{02} |
| $5,1356 < V < 5,5201$ | vidy LP_{01} , LP_{11} , LP_{21} , LP_{02} a LP_{31} |

Grafická závislost $V(b)$ umožňuje zjistit konstantu šíření:

Pro dané SI vlákno a danou pracovní λ nejdříve spočítáme V a z grafu odečteme b . Konstanta šíření se pak spočítá ze vztahu

$$\beta_{lm} = k_0 \sqrt{n_2^2 + b_{lm}(n_1^2 - n_2^2)} \quad (4.49)$$

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu



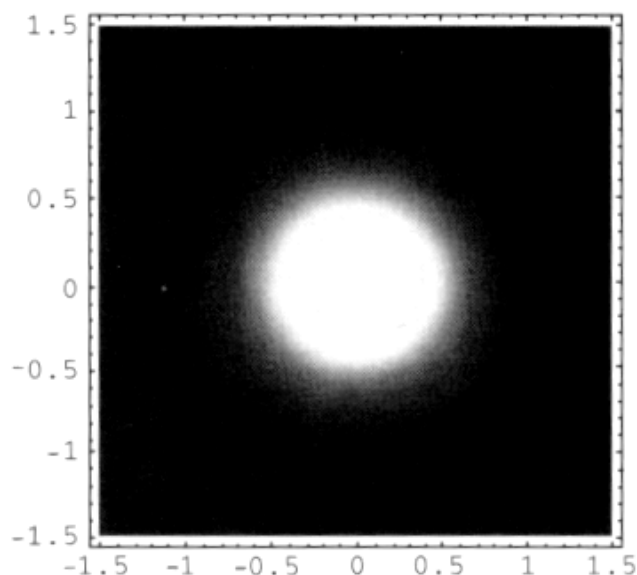
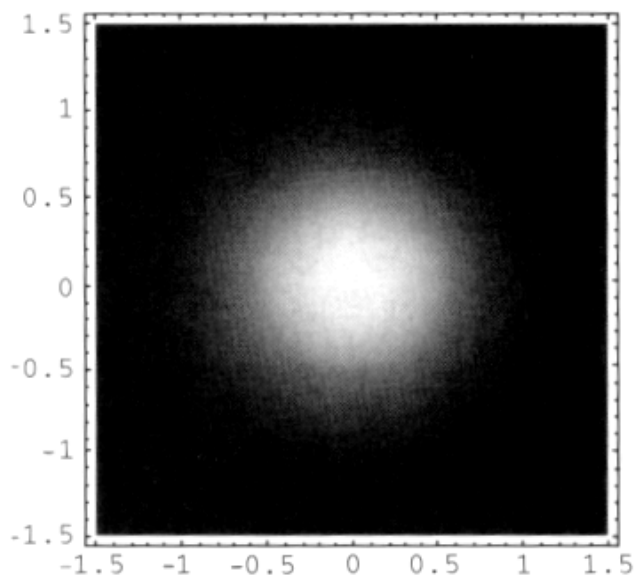
Radiální rozložení intenzity (normované na stejný výkon) pro vidy nižších řádů v SI vlákne pro $V = 8$.

Vidy vyšších řádů mají větší podíl výkonu v plášti (pronikají více ven z jádra).

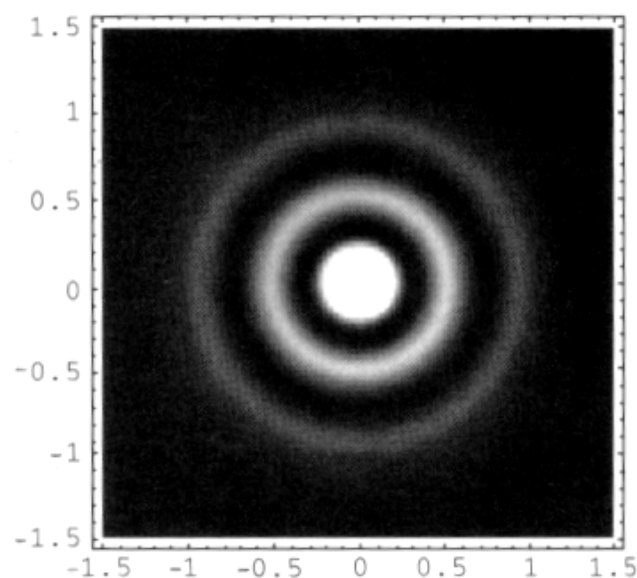
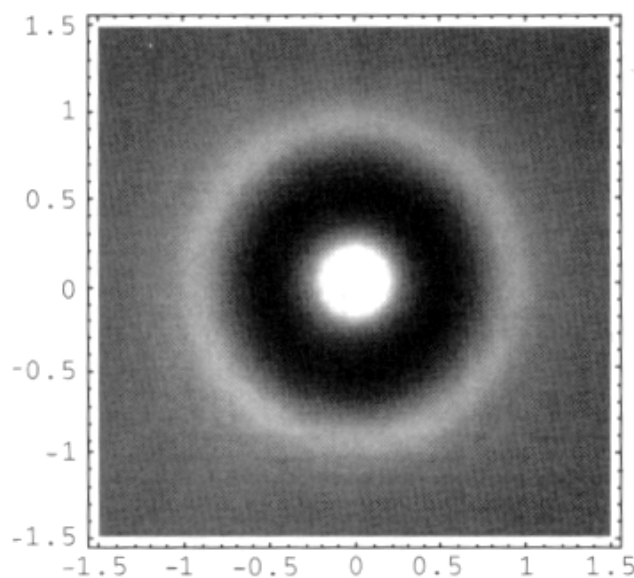
| | | |
|------------------|---|---|
| LP ₀₁ | | |
| | $\hat{y} \quad J_0\left(\frac{Ur}{a}\right)$ | $\hat{x} \quad J_0\left(\frac{Ur}{a}\right)$ |
| LP ₁₁ | | |
| | $\hat{y} \quad J_1\left(\frac{Ur}{a}\right) \cos \phi$ | $\hat{x} \quad J_1\left(\frac{Ur}{a}\right) \cos \phi$ |
| | | |
| | $\hat{y} \quad J_1\left(\frac{Ur}{a}\right) \sin \phi$ | $\hat{x} \quad J_1\left(\frac{Ur}{a}\right) \sin \phi$ |
| LP ₂₁ | | |
| | $\hat{y} \quad J_2\left(\frac{Ur}{a}\right) \cos 2\phi$ | $\hat{x} \quad J_2\left(\frac{Ur}{a}\right) \cos 2\phi$ |
| | | |
| | $\hat{y} \quad J_2\left(\frac{Ur}{a}\right) \sin 2\phi$ | $\hat{x} \quad J_2\left(\frac{Ur}{a}\right) \sin 2\phi$ |

Rozložení pole pro vidy nižších řádů v SI vláknu. Šipky znázorňují směr elektrického pole

LP_{01}

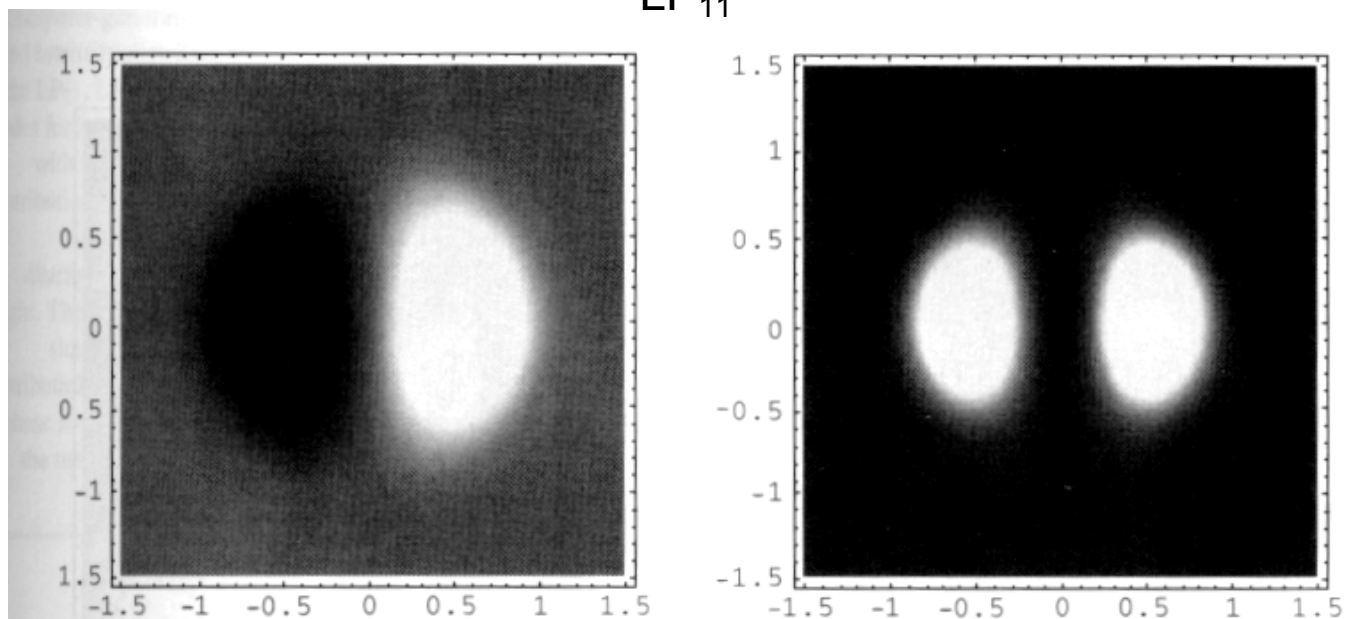


LP_{03}

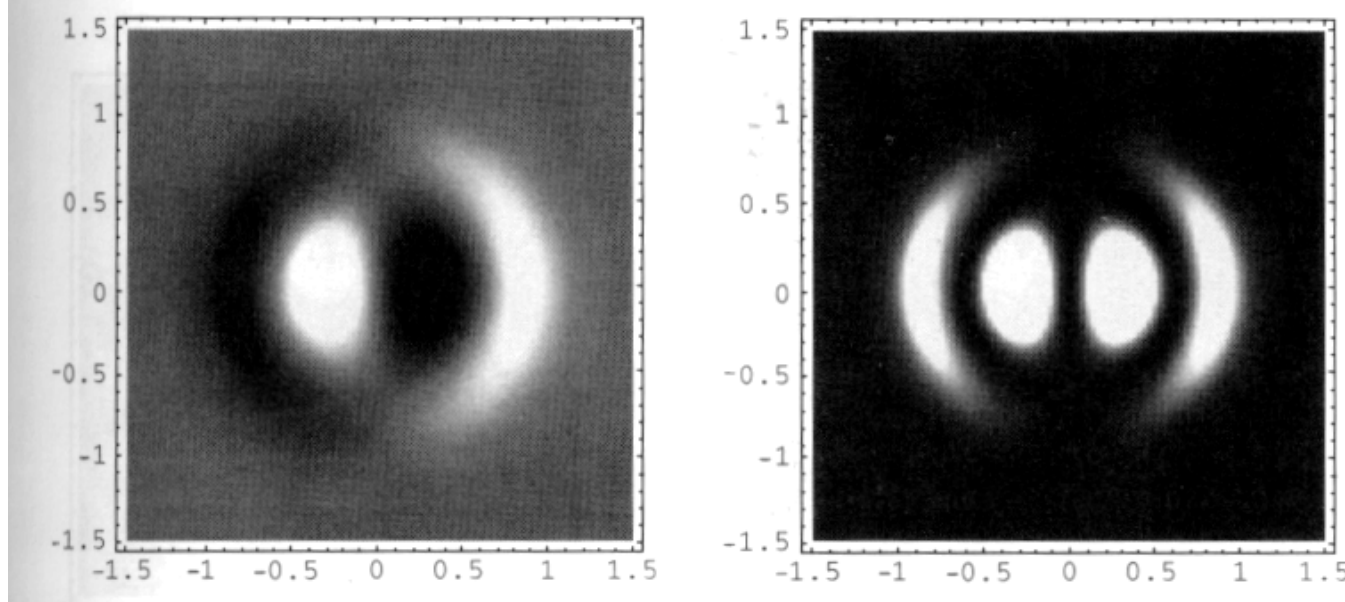


Počítačově modelované rozložení pole a intenzity pro LP_{01} a LP_{03} vidy v SI vláknu s $V = 8$. Rozložení pole je vlevo a intenzity vpravo. Odstíny šedé a bílé odpovídají otočení fáze při průchodu pole nulou.

LP₁₁



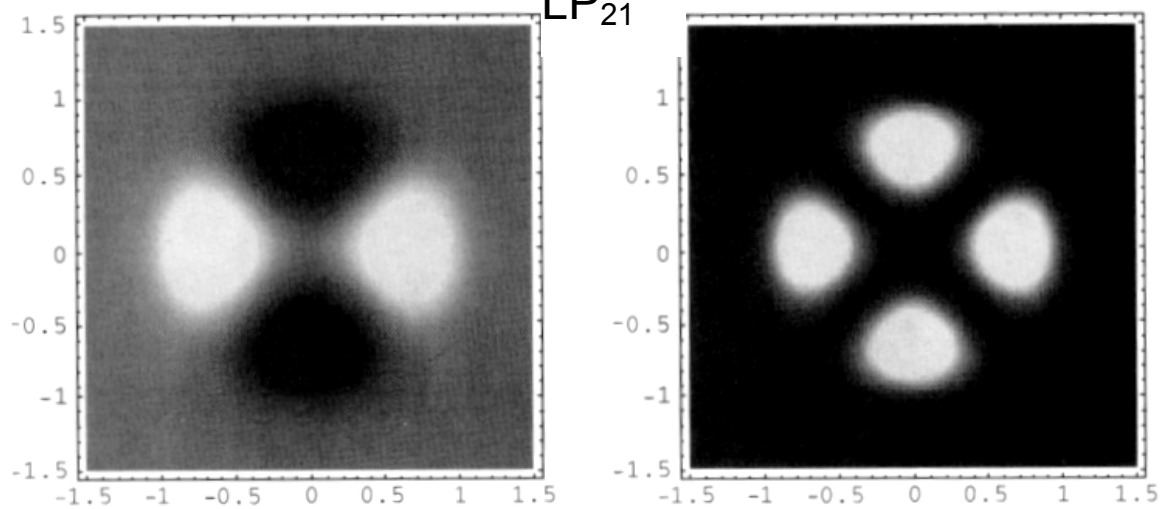
LP₁₂



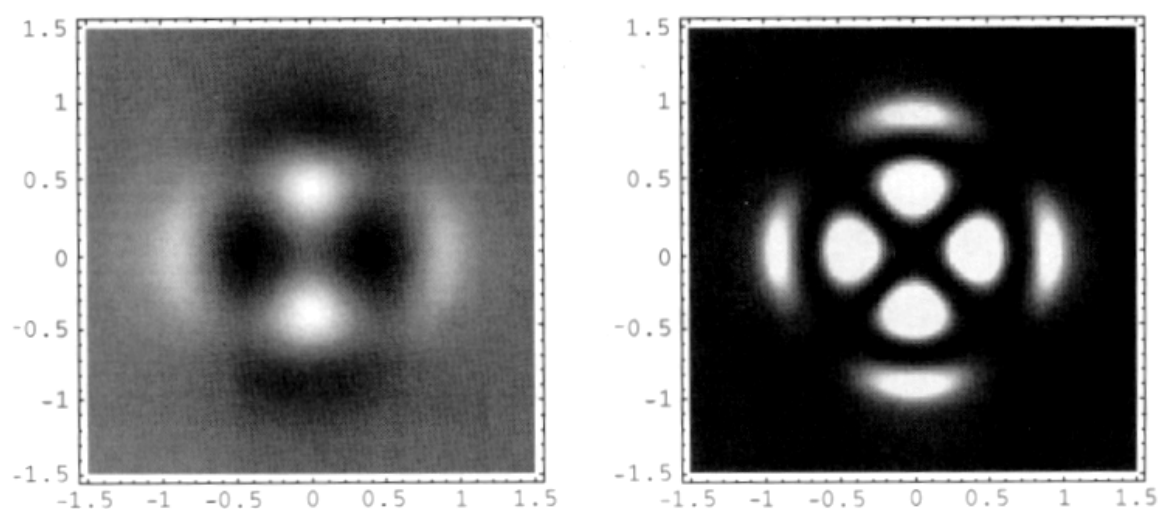
Počítačově modelované rozložení pole a intenzity pro LP₁₁ a LP₁₂ vidy v SI vláknu s $V = 8$. Rozložení pole je vlevo a intenzity vpravo. Odstíny šedé a bílé odpovídají otočení fáze při průchodu pole nulou.

Šíření vln ve vlnovodech se stupňovitým indexem lomu

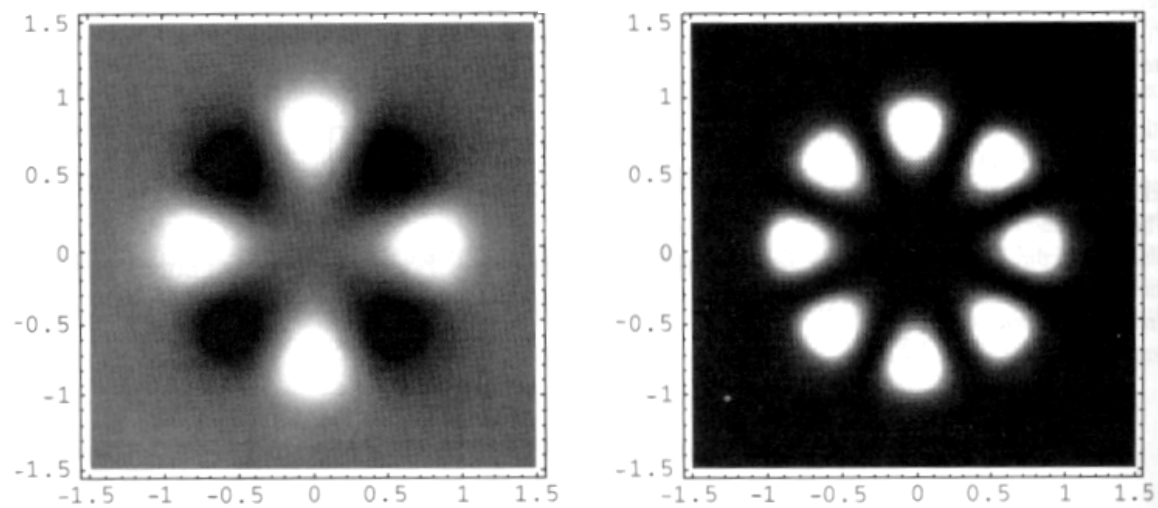
LP₂₁



LP₂₂



LP₄₁



Závěr:

- a) Vidy $l = 0$ jsou dvojnásobně degenerované, což odpovídá dvěma nezávislým stavům polarizace
- b) Vidy $l \geq 1$ jsou čtyřnásobně degenerované protože pro každý stav polarizace může záviset na ϕ ve tvaru $\cos l\phi$ nebo $\sin l\phi$.
- c) Počet nulových hodnot ve směru $\phi = 2l$
- d) Počet nulových hodnot v radiálním směru (s výjimkou $r = 0$) = $m - 1$

Pro $V \gg 1$, lze nalézt přibližný vztah pro počet vedených vidů

$$N \approx V^2 / 2 \quad (4.50)$$

Taková vlákna se nazývají multivídná (multimodová).

Příklad:

Pro typické multimodové SI vlákno s parametry

$$n_1 = 1,47 \quad n_2 = 1,46 \quad a = 25 \mu\text{m}$$

dostaneme pro $\lambda_0 = 0,8 \mu\text{m}$

$$V \approx 34$$

což odpovídá celkovému počtu 580 vidů.

POMĚRNÝ VÝKON PŘENÁŠENÝ VIDY V JÁDRU

- je jedním z důležitých parametrů optických vlnovodů. Výkon přenášený jádro je

$$P_{\text{jádro}} = \text{konst.} \int_0^a \int_0^{2\pi} |\psi|^2 r dr d\phi = \frac{2C}{J_l^2(U)} \int_0^a J_l^2\left(\frac{Ur}{a}\right) r dr \int_0^{2\pi} \cos^2 l\phi d\phi \quad (4.51)$$

nebo

$$P_{\text{jádro}} = C \frac{\pi a^2}{U^2} \frac{2}{J_l^2(U)} \int_0^U J_l^2(x) x dx = C \pi a^2 \left[1 - \frac{J_{l-1}(U) J_{l+1}(U)}{J_l^2(U)} \right] \quad (4.52)$$

kde C je konstanta.

V úpravě jsme využili standardních vlastností Besselových funkcí.

Podobně výkon přenášený plášťem

$$P_{\text{plášť}} = \text{konst.} \int_a^\infty \int_0^{2\pi} |\psi|^2 r dr d\phi = C \pi a^2 \left[\frac{K_{l-1}(W) K_{l+1}(W)}{K_l^2(W)} - 1 \right] \quad (4.53)$$

Celkový výkon je

$$P_{\text{celkový}} = P_{\text{jádro}} + P_{\text{plášť}} = C \pi a^2 \frac{V^2}{U^2} \frac{K_{l+1}(W) K_{l-1}(W)}{K_l^2(W)} \quad (4.54)$$

kde jsme využili rovnosti

$$\frac{U^2 J_{l+1}(U) J_{l-1}(U)}{J_l^2(U)} = -W^2 \frac{K_{l+1}(W) K_{l-1}(W)}{K_l^2(W)} \quad (4.55)$$

která vyplývá z charakteristických rovnic.

Poměrný výkon, který se šíří jádrem je

$$\eta = \frac{P_{\text{jádro}}}{P_{\text{celkový}}} = \frac{W^2}{V^2} + \frac{U^2}{V^2} \frac{K_l^2(W)}{K_{l+1}(W)K_{l-1}(W)} \quad (4.56)$$

Pokud se bude vid blížit ke kritické mezi, tj.

$$V \rightarrow V_c \quad W \rightarrow 0 \quad U \rightarrow V_c \quad (4.57)$$

pak při použití asymptotických hodnot $K_l(W)$ dostáváme

$$\eta \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{pro } l = 0 \text{ a } 1 \\ (l-1)/l & \text{pro } l \geq 2 \end{cases} \quad (4.58)$$

Na následujícím obrázku je zakreslen poměrný výkon pro některé vidy SI vlákna v jádru a plášti jako funkce V . Z obrázku je patrné, že konkrétní vid je koncentrován více v jádru pro větší hodnoty V , tj. dále od kritické meze.

