

Světlovody

Pavel Dvořák

Naprosto neúplná verze z 29. října 2008.

1 Úvod

1.1 Některé kroky ve vývoji světlovodů

Kdybychom si přáli uvěznit světlo, posloužil by nám jako návod Snellův zákon. Z něj mimo jiné vyplývá známá skutečnost o totálním odrazu – pokud světlo šířící se prostředím s indexem lomu n_1 dopadá na rozhraní s opticky řidším prostředím s indexem lomu n_2 pod úhlem větším než $\arcsin(n_2/n_1)$, odrazí se se stejnou intenzitou zpět a do opticky řidšího prostředí neprojde. Na tomto principu založený světlovod ukázal už John Tyndall (publikováno v r. 1870), který zavedl světlo do proudu kapaliny vytékající bočním otvorem z nádoby. Světlo bylo vedeno uvnitř proudu, přestože byl zakřivený. Analogickou strukturu mají i současná optická vlákna. Jsou tvořena dielektrickým jádrem, které je obklopeno pláštěm vyrobeným z dielektrika s indexem lomu menším než je index lomu jádra.

Velký zájem o světlovody se objevil až v šedesátých letech 20. století v souvislosti s objevem laseru. Zdroj koherentního optického záření nabízel možnost obrovsky rychlého přenosu dat, která ale narážela na vysoký útlum světla v tehdy dostupných optických materiálech. Za zlomový se považuje rok 1970, kdy se podařilo vyrobit optické vlákno s útlumem pod 20 dB/km (V takovémto vlákne došlo k útlumu na polovinu původní intenzity na vzdálenosti 150 m.) I další vývoj optické komunikace byl doprovázen prudkým poklesem útlumu v optických vláknech spojeným s posunem vlnové délky používaného záření k vyšším hodnotám (1550 nm), kde dochází k menšímu rozptylu záření. Dnešní křemenná vlákna dosahují útlumu menšího než 0,2 dB/km a s pomocí zesilovačů překlenují i tisícikilometrové vzdálenosti mezi kontinenty.

Dalším problémem, který je při optickém přenosu dat potřeba řešit, je disperze. Tvar optického signálu je ve světlovodu deformován, při použití pulzů dochází k jejich rozšiřování, případně i překryvu sousedních pulzů. Základním krokem v tomto směru bylo využití jednomodových vláken. Následoval posun vlnové délky z oblasti pod 900 nm k hodnotě 1300 nm, na které běžná křemenná vlákna vykazují minimální disperzi. Protože ale na vlnových délkách okolo 1550 nm lze dosáhnout menšího útlumu, byla vytvořena tzv. vlákna s posunutou disperzí. Ta mají profil indexu lomu jádra upravený tak, aby se oblast minimální disperze posunula právě do okolí vlnové délky 1550 nm. Nejdůslednějším potlačením disperze je její kompenzace pomocí nelineárních optických jevů. Vzniknou tak pulzy nazývané solitony, které se vláknem pohybují bez změny svého tvaru. Už v roce 1994 se tak podařilo přenést na vzdálenost 180 miliónů kilometrů signály rychlostí 10^{10} pulzů za sekundu.

Velkého urychlení přenosu dat optickými vlákny bylo dosaženo současným posíláním signálů na různých vlnových délkách. Pro rozvoj této technologie na dlouhých trasách mělo zásadní vliv vytvoření erbiem dotovaných vláknových zesilovačů. Jde o optická vlákna s příměsí erbia, která jsou čerpaná vhodným polovodičovým laserem a na základě stimulované emise zesilují procházející signál. Jejich výhodou je, že zesilují dostatečně širokou oblast záření s vlnovými délkami v okolí 1550 nm, která se používá pro optickou komuni-

kaci.

Kromě optických vláken se k přenosu světla využívají také rovinné světlovody. Jsou základem pro integrovanou optiku. Podobně jako integrované obvody minimalizují rozměry v elektronice, integrovaná optika se snaží umístit množství optických zařízení (sloužících např. pro rozbočování, slučování, modulaci, přepínání, spínání, polarizaci, fokusaci, generování a detekci) na jedinou desku (čip).

1.2 Využití světlovodů

- Přenos dat.
- Přenos osvětlení a obrazu, přenos záření. Optickými vlákny je možné nejenom osvětit těžko přístupná místa, ale také přenést obraz těchto míst – typickým příkladem je endoskop. Přenos záření ve spektroskopii, v ICCD kamerách ...
- Vláknové zesilovače záření a lasery.
- Měření různých fyzikálních veličin pomocí optických vláknových senzorů. Vhodně vyrobené vlákno může být citlivé na požadovanou veličinu, což lze využít k jejímu měření.
- Galvanické oddělení obvodů.

1.3 Výhody a nevýhody použití světlovodů

Výhody:

- Velká šířka přenosového pásma. Dnes jsou běžná optická vlákna přenášející 10 Gb/s na jediné vlnové délce na vzdálenosti přes 100 km. Možnosti tím ale zdaleka nejsou vyčerpány. Například pomocí solitonů je možné stejnou rychlostí posílat pulzy stovky milionů kilometrů daleko.
- Možnost posílat signály na několika vlnových délkách současně, tzv. vlnový multiplex (*wavelength division multiplex, WDM*). Dnes je vlákny běžně posíláno několik desítek vlnových délek zaráz, čímž se samozřejmě rychlost přenosu dat mnohonásobně zvyšuje. Ovšem jen samotná využitelná spektrální oblast v okolí 1550 nm má frekvenční rozsah 10^{12} - 10^{13} Hz, což je přibližně o tři řády víc než v celé radiofrekvenční a mikrovlnné oblasti. Počet kanálů tedy ještě bude možné podstatně zvýšit.
- Nízká latence, tedy rychlé šíření jednotlivých pulzů vláknem.
- Dobrá izolace signálu od okolního prostředí, data proto nejsou ohrožena rušením a jejich případné odposlouchávání by bylo obtížné.
- Bezpečnost – optický světlovod nemůže být zdrojem zkratů ani jisker. Může proto být bez problémů použit i v hořlavém a výbušném prostředí.
- Malý útlum v optických vláknech.

- Energetická nenáročnost – ve srovnání s elektickým přenosem signálu vyžadují opt. vlákna podstatně méně energie.
- Malé rozměry a hmotnost, dobrá pevnost optických kabelů.
- Galvanické oddělení vstupu a výstupu. Při nevodivém spojení vstupu a výstupu optického kabelu také odpadá problém s tzv. zemními smyčkami způsobenými rozdílným potenciálem spojovaných míst.

Nevýhody:

- Obtížné spojování optických prvků.
- Možnost křehnutí optických vláken za nízkých teplot.

1.4 Přenos světla atmosférou

Ve volném prostoru mimo atmosféru Země je možné vysílat světlo na obrovské vzdálenosti. Přenos světla atmosférou se ale v optoelektronice příliš neujal, zejména kvůli útlumu přenášeného záření. Za útlum zodpovídají:

- Molekulární absorpce (H_2O , CO_2 , ...) a absorpce na částicích aerosolů.
- Rozptyl na pevných a kapalných částicích přítomných v atmosféře. Ve srovnání s ním má rozptyl na molekulách nezanedbatelný vliv jen za jasných dnů a ve vyšších vrstvách atmosféry. Naopak za hustého sněžení je dohlednost v atmosféře mizerná.
- Ohyb a rozptyl na teplotních nehomogenitách atmosféry. Index lomu vzduchu je závislý na teplotě, která v atmosféře zdaleka není konstantní. Protože tyto nehomogenity svými rozměry přesahují průměr světelného svazku, dochází spíš než k rozptylu k odklonění celého svazku.

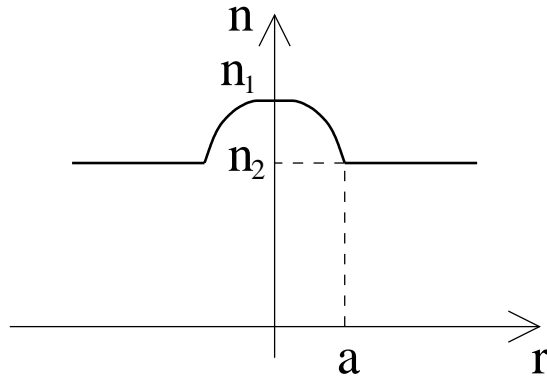
Další nevýhodou je, že bez použití zrcadel umožňuje atmosféra přenos informace pouze mezi místy s přímou viditelností. Turbulentní atmosféra a jas pozadí jsou dále zdroji šumu v detektorech.

2 Optická vlákna

2.1 Elektrické a magnetické pole v opt. vláknech

2.1.1 Obecné rovnice pro optická vlákna

Typické optické vlákno se skládá z jádra, které má maximální index lomu n_1 , a pláště s indexem lomu $n_2 < n_1$ (viz. obr. 1). Ke zjištění vlastností elektromagnetického pole ve vlákne použijeme Maxwellovy rovnice pro téměř homogenní dielektrikum bez volných nábojů



Obrázek 1: Příklad profilu indexu lomu optického vlákna.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &\approx 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\vec{B}_{,t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \varepsilon \vec{E}_{,t}\end{aligned}$$

ze kterých vyplývá

$$\Delta \psi = \frac{n^2}{c^2} \psi_{,tt} \quad (1)$$

kde ψ může označovat libovolnou složku vektoru \vec{E} nebo \vec{B} .

Řešení hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned}\psi &= \psi^0(r, \varphi) e^{i\omega t - \gamma z} \\ \gamma &= i\beta + \alpha \approx i\beta\end{aligned}$$

kde ω reprezentuje (kruhovou) frekvenci, β složku vlnového vektoru ve směru osy z a α útlum vlnění. Z uvedeného předpokladu vyplývají úpravy

$$\begin{aligned}\psi_{,t} &= i\omega \psi & \psi_{,z} &= -\gamma \psi \\ \psi_{,tt} &= -\omega^2 \psi & \psi_{,zz} &= \gamma^2 \psi\end{aligned}$$

které můžeme dosadit do rovnice (1) vyjádřené v cylindrických souřadnicích (viz kpt. 5.1, vztah (81)):

$$\psi_{,rr} + \frac{1}{r} \psi_{,r} + \frac{1}{r^2} \psi_{,\varphi\varphi} + \gamma^2 \psi = -\omega^2 \frac{n^2}{c^2} \psi$$

Dále označím $\mathcal{H}^2 \equiv (n\omega/c)^2 + \gamma^2 = k_0^2 n^2 + \gamma^2$, použijeme separaci proměnných $\psi^0 = R(r) \Phi(\varphi)$ a skutečnost, že funkce Φ je periodická s periodou 2π :

$$\begin{aligned}r^2 \frac{R_{,rr}}{R} + r \frac{R_{,r}}{R} + \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{\Phi} + r^2 \mathcal{H}^2 &= 0 \\ \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{\Phi} &= -l^2 \quad l \in \mathbb{Z} \\ r^2 R_{,rr} + r R_{,r} + (r^2 \mathcal{H}^2 - l^2) R &= 0\end{aligned} \quad (2)$$

Řešení, zatím neúplné, tedy dostává tvar

$$\psi = R(r) e^{i(l\varphi + \omega t) - \gamma z} \quad l \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

kde funkce $R(r)$ je řešením rovnice (2). Je vhodné poznamenat, že veličina \mathcal{H}^2 závisí na indexu lomu, je tedy v obecném případě také funkcí r , což rovnici (2) komplikuje. Důležitou skutečností je spojitost tečných složek intenzity elektrického a magnetického pole v celém vlákne, tedy i na hranici jádra a pláště.

Předpokládejme, že známe řešení rovnice (2) pro veličiny E_z a B_z . Pro výpočet ostatních složek vektorů \vec{E} a \vec{B} je možné použít pár Maxwellových rovnic obsahující rotace:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} E_{z,\varphi} + \gamma E_\varphi &= -i\omega B_r & \frac{1}{r} B_{z,\varphi} + \gamma B_\varphi &= i \frac{\omega n^2}{c^2} E_r \\ \gamma E_r + E_{z,r} &= i\omega B_\varphi & \gamma B_r + B_{z,r} &= -i \frac{\omega n^2}{c^2} E_\varphi \\ E_{\varphi,r} + \frac{1}{r} E_\varphi - \frac{1}{r} E_{r,\varphi} &= -i\omega B_z & B_{\varphi,r} + \frac{1}{r} B_\varphi - \frac{1}{r} B_{r,\varphi} &= i \frac{\omega n^2}{c^2} E_z \end{aligned}$$

Tyto rovnice mimo jiné ukazují, že E_z i B_z musí mít stejný řád l . Při výpočtu E_r lze postupovat:

$$\begin{aligned} i \frac{\omega n^2}{c^2} E_r &= \frac{1}{r} B_{z,\varphi} + \frac{\gamma}{i\omega} (\gamma E_r + E_{z,r}) \\ i E_r \left(\frac{\omega n^2}{c^2} + \frac{\gamma^2}{\omega} \right) &= \frac{1}{r} B_{z,\varphi} - i \frac{\gamma}{\omega} E_{z,r} \\ E_r (k_0^2 n^2 + \gamma^2) &= -\frac{i\omega}{r} B_{z,\varphi} - \gamma E_{z,r} \\ E_r &= -\frac{i\omega}{r \mathcal{H}^2} B_{z,\varphi} - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2} E_{z,r} \\ E_r &= \frac{\omega l}{r \mathcal{H}^2} B_z - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2} E_{z,r} \end{aligned} \quad (4)$$

Analogicky se odvodí:

$$E_\varphi = \frac{i\omega}{\mathcal{H}^2} B_{z,r} - \frac{il\gamma}{r \mathcal{H}^2} E_z \quad (5)$$

$$B_r = -\frac{\omega l n^2}{r \mathcal{H}^2 c^2} E_z - \frac{\gamma}{\mathcal{H}^2} B_{z,r} \quad (6)$$

$$B_\varphi = -\frac{i\omega n^2}{\mathcal{H}^2 c^2} E_{z,r} - \frac{il\gamma}{r \mathcal{H}^2} B_z \quad (7)$$

Všimněme si teď veličiny \mathcal{H}^2 , která vyjadřuje druhou mocninu velikosti průmětu vlnového vektoru do roviny kolmé k ose z . Označím $h^2 \equiv k_0^2 n_1^2 + \gamma^2 \approx k_0^2 n_1^2 - \beta^2$, $h_2^2 \equiv k_0^2 n_2^2 + \gamma^2 \approx k_0^2 n_2^2 - \beta^2$. Pro světlo šířící se vláknem mohou nastat dvě situace:

1. $h_2^2 > 0$, tj. $\beta^2 < n_2^2 k_0^2$. V této situaci se světlo může v plášti šířit i ve směru kolmém na osu z , dochází tedy ke ztrátám intenzity vyzařováním ven z vlákna. Tyto případy se nazývají **zářivé módy**. Mají spojité spektrum (vlnové číslo β zářivých módů může nabývat libovolné velikosti), velký útlum a pro vedení světla na větší vzdálenosti nejsou zajímavé.

2. $h_2^2 < 0 \wedge h^2 > 0$, tj. $n_1^2 k_0^2 > \beta^2 > n_2^2 k_0^2$. Nyní se světlo může šířit jádrem vlákna, ale do pláště může pronikat jen jako evanescentní vlna. Tyto případy se nazývají **vedené módy** a budou předmětem dalšího výkladu.

2.1.2 Vlákna se skokovou změnou indexu lomu

Nejjednodušším případem je vlákno se skokovou změnou indexu lomu (*step-index fiber, SI vlákno*), které má jádro s konstantním indexem lomu n_1 a plášť s konstantním indexem lomu n_2 . Když označíme

$$h^2 = k_0^2 n_1^2 + \gamma^2 \approx k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \quad (8)$$

$$q^2 = -(k_0^2 n_2^2 + \gamma^2) \approx \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \quad (9)$$

a poloměr jádra a , rozpadne se vztah (2) na dvě samostatné rovnice, z nichž jedna platí v jádře a druhá v plášti:

$$r^2 R_{,rr} + r R_{,r} + (r^2 h^2 - l^2) R = 0 \quad r \leq a \quad (10)$$

$$r^2 R_{,rr} + r R_{,r} - (r^2 q^2 + l^2) R = 0 \quad r \geq a \quad (11)$$

Rovnice (10) je Besselovou diferenciální rovnicí, jejímž řešením jsou tzv. Besselovy funkce prvního a druhého druhu řádu l (viz kpt. 5.2). (Pro puntičkáře – přesný tvar Besselovy rovnice dostaneme po substituci $s = hr$.) Protože Besselovy funkce druhého druhu divergují pro $r \rightarrow 0$, mohou reálné situaci v jádru optického vlákna odpovídat pouze Besselovy funkce prvního druhu.

Podobně rovnice (11) je tzv. modifikovanou Besselovou diferenciální rovnicí, jejíž řešení se nazývají modifikované Besselovy funkce. Zatímco modifikované Besselovy funkce prvního druhu divergují pro $r \rightarrow \infty$, modifikované Besselovy funkce druhého druhu klesají v této limitě k nule rychleji než exponenciála. Reálné elektromagnetické pole v plášti proto popisují pouze modifikované Besselovy funkce druhého druhu příslušného řádu l .

Použijeme-li nyní rovnice (4) – (7) a označení

$$\begin{aligned} \tau &= e^{i(l\varphi + \omega t) - \gamma z} \\ J'_l(x) &= \frac{d J_l(x)}{dx} \\ K'_l(x) &= \frac{d K_l(x)}{dx} \end{aligned}$$

kde $J_l(x)$ značí Besselovu funkci prvního druhu řádu l a $K_l(x)$ modifikovanou Besselovu funkci druhého druhu řádu l , dostaneme pro výsledné elektromagnetické pole vztahy (12):

$$r \leq a$$

$$r \geq a$$

$$\tau^{-1} E_z = A J_l(hr)$$

$$\tau^{-1} E_z = C K_l(qr)$$

$$r \leq a$$

$$r \geq a$$

$$\begin{aligned}
\tau^{-1}E_r &= B \frac{\omega l}{h^2} \frac{1}{r} J_l(hr) - A \frac{\gamma}{h} J'_l(hr) & \tau^{-1}E_r &= -D \frac{\omega l}{q^2} \frac{1}{r} K_l(qr) + C \frac{\gamma}{q} K'_l(qr) \\
\tau^{-1}E_\varphi &= -A \frac{i l \gamma}{h^2} \frac{1}{r} J_l(hr) + B \frac{i \omega}{h} J'_l(hr) & \tau^{-1}E_\varphi &= C \frac{i l \gamma}{q^2} \frac{1}{r} K_l(qr) - D \frac{i \omega}{q} K'_l(qr) \\
\tau^{-1}B_z &= B J_l(hr) & \tau^{-1}B_z &= D K_l(qr) \\
\tau^{-1}B_r &= -A \frac{\omega l}{h^2} \frac{n_1^2}{c^2} \frac{1}{r} J_l(hr) - B \frac{\gamma}{h} J'_l(hr) & \tau^{-1}B_r &= C \frac{\omega l}{q^2} \frac{n_2^2}{c^2} \frac{1}{r} K_l(qr) + D \frac{\gamma}{q} K'_l(qr) \\
\tau^{-1}B_\varphi &= -B \frac{i l \gamma}{h^2} \frac{1}{r} J_l(hr) - A \frac{i \omega}{h} \frac{n_1^2}{c^2} J'_l(hr) & \tau^{-1}B_\varphi &= D \frac{i l \gamma}{q^2} \frac{1}{r} K_l(qr) + C \frac{i \omega}{q} \frac{n_2^2}{c^2} K'_l(qr)
\end{aligned} \tag{12}$$

Ze spojitosti tečných složek (E_z , E_φ , B_z a B_φ) na rozhraní vyplývá soustava rovnic

$$A J_l(ha) = C K_l(qa) \tag{13}$$

$$B J_l(ha) = D K_l(qa) \tag{14}$$

$$A \frac{l \gamma}{(ha)^2} J_l(ha) - B \frac{\omega}{ha} J'_l(ha) = -C \frac{l \gamma}{(qa)^2} K_l(qa) + D \frac{\omega}{qa} K'_l(qa) \tag{15}$$

$$A \frac{\omega}{ha} \frac{n_1^2}{c^2} J'_l(ha) + B \frac{l \gamma}{(ha)^2} J_l(ha) = -C \frac{\omega}{qa} \frac{n_2^2}{c^2} K'_l(qa) - D \frac{l \gamma}{(qa)^2} K_l(qa) \tag{16}$$

kteřá má v triviálním případě řešení $A = B = C = D = 0$. Nás ovšem bude zajímat netriviální případ, ve kterém z rovnic (13) – (15) spočítáme poměry mezi konstantami A , B , C a D :

$$\frac{C}{A} = \frac{J_l(ha)}{K_l(qa)} \tag{17}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{l \gamma}{\omega} \left[\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2} \right] \left[\frac{J'_l(ha)}{ha J_l(ha)} + \frac{K'_l(qa)}{qa K_l(qa)} \right]^{-1} \tag{18}$$

$$\frac{D}{A} = \frac{J_l(ha) B}{K_l(qa) A} \tag{19}$$

Výrazné místo má rovnice (18), která vyjadřuje poměr mezi složkami magnetického a elektrického pole ve směru osy z . Protože $\gamma \approx i\beta$, jsou veličiny E_z a B_z fázově posunuty o $\pi/2$.

Aby soustava rovnic (13) – (16) mohla mít netriviální řešení, musí být determinant této soustavy nulový. Tato skutečnost vede k rovnici

$$\left[\frac{J'_l(ha)}{ha J_l(ha)} + \frac{K'_l(qa)}{qa K_l(qa)} \right] \left[\frac{n_1^2 J'_l(ha)}{ha J_l(ha)} + \frac{n_2^2 K'_l(qa)}{qa K_l(qa)} \right] = - \left[\frac{l \gamma c}{\omega} \left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2} \right) \right]^2 \tag{20}$$

Řešení pole v SI vláknech pro $l = 0$

Nejdřív budeme řešit jednodušší případ pro $l = 0$, kdy se rovnice (13) – (16) redukují na

$$A J_0(ha) = C K_0(qa) \quad (21)$$

$$B J_0(ha) = D K_0(qa) \quad (22)$$

$$-B \frac{1}{ha} J'_0(ha) = D \frac{1}{qa} K'_0(qa) \quad (23)$$

$$A \frac{n_1^2}{ha} J'_0(ha) = -C \frac{n_2^2}{qa} K'_0(qa) \quad (24)$$

Podělením rovnic (21) a (22) a rovnic (24) a (23) získáme vztahy $A/B = C/D$ a $An_1^2/B = Cn_2^2/D$, které mohou v nehomogenním prostředí ($n_1 \neq n_2$) být zároveň splněny pouze dvěma způsoby:

1. $A = C = 0$. Tyto případy se nazývají transversálně elektrické (TE) módy, protože jde o elektromagnetickou vlnu spoňující $E_z = 0$. Doplníme-li podmínku $A = C = 0$ do soustavy rovnic (12), zjistíme, že v TE módech jsou složky E_z , E_r a B_φ nulové, zatímco složky E_φ , B_z a B_r jsou všechny nenulové.

Protože rovnice (21) a (24) jsou v TE módech splněny automaticky, stačí už zaručit jen současnou platnost rovnic (22) a (23), což v netriviálním případě vede k

$$\frac{J'_0(ha)}{ha J_0(ha)} = -\frac{K'_0(qa)}{qa K_0(qa)} \quad (25)$$

Platnost rovnice (25) umožňuje, aby poměr B/A vypočítaný pomocí (18) dosáhl nekonečně velké hodnoty.

2. $B = D = 0$. Jde o tzv. transversálně magnetické (TM) módy. Složky E_φ , B_z a B_r zde jsou nulové narozdíl od složek E_z , E_r a B_φ .

Tentokrát jsou automaticky splněny rovnice (22) a (23). Ze vztahů (21) a (24) vyplývá

$$\frac{n_1^2 J'_0(ha)}{ha J_0(ha)} = -\frac{n_2^2 K'_0(qa)}{qa K_0(qa)} \quad (26)$$

Podmínky (25) a (26) ovšem vyplývají také z rovnice (20), jejíž pravá strana je nyní díky $l = 0$ nulová. Jak je vidět ze soustavy rovnic (12), optickým vláknem se nemůže šířit vlna, která by měla $E_z = 0$ i $B_z = 0$.

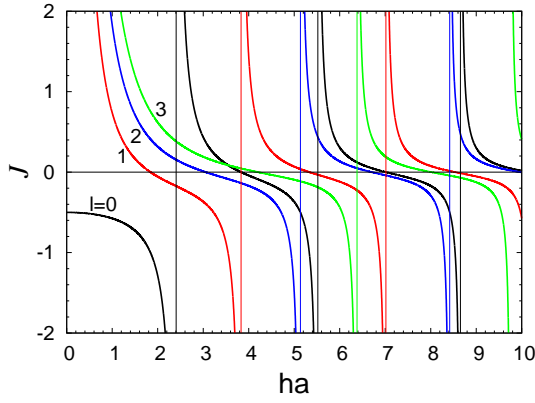
Díky (86) a (95) můžeme zlomky s Besselovými funkcemi vyjádřit bez jejich derivací:

$$\frac{J'_l(ha)}{ha J_l(ha)} = \pm \frac{l}{(ha)^2} \mp \frac{J_{l\pm 1}(ha)}{ha J_l(ha)} \quad (27)$$

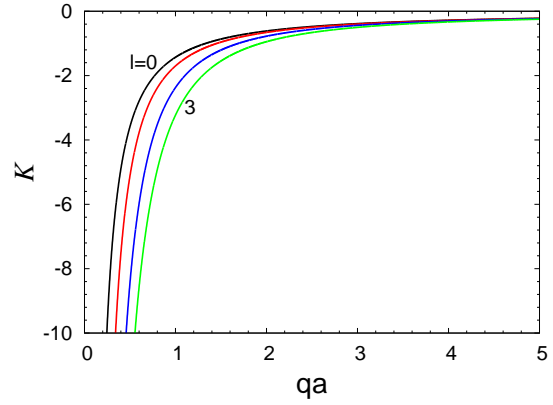
$$\frac{J'_0(ha)}{ha J_0(ha)} = -\frac{J_1(ha)}{ha J_0(ha)}$$

$$\frac{K'_l(qa)}{qa K_l(qa)} = \pm \frac{l}{(qa)^2} - \frac{K_{l\pm 1}(qa)}{qa K_l(qa)} \quad (28)$$

$$\frac{K'_0(qa)}{qa K_0(qa)} = -\frac{K_1(qa)}{qa K_0(qa)}$$



Obrázek 2: Výraz (27) pro řády $l = 0 - 3$. Tenkými svíslými čarami jsou znázorněny asymptoty v místech, kde výraz (27) diverguje.



Obrázek 3: Výraz (28) pro řády $l = 0$ (černě), 1 (červeně), 2 (modře) a 3 (zeleně).

Výrazy (27) a (28) pro řády $l = 0, 1, 2, 3$ jsou vyneseny v grafech 2 a 3. Je vidět, že zlomek (27) nabývá nekonečných hodnot v kořenech příslušné Besselovy funkce.

Aby bylo možné vyřešit rovnice (25) a (26), je nutné vyjádřit vztah mezi argumenty ha a qa . Z definice těchto veličin (8) a (9) vyplývá

$$(ha)^2 + (qa)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2)$$

Odmocninu pravé strany uvedené rovnice označím V . Tato bezrozměrná veličina

$$V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (29)$$

je přímo úměrná frekvenci vedeného světla, nazývá se normovaná frekvence a hraje důležitou roli v následujícím výkladu. Výraz $\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ se nazývá numerická apertura a jeho význam bude vysvětlen později. Pro součin qa tak získáváme vztah

$$qa = \sqrt{V^2 - (ha)^2} \quad (30)$$

V následujícím kroku už můžeme řešit upravenou rovnici (25)

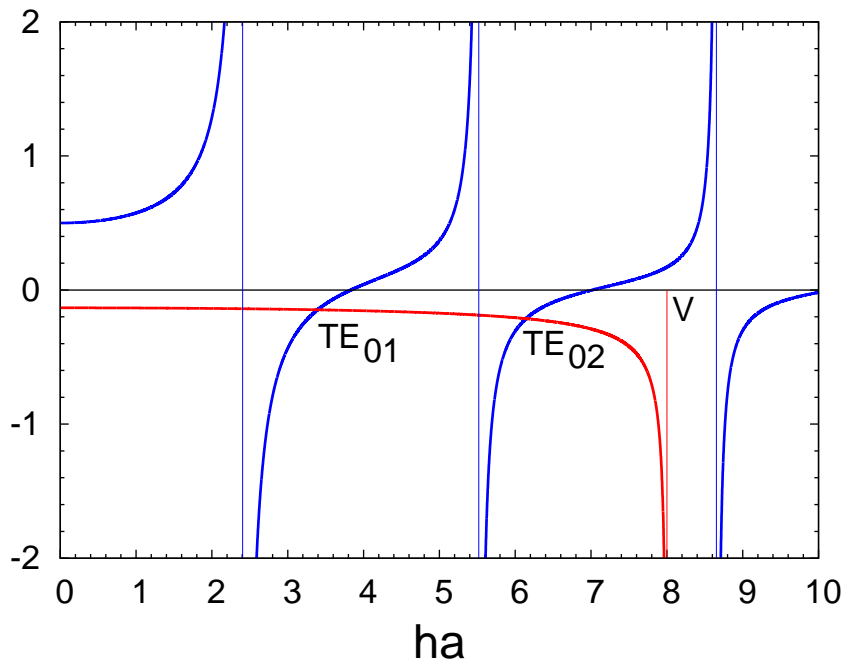
$$\frac{J_1(ha)}{ha J_0(ha)} = -\frac{K_1(qa)}{qa K_0(qa)} \quad (31)$$

pro TE módy, resp. téměř totožnou rovnici

$$\frac{J_1(ha)}{ha J_0(ha)} = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{K_1(qa)}{qa K_0(qa)} \quad (32)$$

pro TM módy. Grafické řešení je ukázáno na obr. 4, kde jsou modrou křivkou vyneseny levá a červenou křivkou pravá strana rovnice (31) pro zvolenou hodnotu $V = 8$ v závislosti na parametru ha . V pravé straně rovnice byl za výraz qa dosazen vztah (30). Průsečíky

modré a červené křivky odpovídají různým řešením rovnice (31). Je vidět, že počet řešení je závislý na velikosti normované frekvence V . Pokud normovaná frekvence bude menší než první kořen Besselovy funkce řádu 0 (přibližně 2,405), nebude existovat žádné řešení a vláknem se nebude šířit žádný mód odpovídající $l = 0$. Budeme-li zvyšovat hodnotu normované frekvence, pak kdykoliv V překročí kořen Besselovy funkce nultého řádu, objeví se nové řešení (nový mód). Protože jde o transversálně elektrické módy, označují se TE_{0m} , kde index 0 udává hodnotu l , zatímco druhý index m říká, o kolikáté řešení rovnice (31) jde. V našem případě, kdy bylo zvoleno $V = 8$, by se vláknem šířily dva TE módy s označením TE_{01} (odpovídající prvnímu – levému – průsečíku modré a červené křivky) a TE_{02} (odpovídající druhému průsečíku). Téměř shodné výsledky bychom získali při řešení rovnice (32) pro TM módy.



Obrázek 4: Levá (kreslená modře) a pravá (červeně) strana rovnice (31) pro $V = 8$.

Hodnota normované frekvence, při které se objeví nový mód, se označuje cut-off. Při této hodnotě platí pro nejvyšší mód $ha = V$ a tedy $qa = 0$, z čehož podle (9) vyplývá $\beta = n_2 k_0$. Takovýto mód má proto fázovou rychlost shodnou s vlněním, které by se šířilo pouze materiálem pláště vlákna. Při zvyšování normované frekvence vlnové číslo β daného módu v souladu s (9) poroste a v limitě $V \rightarrow \infty$ dosáhne hodnoty $\beta = n_1 k_0$. V této limitě naopak fázová rychlost sledovaného módu není ovlivněna materiálem pláště a odpovídá indexu lomu jádra vlákna.

Řešení pole v SI vláknech pro $l \neq 0$

Pro zjednodušení dalšího zápisu zavedeme označení výrazů (27), (28) a pravé strany rovnice (20):

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_l &\equiv \frac{J'_l(ha)}{ha J_l(ha)} \\ \mathcal{K}_l &\equiv \frac{K'_l(qa)}{qa K_l(qa)} \\ L &\equiv - \left[\frac{l\gamma c}{\omega} \left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2} \right) \right]^2\end{aligned}$$

(Protože γ je imaginární číslo, je L ve skutečnosti kladné.) Rovnice (20) s tímto označením získává tvar

$$(\mathcal{J}_l + \mathcal{K}_l) \cdot (n_1^2 \mathcal{J}_l + n_2^2 \mathcal{K}_l) = L$$

Protože $l \neq 0$ a pravá strana této rovnice už není nulová, vychází i poměr B/A ve výrazu (18) nenulový a konečný. Pro $l \neq 0$ proto neexistují transverzálně elektrické ani transverzálně magnetické módy, ale obě složky E_z a B_z mají nenulovou amplitudu.

Vzhledem k \mathcal{J}_l je (20) kvadratickou rovnicí se dvěma větvemi řešení

$$\mathcal{J}_l = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \mathcal{K}_l \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \mathcal{K}_l \right)^2 + \frac{L}{n_1^2}} \quad (33)$$

Když odmocninu v rovnici (33) přičteme, získáme řešení označovaná EH módy, naopak řešení s odečtením odmocniny vedou k tzv. HE módům. Ve srovnání s HE módy mají EH módy slabší složku B_z a silnější E_z . Tomu odpovídá i skutečnost, že kdybychom do rovnice (33) dosadili $l = 0$, získali bychom pro EH módy rovnici (32), zatímco pro HE módy rovnici (31). Pro označení jednotlivých módů se symbol EH nebo HE opět doplňuje dvěma indexy, z nichž první udává hodnotu l a druhý o kolikáté řešení příslušné větve rovnice (33) pro dané l se jedná.

Abychom získali názorná grafická řešení, je vhodné rovnici (33) upravit

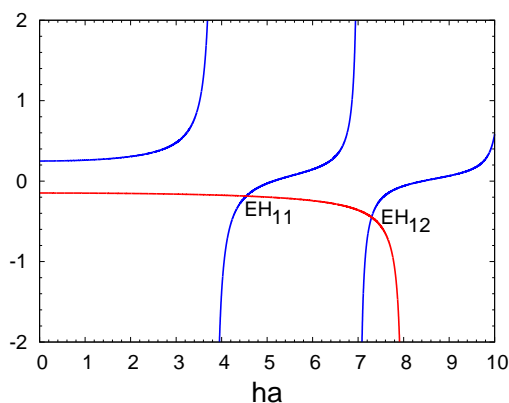
- pro EH módy na tvar

$$\frac{J_{l+1}(ha)}{ha J_l(ha)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \mathcal{K}_l + \frac{l}{(ha)^2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \mathcal{K}_l \right)^2 + \frac{L}{n_1^2}} \quad (34)$$

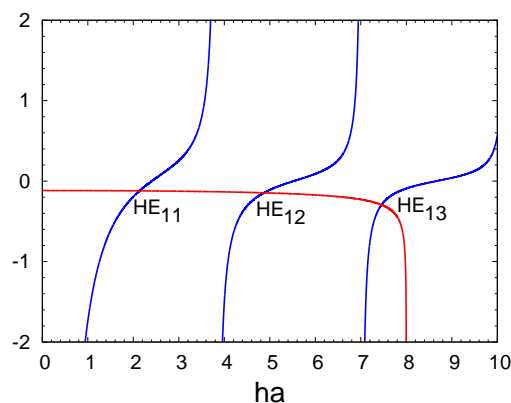
- a pro HE módy:

$$\frac{J_{l-1}(ha)}{ha J_l(ha)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \mathcal{K}_l + \frac{l}{(ha)^2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \mathcal{K}_l \right)^2 + \frac{L}{n_1^2}} \quad (35)$$

Slíbená grafická řešení jsou pro $l = 1$ vynesena v grafech 5 a 6. Levé strany rovnic (34) a (35) jsou zde vykresleny modře, pravé strany červeně. Za veličinu qa bylo opět dosazeno ze vztahu (30). Důležitá je skutečnost, že mód HE_{11} je jediným módem, který se může



Obrázek 5: Grafické řešení rovnice (34) pro $l = 1$ a $V = 8$. Za zvolených podmínek se levá (kreslená modře) a pravá (kreslená červeně) strana rovnice protínají ve dvou bodech odpovídajících dvěma EH_1 módům.



Obrázek 6: Grafické řešení rovnice (35) pro $l = 1$. Zvolená podmínka $V = 8$ vede ke třem HE_1 módům. Podstatná je skutečnost, že průsečík odpovídající módu HE_{11} existuje pro libovolnou hodnotu V .

šířit vláknem při libovolné hodnotě normované frekvence V (viz obr. 6). Pokud je tedy $V < 2,405$ (2,405 je přibližná hodnota prvního kořene Besselovy funkce nultého řádu, jde proto o cut-off módů TE_{01} a TM_{01}), bude se vláknem šířit jen jediný vedený mód HE_{11} . Takové vlákno se nazývá jednomodové a v některých směrech má velice výhodné vlastnosti. Při jeho výrobě se dostatečně nízké hodnoty normované frekvence pro danou vlnovou délku dosahuje malým rozdílem indexů lomu $n_1 - n_2$ a malým poloměrem jádra vlákna.

Grafická řešení rovnic (34) a (35) pro ostatní řády l nebo podmínky vedoucí k jiné normované frekvenci si můžete vykreslit např. pomocí funkce sestavené v programu matlab, kterou lze pod jménem JK12.m najít na ISu v adresáři učební materiály předmětu Optoelektronika (<http://www.is.muni.cz/el/1431/podzim2007/F7450/>).

Kompletní řešení elektromagnetického pole v SI vlákně je superpozicí polí odpovídajících jednotlivým vedeným módům i módům zářivým. Příspěvek zářivých módů ale můžeme v mnoha případech díky jejich velkému útlumu zanedbat.

Disperzní relace v SI vláknech

Z pozic průsečíků levé a pravé strany rovnice (34) nebo (35) můžeme pro jednotlivé módy určit veličinu h a pomocí (8) spočítat vlnové číslo β . Tímto postupem lze získat závislost $\beta(V)$, která je vzhledem k přímé úměrnosti mezi V a ω disperzní relací optického vlákna se skokovou změnou indexu lomu. Graf disperzní relace je na obr. Na uvedeném grafu je názorně vidět některé vlastnosti optických vláken:

- Pro nízké hodnoty normované frekvence je vláknem veden jediný mód HE_{11} . Roste-li normovaná frekvence, roste i počet vedených módů vlákna.

- Fázová rychlost (ω/β) jednotlivých módů s rostoucí hodnotou normované frekvence klesá od hodnoty c/n_2 (cut-off) k hodnotě c/n_1 (pro $V \rightarrow \infty$).
- Grupová rychlost ($d\omega/d\beta$) naopak ve většině případů roste. Výjimkou je např. základní mód HE_{11} , jehož grupová rychlost při zvyšování V nejprve klesá a teprve později roste. Módy vyšších řádů mají většinou menší grupovou rychlost než módy nižších řádů.

2.1.3 Lineárně polarizované módy v SI vláknech.

V některých vláknech, zejména jednomodových, je rozdíl mezi indexy lomu jádra a pláště malý, tedy

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1 \quad (36)$$

Takové prostředí se podobá homogennímu, ve kterém se mohou šířit jednoduché lineárně polarizované elektromagnetické vlny. Následující kapitola se proto za předpokladu (36) pokusí optickému vláknu vnutit lineárně polarizované řešení Maxwellových rovnic, což povede ke dvěma výhodám. Řešení by mělo být relativně snadné a umožní jednoduché zacházení s polarizovaným světlem.

V kpt. 2.1.2 jsme zjistili, že závislost složek elektrického a magnetického pole na vzdálenosti od osy vlákna popisují Besselovy funkce. Předpokládejme tedy, že vlna polarizovaná ve směru osy y má tvar

$$E_x = 0$$

$$E_y = \begin{cases} A J_l(hr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} & r \leq a \\ B K_l(qr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} & r \geq a \end{cases} \quad (37)$$

Tento předpoklad dosadíme do druhého páru Maxwellových rovnic:

$$\begin{aligned} i\beta E_y + E_{z,y} &= -i\omega B_x & i\beta B_y + B_{z,y} &= 0 \\ E_{z,x} &= i\omega B_y & B_{z,x} + i\beta B_x &= -i \frac{\omega n^2}{c^2} E_y \\ E_{y,x} &= -i\omega B_z & B_{y,x} - B_{x,y} &= i \frac{\omega n^2}{c^2} E_z \end{aligned}$$

Vzhledem k (36) má normovaná frekvence malou hodnotu a platí $\beta \gg h, q$ a $E_z \ll E_y$. Členy $E_{z,y}$ a $E_{z,x}$ se proto dají zanedbat, což vede k $B_y \approx 0$.

V následujícím kroku je třeba derivovat do Maxwellových rovnic dosazený vztah (37) podle x a y . Derivace podle x a y se převedou na derivace podle r a φ pomocí definic $r^2 = x^2 + y^2$ a $\varphi = \text{arctg}(y/x)$, ze kterých vyplývají rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{r^2}\end{aligned}$$

Dále se využijí vztahy pro Besselovy funkce

$$\begin{aligned}J'_l &= \frac{1}{2}(J_{l-1} - J_{l+1}) & K'_l &= -\frac{1}{2}(K_{l-1} + K_{l+1}) \\ \frac{l}{x} J_l(x) &= \frac{1}{2}[J_{l-1}(x) + J_{l+1}(x)] & \frac{l}{x} K_l(x) &= \frac{1}{2}[-K_{l-1}(x) + K_{l+1}(x)]\end{aligned}$$

a aproximace $\omega/\beta \approx c/n$.

Uvedeným postupem získáme řešení (38):

$$\begin{array}{ll} r \leq a & r \geq a \\ E_x = 0 & E_x = 0 \\ E_y = A J_l(hr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} & E_y = B K_l(qr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} \\ E_z = \frac{hA}{2\beta} [J_{l+1}(hr) e^{i(l+1)\varphi} + & E_z = \frac{qB}{2\beta} [K_{l+1}(qr) e^{i(l+1)\varphi} - \\ + J_{l-1}(hr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)} & - K_{l-1}(qr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)} \\ B_x = -\frac{A\beta}{\omega} J_l(hr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} & B_x = -\frac{B\beta}{\omega} K_l(qr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} \\ B_y \approx 0 & B_y \approx 0 \\ B_z = -\frac{i h A}{2\omega} [J_{l+1}(hr) e^{i(l+1)\varphi} - & B_z = -\frac{i q B}{2\omega} [K_{l+1}(qr) e^{i(l+1)\varphi} + \\ - J_{l-1}(hr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)} & + K_{l-1}(qr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)} \end{array} \quad (38)$$

Stejným postupem dostaneme pro vlnu polarizovanou ve směru osy x řešení (39):

$$\begin{array}{ll} r \leq a & r \geq a \\ E_x = A J_l(hr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} & E_x = B K_l(qr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} \\ E_y = 0 & E_y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
r \leq a & r \geq a \\
E_z = \frac{ihA}{2\beta} [J_{l+1}(hr) e^{i(l+1)\varphi} - & E_z = \frac{iqB}{2\beta} [K_{l+1}(qr) e^{i(l+1)\varphi} + \\
- J_{l-1}(hr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)} & + K_{l-1}(qr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)} \\
B_x \approx 0 & B_x \approx 0 \\
B_y = \frac{A\beta}{\omega} J_l(hr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} & B_y = \frac{B\beta}{\omega} K_l(qr) e^{i(l\varphi + \omega t - \beta z)} \\
B_z = \frac{hA}{2\omega} [J_{l+1}(hr) e^{i(l+1)\varphi} + & B_z = \frac{qB}{2\omega} [K_{l+1}(qr) e^{i(l+1)\varphi} - \\
+ J_{l-1}(hr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)} & - K_{l-1}(qr) e^{i(l-1)\varphi}] e^{i(\omega t - \beta z)}
\end{array} \tag{39}$$

Stejně jako v předchozí kapitole musí i nyní řešení splňovat podmínku spojitosti tečných složek intenzit na rozhraní jádra a pláště vlákna, což vede k rovnicím

$$A J_l(ha) = B K_l(qa) \tag{40}$$

$$ha \frac{J_{l+1}(ha)}{J_l(ha)} = qa \frac{K_{l+1}(qa)}{K_l(qa)} \tag{41}$$

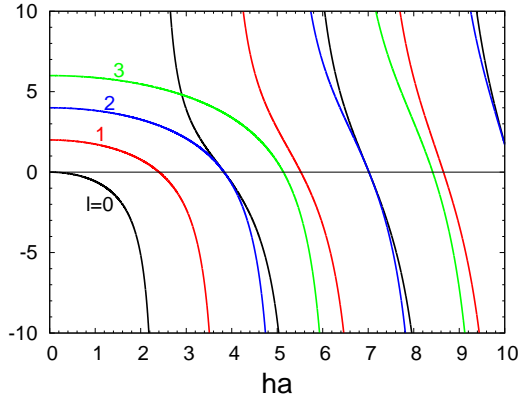
$$ha \frac{J_{l-1}(ha)}{J_l(ha)} = -qa \frac{K_{l-1}(qa)}{K_l(qa)} \tag{42}$$

S pomocí rovnic (86) a (95) lze snadno dokázat, že vztahy (41) a (42) jsou ekvivalentní a také že z nich spolu s rovnicí (40) vyplývá $Ah J'_l(ha) = Bq K'_l(qa)$, tedy hladkost řešení na hranici jádra a pláště. Hladkost řešení je v souladu s předpokladem (36).

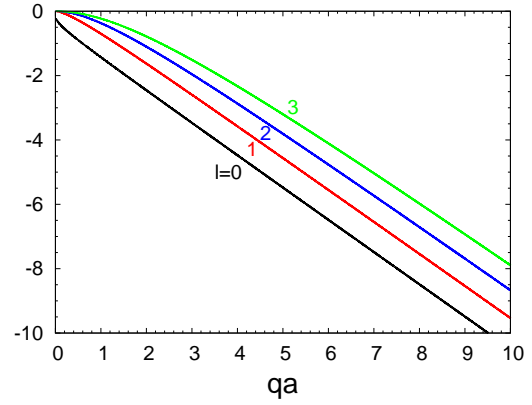
Rovnici (42) lze jednoduše řešit graficky. Na obr. 7 je vynesena levá strana této rovnice pro řády 0 – 3 a na obr. 8 její pravá strana. Vzhledem k (87) lze lehce ukázat, že levá strana rovnice (42) jde pro $ha \rightarrow 0$ k hodnotě $2l$. Pomocí (30) je opět možné vynést obě strany rovnice (42) do jednoho grafu, najít průsečíky odpovídající jednotlivým řešením a z jejich pozic určit vlnové číslo β . Ukázka grafického řešení pro $l = 0$ a normovanou frekvenci $V = 8$ je zobrazena v grafu 9. Jednotlivá řešení se označují symbolem LP_{lm} , kde m udává, o kolikáté řešení rovnice (42) příslušné danému l jde. Je zřejmé, že řešení odpovídající módu LP_{01} existuje pro libovolnou hodnotu normované frekvence, zatímco ostatní módy se ve vlákne mohou vyskytnout jen po překročení příslušného cut-off daného vztahem

$$J_{l-1}(V) = 0 \tag{43}$$

Vyřešením Maxwellových rovnic v optickém vlákne jsme mimo jiné získali prostorové rozložení intenzity světla ve vlákne. Příklady těchto rozložení, převzané z [2], jsou pro několik LP módů vyobrazeny na obr. 10–15. Prostorová souřadnice $[0;0]$ na obrázcích



Obrázek 7: Levá strana rovnice (42) pro řády $l = 0$ (černě), 1 (červeně), 2 (modře) a 3 (zeleně).



Obrázek 8: Pravá strana rovnice (42) pro řády $l = 0 - 3$.

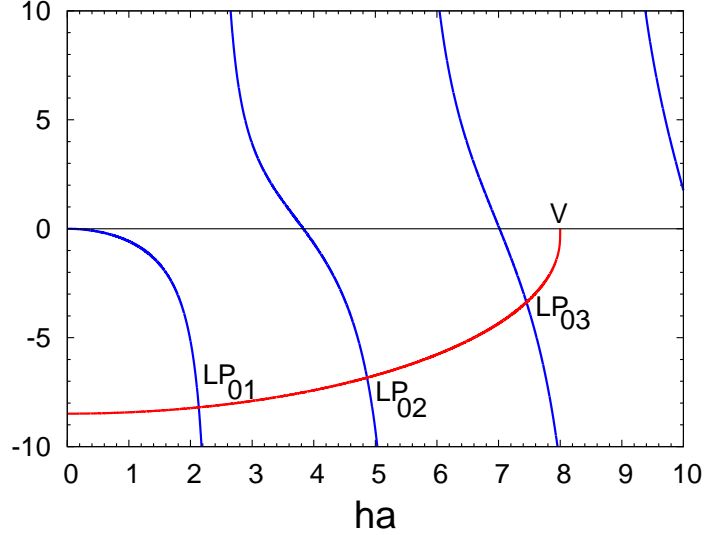
odpovídá ose vlákna, v jednotkové vzdálenosti od ní se nachází rozhraní jádra a pláště. Z obrázků je vidět, že zatímco LP módy s $l = 0$ mají alespoň lokální maximum na ose vlákna, je intenzita záření LP módů s $l \neq 0$ na ose vlákna nulová. Kdybychom se chtěli omezit na zjednodušenou představu paprskové optiky, názorně vysvětlíme existenci módů s nulovou intenzitou záření na ose vlákna pomocí tzv. kosých paprsků, viz kpt. 2.3.2. Dále je vidět, že hodnota l úzce souvisí se symetrií řešení vůči úhlu φ , zatímco z hodnoty druhého indexu konkrétního LP módu je možné vyčíst počet maxim intenzity na cestě mezi osou vlákna a jeho okrajem.

Z řešení získáme také závislost $\beta(V)$, tedy disperzní relaci jednotlivých LP módů. Ta je vynesena na obr. ... Stejně jako v kpt. 2.1.2 lze z grafu disperzní relace vyčíst informace o počtu módů a o jejich grupové i fázové rychlosti.

Na první pohled není vidět jasný vztah mezi přesným řešením vlnové rovnice v optickém vlákne, tedy EH a HE módy, a přibližným řešením ve formě LP módů. Počet módů souhlasí, neboť dvě větve rovnice (33) nahradí v případě LP módů dvě možné polarizace. Je nápadné, že disperzní relace módů $\text{EH}_{l-1,m}$ a $\text{HE}_{l+1,m}$ téměř splývají (zcela splývají v limitě $n_1 \rightarrow n_2$) a že jsou podobné disperzní relaci módu $\text{LP}_{l,m}$. Skutečně lze ukázat, že $\text{LP}_{l,m}$ módy jsou lineární kombinací módů $\text{EH}_{l-1,m}$ a $\text{HE}_{l+1,m}$.

Počet vedených módů v SI vlákne

Pro nízké hodnoty normované frekvence $V < 2,405$ (tj. menší než první kořen Besselovy rovnice nultého řádu) se vláknem může šířit pouze mód LP_{01} . Vždy když normovaná frekvence překročí nějaký kořen Besselovy funkce, tedy cut-off daný rovnicí (43), může být ve vlákne vybuzen nový vedený mód. Pro malé hodnoty normované frekvence lze počet módů přesně spočítat např. pohledem na graf disperzních relací, pro velké hodnoty V lze použít následující aproximace.



Obrázek 9: Levá (kreslená modře) a pravá (červeně) strana rovnice (42) pro $l = 0$ a $V = 8$.

Pro velké hodnoty normované frekvence lze využít limity (88), rovnici (43) přepsat na

$$V_{lm} - \frac{(l-1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = m\pi + \frac{\pi}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

a po zanedbání $\pi/4$ získat podmínku pro cut-off

$$V_{lm} \approx \frac{l\pi}{2} + m\pi \quad (44)$$

Pro danou normovanou frekvenci V se tedy vláknem mohou šířit všechny módy splňující $V_{lm} \leq V$, tedy módy ležící uvnitř plochy trojúhelníku nakresleného na obr. 16. Protože každému bodu odpovídají dvě řešení pro kladnou a zápornou hodnotu l a dvě různé polarizace, je výsledný počet možných módů přibližně dán výrazem

$$N(V) \approx 4 \left(\frac{V}{\pi} \right)^2 \quad (45)$$

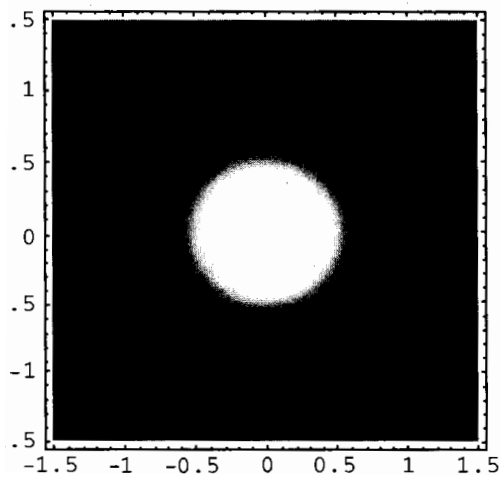
Výkon přenášený pláštěm a jádrem

Intenzitu světla přenášeného vláknem získáme výpočtem z -ové složky Poyntingova vektoru

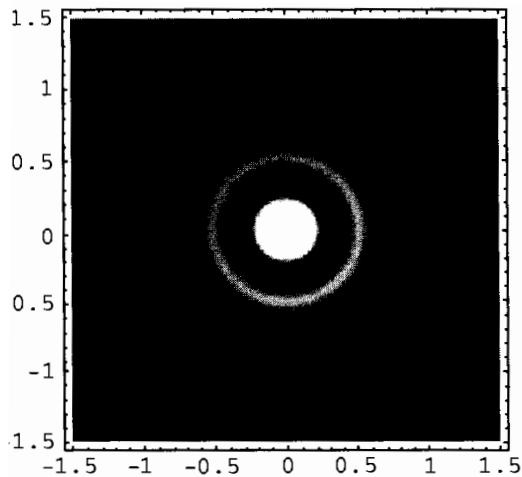
$$S_z = \frac{1}{2} \text{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) \quad (46)$$

což s použitím (38) nebo (39) vede k

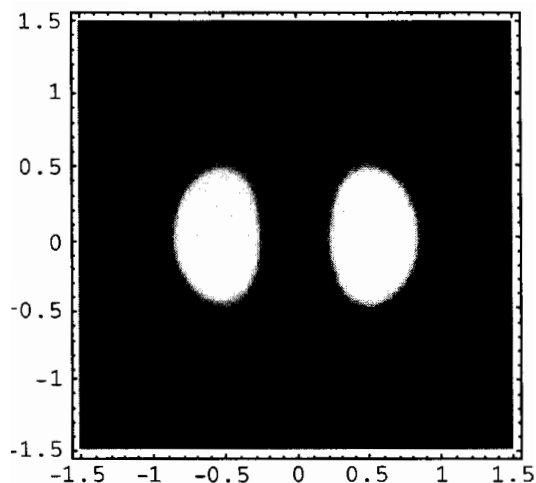
$$S_z = \begin{cases} \frac{\beta}{2\omega\mu} |A|^2 J_l^2(hr) & r \leq a \\ \frac{\beta}{2\omega\mu} |B|^2 K_l^2(qr) & r \geq a \end{cases} \quad (47)$$



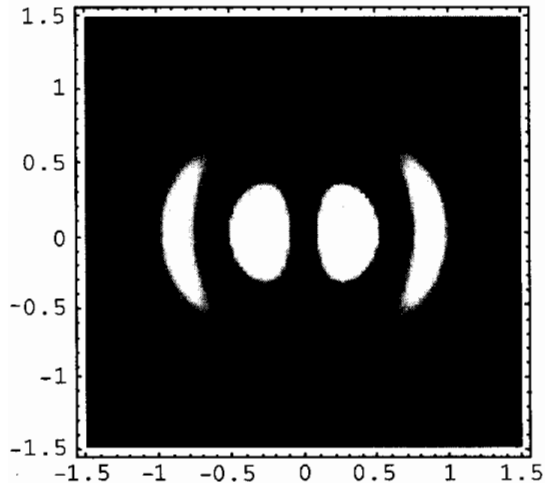
Obrázek 10: Rozložení intenzity světla v optickém vlákně odpovídající modu LP_{01} .



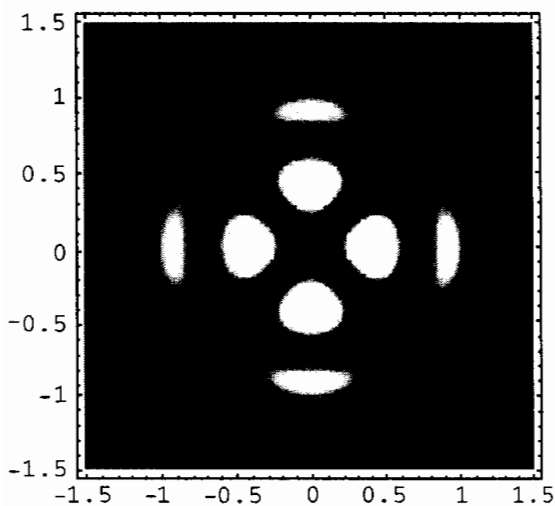
Obrázek 11: Rozložení intenzity světla v optickém vlákně odpovídající modu LP_{03} . Špatný obrázek!!!



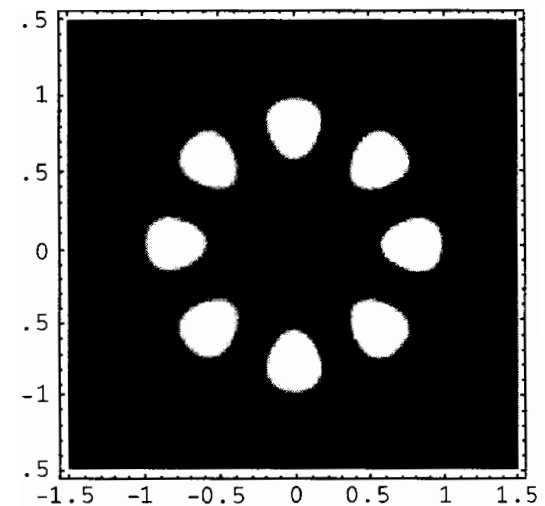
Obrázek 12: Mód LP_{11} .



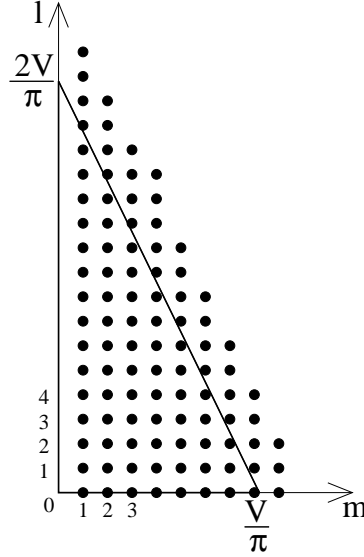
Obrázek 13: Mód LP_{12} .



Obrázek 14: Mód LP_{22} .



Obrázek 15: Mód LP_{41} . Obr. 10 – 15 byly



Obrázek 16: Vedené módy splňují podmínku $V \geq l\pi/2 + m\pi$ a leží proto uvnitř plochy znázorněného trojúhelníku. Každému bodu odpovídají čtyři módy lišící se polarizací a znaménkem l .

Pomocí vztahů pro integraci Besselových funkcí a podmínek (40)–(42) dostaneme pro výkon přenášený jádrem (P_{core}), pláštěm (P_{clad}) a celým vláknem (P)

$$P_{\text{core}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr r S_z = \frac{\beta a^2 \pi}{2\omega\mu} |A|^2 [J_l^2(ha) - J_{l-1}(ha) J_{l+1}(ha)] \quad (48)$$

$$P_{\text{clad}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^\infty dr r S_z = -\frac{\beta a^2 \pi}{2\omega\mu} |A|^2 \left[J_l^2(ha) + \left(\frac{h}{q}\right)^2 J_{l-1}(ha) J_{l+1}(ha) \right] \quad (49)$$

$$P = P_{\text{core}} + P_{\text{clad}} = -\frac{\beta a^2 \pi}{2\omega\mu} |A|^2 \left(1 + \frac{h^2}{q^2} \right) J_{l-1}(ha) J_{l+1}(ha) \quad (50)$$

Názorný je podíl výkonu přenášeného pláštěm

$$\frac{P_{\text{clad}}}{P} = \frac{1}{V^2} \left[(ha)^2 + (qa)^2 \frac{J_l^2(ha)}{J_{l-1}(ha) J_{l+1}(ha)} \right], \quad (51)$$

který je pro množství LP módů vyneseno v grafu Je vidět, že se zvyšující se normovanou frekvencí se jednotlivé módy stahují do jádra a že mód nejlépe uzavřený v jádře je LP_{01} . Průběh křivek v grafu ... souhlasí s výše popsaným chováním fázové rychlosti. Když normovaná frekvence odpovídá cut-off nějakého módu, je tento mód plně veden pláštěm vlákna, a proto jeho fázová rychlost odpovídá materiálu pláště. S růstem normované frekvence se záření daného módu soustřeďuje do jádra, takže i jeho fázová rychlost je stále více ovlivněna materiálem jádra (které má vyšší index lomu než plášť) až v limitě $V \rightarrow \infty$ je záření sledovaného módu zcela uzavřeno v jádře a fázová rychlost je určena pouze materiálem jádra.

V praxi se u jednomodových vláken jako měřítko uzavření záření do blízkého okolí osy jádra často uvádí tzv. parametr MFD (*mode field diameter*, průměr vidového pole). Jedná se o průměr oblasti, ve které je intenzita záření větší nebo rovna 0,135-násobku (tj. $1/e^2$) maximální intenzity záření (na ose vlákna).

2.2 Útlum záření v optických vláknech

Tato kapitola se zabývá útlumem záření v křemenných vláknech, protože pouze ta jsou dnes používána při dálkové optické komunikaci. Spektrální závislost útlumu v křemenném vlákně ukazuje obr. Útlum je způsoben absorpcí a rozptylem.

2.2.1 Absorpční ztráty

K pohlcování záření vedeného optickým vláknem dochází díky absorpci v křemenném skle i vlivem příměsí. Protože na dálkových přenosech se používá především infračervené záření, nemá ultrafialový absorpční pás SiO_2 na přenos záření prakticky žádný vliv. Výrazným omezujícím faktorem je ale absorpce křemenem v infračervené oblasti, která se začíná výrazně projevovat při vlnových délkách nad $1,6 \mu\text{m}$.

Důvodem, proč do r. 1970 nebylo prakticky možné optická vlákna používat, je výrazná absorpce příměsí. Např. jen 1 ppm iontů Fe^{2+} způsobuje na vlnové délce svého absorpčního píku $1,1 \mu\text{m}$ útlum $0,68 \text{ dB/km}$ nebo 1 ppm iontů Cu^{2+} na 850 nm útlum $1,1 \text{ dB/km}$. Při výrobě opt. vláken je proto nutné vyloučit kontaminaci materiálu vlákna absorbuujícími příměsími.

Další problematickou látkou je voda, které je poměrně obtížné zabránit ve vniknutí do vláken, ať už při výrobě nebo během používání vlákna. Voda vždy obsahuje aniont OH^- , který má absorpční píky m.j. na vlnových délkách $1,38 \mu\text{m}$ a $1,24 \mu\text{m}$, které jsou při koncentraci 1 ppm zodpovědné za útlum $4,0 \text{ dB/km}$ a $2,0 \text{ dB/km}$, respectively. Pro vlnové délky v blízkosti IČ absorpčního pásu tak zůstávají v křemenných vláknech pouze dvě vysoce propustná spektrální okna, a to kolem vlnových délek $1,55$ a $1,3 \mu\text{m}$. Na vlnové délce $1,55 \mu\text{m}$ se dosahuje útlumu pod $0,2 \text{ dB/km}$, který je způsoben zejména rozptylem záření.

2.2.2 Zářivé ztráty

Za rozptyl záření v optických vláknech je zodpovědný zejména Rayleighův rozptyl, tedy rozptyl na nehomogenitách s rozměry menšími než je vlnová délka světla. Tentýž jev způsobuje např. modré zbarvení oblohy. Útlum daný Rayleighovým rozptylem (α_R) klesá se čtvrtou mocninou vlnové délky

$$\alpha_R(\lambda) = \alpha_R(\lambda_0) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^4, \quad (52)$$

pro křemenná vlákna dosahuje na $1,55 \mu\text{m}$ hodnoty $0,15 \text{ dB/km}$ a v druhém absorpčním okně na $1,3 \mu\text{m}$ hodnoty $0,31 \text{ dB/km}$. Kvůli Rayleighovu rozptylem je snaha vyvinout op-

tická vlákna z materiálů, které by měly hranu IČ absorpčního pásu posunutou do vyšších vlnových délek. Jsou proto zkoumána fluoridová skla, která absorbují až kolem $50\ \mu\text{m}$. Posun vlnové délky procházejícího záření nad $2\ \mu\text{m}$ by totiž potlačením Rayleighova rozptylu snížil útlum ve vláknech na hodnoty pod $0,01\ \text{dB/km}$ a umožnil tak konstruovat optické trasy se zesilovači po více než $1000\ \text{km}$. K rozptylu přispívají i příměsi používané k nastavení správného indexu lomu skla (např. GeO_2 , P_2O_5). Jednomodová vlákna tak mají menší útlum než vlákna mnohomodová nejenom díky nejkratší dráze, kterou v nich paprsek musí projít, ale také díky nízkému dopování jádra příměsemi. (Index lomu jádra jednomodového vlákna totiž nesmí být o mnoho větší než index lomu pláště, aby normovaná frekvence byla dostatečně nízká a vláknem se mohl šířit pouze jeden mód.) Stojí za zmínku, že jednotlivé módy ve vícemodovém vlákně se liší i svojí hodnotou útlumu.

K vyzařování z vlákna dochází také vlivem nedokonalostí vlákna, např. geometrickými nepřesnostmi rozhraní jádra a pláště, ať už pocházejícími z výroby nebo vyvolanými vnějším tlakem. Zdrojem ztrát jsou dále spoje vláken a ohyby vláken.

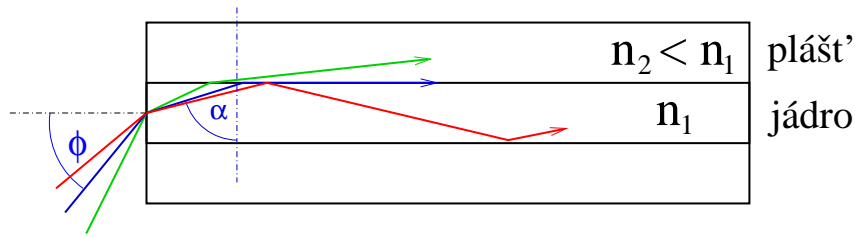
2.2.3 Zesilovače záření

Při přenosu záření optickými vlákny na vzdálenosti větší než přibližně $100\ \text{km}$ je nutné utlumené záření zesílit. Nejstarší možností je použít tzv. opakovač – přeměnit optický signál na elektrický a do navazujícího úseku optického kabelu poslat nový, zesílený optický signál. Výhodou opakovačů je, že jednoduše umožňují opravit tvar pulzů a odstranit tak vliv disperze. Mezi jejich zásadní nevýhody patří např. nemožnost zesilovat jedním opakovačem více kanálů WDM (vlnových délek) zároveň. Elegantnější řešení útlumu nabízejí zesilovače, při kterých signál nemusí být vůbec vyvázan z optického vlákna.

Takovými zesilovači jsou v první řadě vlákna dopovaná prvky vzácných zemin, zejména erbiem (EDFA, *erbium-doped fiber amplifiers*), které umožňuje zesilovat záření s vlnovými délkami blízkými $1550\ \text{nm}$, příp. ytterbiem, praseodymem, thuliem nebo jinými prvky. Princip EDFA spočívá ve stimulované emisi excitovaných iontů Er^{3+} vyvolané procházejícím signálem. Ionty Er^{3+} jsou do excitovaného stavu vybuzené absorpcí záření s vlnovou délkou $980\ \text{nm}$ nebo $1480\ \text{nm}$. To je do vlákna ze zdroje (laserové diody) přivedeno pomocí vhodného vazebního členu, který naváže čerpací záření do vlákna, jímž prochází zesilovaný signál, ale nevyváže z něj signály na vlnové délce kolem $1550\ \text{nm}$. EDFA zesilují záření mezi 1525 a $1570\ \text{nm}$ s maximálním ziskem na vlnové délce blízké $1530\ \text{nm}$.

Druhou možností, jak optický signál zesílit přímo ve vlákně, je využít stimulovaného Ramanova rozptylu. Do vlákna je opět navázáno čerpací záření s vlnovou délkou menší než je vlnová délka zesilovaného signálu. Při stimulovaném Ramanově rozptylu odevzdá foton čerpacího záření část své energie materiálu vlákna ve formě fononu a zbytek energie si odnáší nový foton, jenž je ve stejném stavu jako záření zesilovaného signálu, které stimulovaný rozptyl podnítilo.

K zesílení optického signálu lze použít také stimulovanou emisi záření v polovodičové diodě, podobně jako v polovodičových laserech. Polovodiče běžně zesilují záření ve spek-



Obrázek 17: Trajektorie meridiánových paprsků v SI vlákně. Zeleně označený paprsek se na rozhraní jádra a pláště láme a je rychle vyzářen ven z vlákna, červeně označený paprsek se totálně odráží a je vláknem veden. $\sin \phi$ se nazývá numerická apertura vlákna.

trálním rozsahu 850 až 1600 nm, ale kvůli množství šumu, malému zisku a značné nelinearitě se na dálkových datových linkách nepoužívají.

2.3 Paprsková optika

2.3.1 Numerická apertura

Zobrazením dráhy paprsků v optickém vlákně získáme důležitou veličinu nazývanou numerická apertura vlákna, běžně označovanou NA . Jde o sinus maximálního úhlu, pod kterým mohou paprsky dopadnout na vstup vlákna, aby ještě došlo na rozhraní jádra a pláště k totálnímu odrazu (viz obr. 17) a aby tedy paprsky byly vláknem vedeny. Numerická apertura proto označuje, z jak velké oblasti je vlákno schopné přijímat záření.

Hodnotu numerické aperture lze jednoduše spočítat. Maximální úhel dopadu paprsku na rozhraní jádra a pláště, pro který ještě dojde k totálnímu odrazu, je

$$\alpha = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (53)$$

Odpovídající vstupní úhel ϕ spočítáme ze Snellova zákona

$$\sin \phi = n_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = n_1 \cos \alpha$$

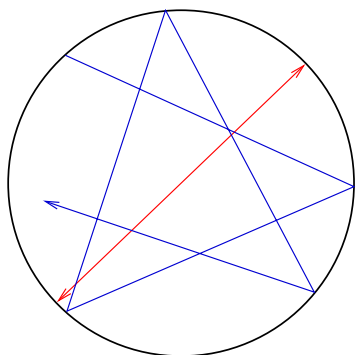
a s pomocí $n_1 \sin \alpha = n_2$ dostáváme pro hodnotu numerické aperture

$$NA = \sin \phi = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad (54)$$

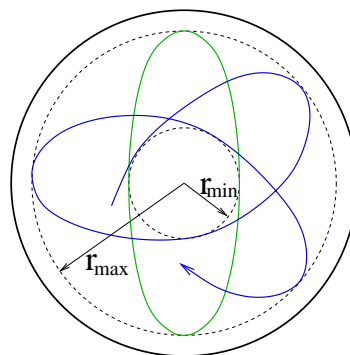
tedy výraz, který už vystupoval v definici normované frekvence (29) a na kterém mimo jiné závisí počet vedených módů.

2.3.2 Klasifikace paprsků

Paprsky v optickém vlákně můžeme rozdělit na ty, které se na rozhraní jádro – plášť lámou a jsou z vlákna rychle vyzářeny, a na vedené paprsky. Třetí speciální kapitolu představuje záření, které z jádra uniká tunelováním, jež je umožněno buď přítomností blízkého prostředí s indexem lomu větším než je index lomu pláště (např. blízký světlovod),



Obrázek 18: Průmět trajektorie meridiánového (červeně) a kosého (modře) paprsku v SI vlákně do roviny xy . Černý kruh označuje hranici jádra a pláště.



Obrázek 19: Průmět trajektorie kosých paprsků v obecném gradientním (modrá křivka) a parabolickém (zelená elipsa) vlákně do roviny xy .

nebo ohybem vlákna. Dráha, kterou tunelující se záření urazí uvnitř vlákna než je vyvázáno ven, může nabývat velmi různých hodnot, pouze několik milimetrů nebo i kilometrové vzdálenosti.

Další dělení paprsků je založeno na tom, zda paprsek prochází osou vlákna:

1. **Meridiánové** paprsky jsou ty, které během letu vlákem pravidelně procházejí jeho osou. Jde-li o vedené paprsky, pak v cylindricky symetrickém vlákně je průmětem jejich dráhy do roviny xy úsečka. Tato úsečka končí v SI vláknech na rozhraní jádra a pláště. V gradientních vláknech, kde index lomu vlákna není konstantní (obr. 1), končí uvnitř jádra ve vzdálenosti od osy dané hodnotou invariantu I_1 (kpt. 2.3.3). Speciálním případem gradientních vláken jsou tzv. parabolická vlákna (kpt. 2.4.1). Lze ukázat, že trajektorie meridiánového paprsku je v nich popsána rovnicí

$$r(z) \propto \cos \left[\frac{NA}{aI_1} (z - z_1) \right]$$

2. **Kosé** (mimoosé) paprsky naopak nikde osu vlákna neprotínají, jejich vzdálenost od osy osciluje mezi danou minimální a maximální hodnotou. Narozdíl od meridiánových paprsků je invariant I_2 (kpt. 2.3.3) kosých paprsků nenulový. Průmět trajektorie kosých paprsků do roviny xy je nakreslen na obr. 18 a 19. Kosé paprsky názorně zdůvodňují existenci modů s nulovou intenzitou na ose vlákna.

V parabolických vláknech má průmět trajektorie do roviny xy tvar elipsy. Speciálními případy elipsy jsou úsečka protínající osu jádra, která odpovídá meridiánovému paprsku, a kružnice odpovídající paprsku pohybujícímu se po šroubovici s konstantním poloměrem. Závislost $r(z)$ popisující trajektorii paprsku v parabolickém vlákně má tvar

$$r^2 = C_1 + C_2 \cos \left[\frac{2NA}{aI_1} (z - z_1) \right] \quad C_2 \leq C_1 \quad (55)$$

Případ $C_1 = C_2$ odpovídá meridiánovému paprsku, případ $C_2 = 0$ popisuje zmíněnou šroubovici s konstantním poloměrem.

2.3.3 Invarianty šíření paprsku v optickém vlákně

Z válcové symetrie optického vlákna vyplývá existence dvou invariantů, tedy veličin, které se během letu paprsku vláknem zachovávají. První invariant I_1 lze jednoduše odvodit z paprskové rovnice ve tvaru (101). Protože index lomu se ve směru osy z nemění, platí

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) &= 0 \\ n \frac{dz}{ds} &= \text{konst.}\end{aligned}$$

Označíme-li úhel mezi vlnovým vektorem a osou vlákna ϑ , získáme tvar prvního invariantu

$$I_1 = n \cos \vartheta \quad (56)$$

Je logické, že mezi invariantem I_1 a vlnovým číslem β je úzký vztah

$$\beta = k_0 I_1, \quad (57)$$

neboť vlnové číslo je také invariantem řešení Maxwellových rovnic ve vlákně (3).

Druhý invariant I_2 můžeme odvodit podobným způsobem, jakým je v kpt. 5.3 odvozena paprsková rovnice. Vyjádříme veličinu L definovanou výrazem (99) v cylindrických souřadnicích

$$L = n \sqrt{1 + \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2},$$

kde

$$\dot{r} = \frac{dr}{dz} \quad \text{a} \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dz},$$

a v rovnici analogické vztahu (100) využijeme válcové symetrie vlákna ($\partial n / \partial \varphi = 0$):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= 0 \\ \frac{nr^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}} &= \text{konst.}\end{aligned}$$

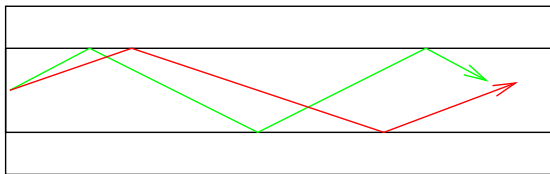
Protože $ds/dz = \sqrt{1 + \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}$, upravíme na

$$I_1 r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (58)$$

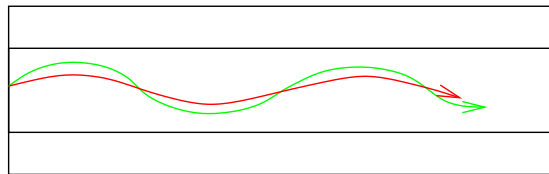
a aby i druhý invariant byl bezrozměrný, definujeme v souladu s literaturou

$$I_2 = I_1 \frac{r^2}{a} \frac{d\varphi}{dz}. \quad (59)$$

Pro meridiánové paprsky je $I_2 = 0$.



Obrázek 20: Trajektorie paprsků v SI vlákně. Zeleně označený paprsek musí překonat delší dráhu než červeně označený paprsek.



Obrázek 21: Trajektorie paprsků v gradientním vlákně. Zeleně označený paprsek se pohybuje v prostředí s nižším indexem lomu.

Existence invariantních výrazů pomůže spočítat trajektorii paprsku v optickém vlákně. Protože

$$I_1 = \frac{n(r)}{\sqrt{1 + \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}}$$

získáme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \pm \frac{\sqrt{f}}{I_1} \\ f &\equiv n^2(r) - I_1^2 - I_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \end{aligned} \quad (60)$$

jejímž řešením je kýžená závislost $r(z)$. V následujícím kroku je možné řešením diferenciální rovnice

$$\dot{\varphi} = \frac{aI_2}{r^2I_1} \quad (61)$$

získat závislost φ na r nebo z . Trpěliví matematikofilové mohou uvedené rovnice aplikovat na parabolické vlákno a odvodit závěry popsané v kpt. 2.3.2.

2.4 Disperze v optických vláknech

Disperze, neboli rozšiřování pulzů posílaných optickým vlákem, má spolu s útlumem zásadní omezující vliv na rychlost přenosu dat. Disperze má v optických vláknech několik příčin: modová disperze (která je nejvýraznější), materiálová, vlnododová, polarizační a nelineární disperze.

2.4.1 Modová disperze, gradientní vlákna

Šíří-li se světelný pulz vícemodovým vlákem, rozdělí se jeho energie do několika módů, z nichž každý má svoji grupovou rychlost. Na výstupu vlákna délky L tak dojde k rozšíření krátkého pulzu na dobu $L/v_{min} - L/v_{max}$, kde v_{min} je grupová rychlost nejpomalejšího a v_{max} nejrychlejšího módu. Rozdílná grupová rychlost je přirozená, protože módy se liší hodnotou vlnového čísla β , tj. i úhlem, který jejich paprsky svírají s osou z a paprsky různých módů tak musí ve vlákne překonat odlišné vzdálenosti (viz obr. 20).

Důmyslný způsob jak minimalizovat modovou disperzi představují tzv. gradientní vlákna, tedy vlákna ve kterých dochází ke spojitému poklesu indexu lomu $n(r)$ v jádře. Příklad profilu indexu lomu gradientního vlákna je na obr. 1. I v gradientních vláknech sice paprsky s nižší hodnotou vlnového čísla β (tj. svírající s osou vlákna větší úhel ϑ) musí překonat delší dráhu, zato ale pronikají do oblasti s menším indexem lomu a pohybují se proto větší rychlostí. Optimální profil indexu lomu proto minimalizuje modovou disperzi mnohomodových vláken.

Spočítat hodnotu modové disperze ve vláknech s velkou hodnotou normované frekvence lze pomocí paprskové optiky. Čas, který paprsek potřebuje k uražení vzdálenosti dz je

$$dt = \frac{n dz}{c \cos \vartheta} = \frac{n^2 dz}{cI_1} \quad (62)$$

Většinu běžných profilů indexu lomu jádra lze přibližně popsat výrazem

$$n^2 = n_1^2 \left[1 - 2\Delta_n \left(\frac{r}{a} \right)^q \right] \quad \text{pro } r \leq a \quad (63)$$

$$\Delta_n = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (64)$$

kde n_1 je maximální index lomu na ose vlákna, n_2 index lomu pláště a q parametr popisující tvar profilu. Hodnota $q = \infty$ odpovídá profilu SI vlákna, vlákno s $q = 2$ se nazývá parabolické. Po dosazení (63) do (62) získáme

$$t = \frac{n_1^2}{cI_1} L - \frac{2\Delta_n n_1^2}{cI_1} \int_0^L \left(\frac{r}{a} \right)^q dz$$

Výraz $n_1^2 L / (cI_1)$ označuje čas, za který by paprsek proletěl vlákno s konstantním indexem lomu n_1 . Jak je spočítáno v dodatku 5.4, platí pro integrál

$$\int_0^L \left(\frac{r}{a} \right)^q dz = \frac{n_1^2 - I_1^2}{n_1^2 \Delta_n (q + 2)} L$$

Pro čas, který paprsek charakterizovaný invariantem I_1 potřebuje k překonání délky L gradientního vlákna s profilem popsaným parametrem q , dostáváme

$$t = \left[\frac{n_1^2}{cI_1} - \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{c(q+2)I_1} \right] L = \left[\frac{n_1^2 q}{c(q+2)I_1} + \frac{2}{c(q+2)} I_1 \right] L \quad (65)$$

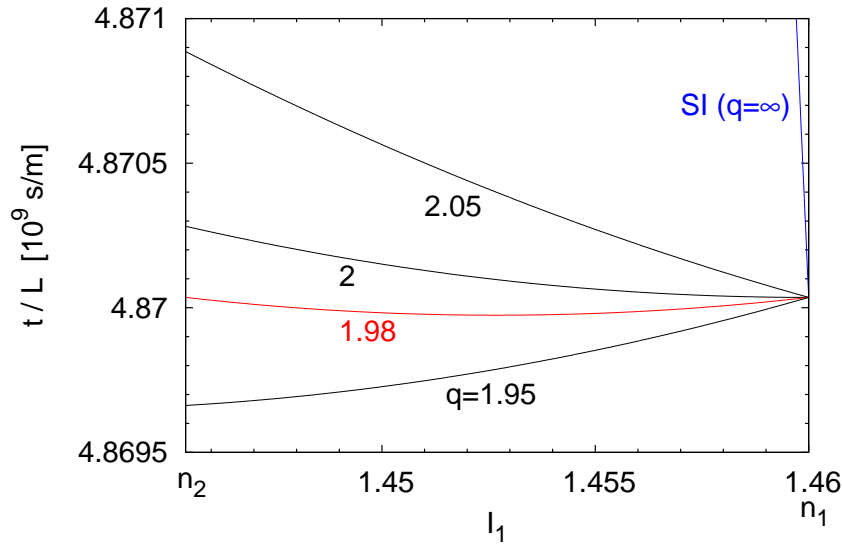
Tento výsledek je nezávislý na hodnotě invariantu I_2 . Závislost (65) je pro několik hodnot q nakreslena na obr. 22.

Pro vedené paprsky $I_1 \in \langle n_2; n_1 \rangle$, takže pro časový rozptyl modů platí

$$\frac{t}{L}(I_1 = n_2) - \frac{t}{L}(I_1 = n_1) = \frac{n_1^2 q - n_1 n_2 (q + 2) + 2n_2^2}{cn_2(q + 2)} \quad (66)$$

V optimálním případě (levá strana rovnice je nulová)

$$q = 2 \frac{n_2}{n_1} \approx 2 \quad (67)$$



Obrázek 22: Převrácená hodnota grupové rychlosti paprsků spočítaná podle (65) pro několik hodnot parametru q ve vlákne s $n_1 = 1,46$ a $\Delta_n = 0,01$. Červená křivka ($q = 1,98$) odpovídá ideálnímu profilu podle (67), modrá křivka SI vláknu. Všechny křivky se pro $I_1 = n_1$ sbíhají v hodnotě n_1/c .

což vysvětluje význačné postavení parabolických vláken. Jsou to vlákna, ve kterých je vliv modové disperze minimalizován. Modovou disperzi lze samozřejmě zcela potlačit použitím jednomodových vláken. Výraz (66) nabývá pro SI a parabolická vlákna hodnot

$$q = \infty: \quad \frac{n_1}{cn_2}(n_1 - n_2) \quad \text{pro } n_1 = 1,46 \text{ a } \Delta_n = 0,01 \text{ vychází: } 49 \text{ ns/km}$$

$$q = 2: \quad \frac{1}{2cn_2}(n_1 - n_2)^2 \quad 0,25 \text{ ns/km}$$

Vztah (66) přestává platit na příliš dlouhých vzdálenostech, kde se již začne uplatňovat mezimodová vazba – přenos energie mezi módy s podobnými konstantami β způsobený drobnými nehomogenitami vlákna. Rozšíření pulzu v dlouhém vlákne nemusí být díky mezimodové vazbě přímo úměrné L , ale \sqrt{L} .

2.4.2 Materiálová disperze

I pokud eliminujeme modovou disperzi, materiál vlákna je disperzním prostředím s relací

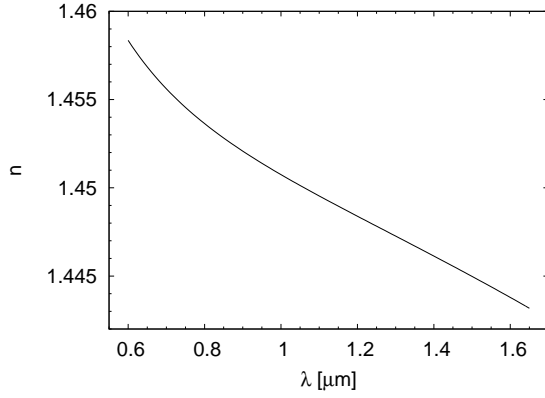
$$k = \frac{n(\omega)}{c} \omega \quad (68)$$

Grupovou rychlost

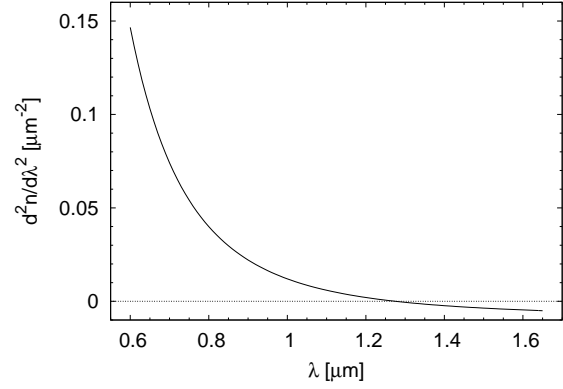
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (69)$$

spočítáme derivováním

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(\omega \frac{dn}{d\omega} + n \right) \quad (70)$$



Obrázek 23: *Index lomu křemenného skla v závislosti na vlnové délce.*



Obrázek 24: *Druhá derivace závislosti $n(\lambda)$ křemenného skla.*

a vyjádříme pomocí vlnové délky

$$\omega \frac{dn}{d\omega} = -\lambda \frac{dn}{d\lambda}$$

(λ je vlnová délka, kterou by studované záření mělo ve vakuu). Pro čas, který pulz záření o této vlnové délce potřebuje k průletu vláknem délky L dostáváme

$$t = \frac{L}{c} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (71)$$

Po dalším zderivování dostáváme pro rozptyl grupových časů pulzu složeného z vlnových délek v rozmezí $\Delta\lambda$

$$\Delta t \approx -\frac{L}{c} \lambda \frac{d^2n}{d\lambda^2} \Delta\lambda \quad (72)$$

kde

$$D = \frac{1}{L} \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \quad (73)$$

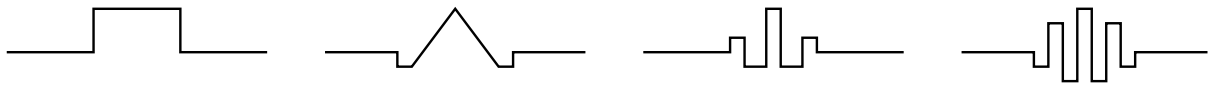
se nazývá disperzní koeficient. Závislost indexu lomu křemenného skla a její druhá derivace vystupující v disperzním koeficientu jsou vyneseny v grafech 23 a 24.

2.4.3 Vlnododová disperze

Protože křivky na grafu s disperzní relací nejsou přímkou (viz obr. ...), závisela by grupová rychlost každého modu na vlnové délce i ve vlákně vyrobeném z nedisperzního materiálu. Tento jev se nazývá vlnododová disperze. Když známe závislost $\beta(V)$, spočítáme její koeficient:

$$D = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\beta}{d\omega} \frac{V}{\omega} \right) = \frac{V}{\omega} \frac{d^2\beta}{dV^2} \frac{dV}{d\lambda} = -\frac{V^2}{2\pi c} \frac{d^2\beta}{dV^2} \quad (74)$$

Nejvíce nás bude zajímat vlnododová disperze v jednomodových vláknech, kde její vliv není přehlušen modovou disperzí. Jak je vidět na obr. ..., je v jednomodových vláknech



Obrázek 25: Schémata profilů indexu lomu pro SI vlákno, vlákno s posunutou disperzí, disperzi kompenzující vlákno a vlákno s vyhlazenou disperzí.

pro malé hodnoty normované frekvence $d^2\beta/dV^2 > 0$, disperzní koeficient je zde proto záporný.

Disperzní relace optického vlákna a tím i jeho vlnododová disperze závisí na profilu indexu lomu vlákna. Jak bude ukázáno v následující kapitole, lze změnou závislosti $n(r)$ výhodně měnit velikost vlnododové disperze.

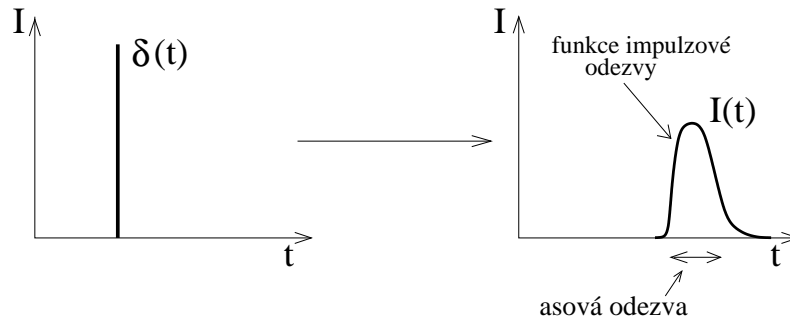
2.4.4 Chromatická disperze – společný vliv materiálové a vlnododové disperze

Protože materiálová i vlnododová disperze závisí na spektrální šířce optického pulzu, nazývá se jejich společný vliv chromatická disperze. Její koeficient v SI vlákne je vyneseno do grafu Je vidět, že pro vlnovou délku přibližně $1,3 \mu\text{m}$ je materiálová disperze kompenzována vlnododovou a celkový koeficient chromatické disperze je nulový. Na této vlnové délce optická vlákna vykazují zároveň velmi malý útlum, což vysvětluje velkou oblibu jednomodových SI vláken v minulosti.

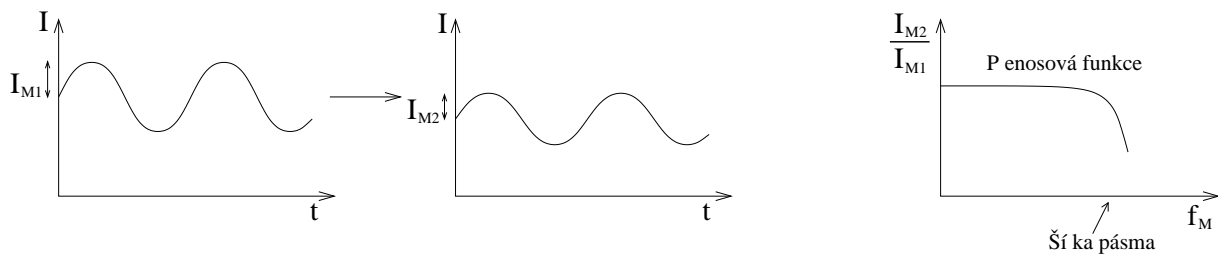
Později bylo změnou profilu indexu lomu (obr. 25) dosaženo takového zvětšení vlnododové disperze, že se vlnová délka nulového koeficientu chromatické disperze posunula na $1,55 \mu\text{m}$, tedy do nejhlubšího minima útlumu křemenných vláken. Takováto vlákna se označují vlákna s posunutou disperzí nebo DSF (*dispersion-shifted fibers*) a jsou používána v současnosti.

V době, kdy se zavedla DSF a s nimi zdroje i detektory pracující na vlnové délce $1,55 \mu\text{m}$, fungovaly po světě desítky milionů kilometrů „konvenčních“ jednomodových SI vláken (CSF, *conventional single-mode fibers*) optimalizovaných pro $1,3 \mu\text{m}$, která ovšem na $1,55 \mu\text{m}$ vykazovala velkou disperzi. Extrémním zvýšením vlnododové disperze byla proto vyvinuta tzv. disperzi kompenzující vlákna (DCF, *dispersion compensating fibers*) s velkou zápornou hodnotou koeficientu chromatické disperze pro vlnovou délku $1,55 \mu\text{m}$. Zapojením relativně krátkého (stovky metrů až kilometry) úseku DCF za optickou trasu tvořenou jednomodovým SI vlákem, jehož koeficient chromatické disperze je na $1,55 \mu\text{m}$ kladný, bylo možné kompenzovat disperzi ve stávající trase bez drahého vyměňování původního vlákna a používat ji na vlnové délce $1,55 \mu\text{m}$. Závislost koeficientu chromatické disperze pro CSF, DSF i DCF jsou ukázaná v grafu

Zbývá zmínit tzv. vlákna s vyhlazenou disperzí (DFF, *dispersion flattened fibers*), která dosahují téměř nulové chromatické disperze na obou používaných vlnových délkách, $1,3$ i $1,55 \mu\text{m}$. Profily indexu lomu CSF, DSF, DCF a vláken s vyhlazenou disperzí jsou schematicky zobrazena na obr. 25.



Obrázek 26: *Funkce impulzové odezvy je časový průběh intenzity světla na výstupu vlákna, do kterého vstoupil pulz ve tvaru delta funkce.*



Obrázek 27: *Přenosová funkce.*

2.4.5 Polarizační disperze

V jednomodových vláknech se při přenosu na velké vzdálenosti může projevit i rozdílná rychlost záření s opačnou polarizací způsobená nedokonalou kruhovou symetrií vlákna.

2.4.6 Nelineární disperze

Velká intenzita světla ve vláknech může vést k nelineárním jevům, při kterých např. index lomu je funkcí intenzity světla. Nelineární jevy opět vedou k disperzi a v případě WDM k nežádoucím jevům jako je čtyřvlonné směšování. Na druhé straně ale mohou být využity ke kompenzaci chromatické disperze. Vzniknou tak solitony šířící se vlákem prakticky beze změny svého tvaru (např. i na vzdálenosti stovky Gm).

2.4.7 Šířka pásma a další veličiny popisující disperzi

Funkce impulzové odezvy je odezvou optického vlákna na vstupní pulz ve tvaru delta funkce (viz obr. 26). Šířku funkce impulzové odezvy můžeme nazývat časová odezva vlákna. Ta udává nejkratší možný časový rozestup mezi dvěma pulzy, které se po průletu vlákem nepřekryjí.

Fourierovou transformací funkce impulzové odezvy je **přenosová funkce**. Její absolutní hodnota má názorný význam: Pokud frekvencí f_M modulujeme intenzitu světla vstupujícího do optického vlákna, dojde ve vláknech k poklesu amplitudy této modulační z hodnoty I_{M1} na hodnotu I_{M2} . Závislost poměru I_{M2}/I_{M1} na f_M je absolutní hodnotou

přenosové funkce (obr. 27). Hodnota přenosové funkce pro $f_M = 0$ udává útlum (nemodulovaného) záření s konstantní intenzitou.

Šířka přenášeného frekvenčního pásma je maximální frekvence, kterou je možné modulovat intenzitu vstupního signálu aniž by ve vlákně došlo k výraznému snížení amplitudy modulace. Šířka pásma je tedy hodnotou modulační frekvence, při které dojde k výraznému poklesu přenosové funkce (obr. 27). Šířka pásma je nepřímo úměrná časové odezvě. Když se neuplatní mezimodová vazba, je také nepřímo úměrná délce vlákna. Běžně se proto udává šířka pásma vlákna dlouhého 1 km v jednotkách Hz.km.

2.5 Typy optických vláken

2.5.1 Jednomodová (jednovidová) křemenná vlákna

Protože pro danou vlnovou délku musí mít normovanou frekvenci menší než je cut-off druhého nejnižšího módu, mají malý průměr jádra ($4 - 10 \mu\text{m}$) a malý rozdíl indexu lomu jádra a pláště. Typický průměr pláště jednovidového vlákna je $125 \mu\text{m}$, průměr primární ochrany (kpt. 2.6) $250 \mu\text{m}$, běžná hodnota numerické apertury je např. 0,13. Šířka pásma jednomodových vláken mívá hodnotu stovky GHz.km. Jednomodová vlákna mají nejmenší disperzi, nejmenší útlum (lze dosáhnout $0,16 \text{ dB/km}$) a nedochází v nich k modovému šumu. Jejich nevýhody pramení z malé numerické apertury díky které se záření do jednomodového vlákna navazuje relativně obtížně, což např. komplikuje výrobu konektorů. Zdroje světla pro aplikace s jednomodovými vlákny většinou musí být lasery. Pod mezní vlnovou délkou se z nich stávají vlákna vícemodová.

Většinu jednomodových vláken můžeme dělit podle závislosti disperzního koeficientu na vlnové délce (kpt. 2.4.4) na

- konvenční vlákna (označovaná CSF nebo NDSF) se skokovou změnou indexu lomu a minimální disperzí na vlnové délce přibližně $1,31 \mu\text{m}$
- vlákna s posunutou disperzí (DSF), ve kterých je díky vhodnému gradientu indexu lomu jádra minimum disperze posunuto na $1,55 \mu\text{m}$
- disperzi kompenzující vlákna (DCF) s extrémní vlnovodovou disperzí. Protože na vlnové délce $1,55 \mu\text{m}$ mají velký záporný disperzní koeficient, používají se na této vlnové délce ke kompenzaci disperze v CSF.
- vlákna s vyhlazenou disperzí (DFF) s nízkou disperzí na obou častých vlnových délkách, $1,3$ i $1,55 \mu\text{m}$.

Jednomodová vlákna dále můžeme dělit podle profilu indexu lomu pláště na

- vlákna s přizpůsobeným indexem lomu (*matched clad*), která mají konstantní index lomu v celém plášti (např. první vlákno na obr. 25)
- vlákna s vnořeným indexem lomu (*depressed clad*). Index lomu pláště je těsně u jádra snížený, což m. j. snižuje útlum způsobený mikroohyby a pod. (např. druhé vlákno na obr. 25).

Zvláštním typem jsou vlákna udržující polarizaci (*polarization maintaining fibers*, PM). V běžném kruhově symetrickém vlákně dochází vlivem nedokonalostí (např. dvojlom způsobený vnějším tlakem) k přenosu energie mezi oběma možnými polarizacemi záření. Protože některé aplikace vyžadují lineárně polarizované světlo, byla vytvořena PM vlákna, kde je změně polarizace záření zabráněno dostatečně velkým rozdílem mezi rychlostmi, kterými se opačně polarizované módy šíří. Rozdílných rychlostí různě polarizovaného záření je dosaženo buď eliptickým profilem jádra nebo dvojlomem způsobeným tlakem ve vlákně. Např. ve vlákně označovaném „panda“ je tlak způsoben oblastmi s B_2O_3 vnořenými do pláště.

2.5.2 Mnohomodová (mnohovidová) vlákna

Díky většímu průměru jádra a větší numerické apertuře mohou přenášet větší výkony a je jednodušší do nich světlo navázat. Jejich podstatnou nevýhodou je např. velká disperze.

1. Gradientní křemenná vlákna. Díky parabolickému profilu indexu lomu je v nich minimalizován vliv modové disperze (kpt. 2.4.1). Běžné hodnoty parametrů gradientních vláken se pohybují kolem následujících hodnot: průměr jádra $50\ \mu\text{m}$, šířka pásma $1\ \text{GHz}\cdot\text{km}$, numerická apertura $0,2$, útlum $0,8 - 5\ \text{dB}/\text{km}$. Pro počet módů v parabolickém vlákně platí

$$N(V) \approx \frac{V^2}{4} \quad (75)$$

tedy méně než v SI vláknech.

Všechna následující mnohomodová vlákna patří mezi SI vlákna.

2. Křemenná vlákna se skokovou změnou indexu lomu. Průměr jádra se pohybuje od $50\ \mu\text{m}$ do $2\ \text{mm}$, šířka pásma v desítkách $\text{MHz}\cdot\text{km}$, numerická apertura okolo hodnoty $0,25$, útlum mezi 5 a $10\ \text{dB}/\text{km}$.
3. Vlákna se křemenným jádrem a pláštěm z jiného materiálu. Patří sem vlákna HCPS (*hard plastic clad silica* označovaná také HCS – *hard clad silica*) s pláštěm z tvrdého polymeru a vlákna PCS (*plastic clad silica*) s pláštěm ze silikonové pryskyřice. Útlum těchto vláken závisí na materiálu pláště, obsahu vody a vlnové délce procházejícího světla, dosahuje hodnot i pod $10\ \text{dB}/\text{km}$. Průměr jádra bývá mezi $200\ \mu\text{m}$ a $2\ \text{mm}$, plášť je většinou ve srovnání s jádrem tenký.
4. Polymerová vlákna POF (*plastic optical fiber*) s jádrem i pláštěm z plastu, která mají útlum ve stovkách dB/km s minimem na $500 - 650\ \text{nm}$. Průměr jádra se pohybuje okolo milimetru.
5. Vlákna z halogenidů stříbra (AgCl , AgBr) pro vlnové délky $4 - 18\ \mu\text{m}$. Označují se PIR (*polycrystalline infrared*) a jejich minimální útlum jsou stovky dB/km . Do jejich spektrální oblasti spadá záření CO a CO_2 laseru, pyrometrické a další IR aplikace.

6. Spektrální mezeru mezi křemennými a PIR vlákny přemostují vlákna z chalkogenidových skel (zejména As_2S_3) označovaná CIR (*chalcogenide infrared*). Přenášejí záření vlnových délek $2-6\ \mu\text{m}$ s útlumem stovky dB/km. Do této oblasti spektra spadá např. záření Er:YAG laseru a, podobně jako v případě PIR vláken, množství aplikací IČ.
7. Kapilární vlákna, kde jádro vlákna může být tvořeno kapalinou, příp. plynem nebo i kapalným krystalem. Patří sem i vlákna, kde dutina uvnitř vlákna má menší index lomu než plášť a jako prostředí s vysokým indexem lomu slouží vnitřní vrstva kapiláry.
8. Pro úplnost opustíme oblast optických vláken a zmíníme vlnovody, kde k odrazu elektromagnetického záření dochází na vodivém prostředí stěny vlnovodu. Ty ovšem mívají centimetrové až decimetrové rozměry a slouží především k vedení mikrovln. Narozdíl od optických vláken zde např. nad kritickou vlnovou délkou neexistuje žádný vedený mód. Také světlovody užívané ve stavebnictví jsou roury s vysoce odrazivým vnitřním povrchem, to už je ale úlet do zcela jiného oboru.

2.6 Optické kabely

Aby bylo optické vlákno chráněno před vnějšími vlivy, umísťuje se do různých typů opt. kabelů. Vlákno se už při výrobě pokrývá polymerní (lakovou) vrstvou tzv. primární ochrany s vnějším průměrem např. $250\ \mu\text{m}$. Takto kryté vlákno se většinou umísťuje do další „sekundární ochrany“, která může mít tři podoby:

- Těsná – jde o vrstvu nanesenou přímo na primární ochranu
- Volná – je tvořená dutou trubičkou, ve které se vlákno může volně pohybovat. Volná sekundární ochrana způsobuje méně mikroohybů vlákna než těsná.
- Plněná – jde v podstatě o volnou sekundární ochranu, ale trubička je vyplněna speciálním gelem nebo olejem, který vlákno chrání před pronikáním vlhkosti.

Kromě optických vláken s primární a sekundární ochranou může optický kabel obsahovat zejména

- tahové a vyztužovací prvky (ocel, kevlar ...)
- vnější plášť (z polyetylénu vysoké hustoty, z ekologicky problematičtějšího PVC, příp. z jiných materiálů)
- gel – tvoří ochranu proti vlhkosti, omezuje tření při výrobě kabelů, rozkládá namáhání vlákna na větší plochu
- navinutou pásku chránící kabel proti pronikání vlhkosti
- ocelový plášť proti hlodavcům

Optické kabely se mohou dělit podle typu vláken (jednomodové, mnohomodové, hybridní), typu sekundární ochrany (těsná, volná, plněná), počtu vláken a jejich geometrického uspořádání (simplex, duplex, vícevláknový kabel s kruhovou geometrií, vícevláknový páskový kabel), určení kabelu (venkovní, vnitřní, univerzální, podmořský ...), umístění tahového prvku (uprostřed kabelu, vně vláken) a pod.

2.7 Spojování optických vláken

Spoje optických vláken můžeme dělit na trvalé, podmíněčně rozebíratelné a konektory. Mezi trvalé spojování vláken patří především svařování, které je nejdokonalejším druhem spoje a umožňuje nejmenší ztráty (0,01 dB). Svařuje se elektrickým obloukem, příp. speciálním mikrohořákem nebo laserem a je nutná vysoká přesnost (μm). Mezi trvalé spoje patří také lepené spoje a zalepení vláken do společné kalibrované trubičky.

K podmíněčně rozebíratelným spojům počítáme takové mechanické spojky, které sice nejsou určeny k rozpojování, lze je ale rozebrat bez poškození. Jde zejména o tzv. V-drážku, dalším příkladem je kalibrovaná kapilára, ve které jsou konce obou vláken vratně upevněny. Ztráty (odrazy) ve spoji se sníží, když se mezera mezi vlákny vyplní látkou s vhodným indexem lomu, např. silikonovou kapalinou nebo u lepených trvalých spojů epoxidovým lepidlem.

Rozebíratelných spojů, tedy konektorů optických vláken, existuje řada typů. Hledí se nejenom na to, aby konektor vnášel do optické trasy co nejmenší útlum, ale také aby se útlum opakovaným rozebíráním a spojováním konektoru nezvyšoval a aby útlum zpětného odrazu byl co nejvyšší (což lze zajistit např. zkosením čelních stran obou vláken). Čela vláken se ovšem nesmí dotýkat, protože by se při rozpojování a spojování mohla poškrábat. Trubičky, které v mnoha konektorech drží zasunuté vlákno ve správné poloze, se nazývají ferule. Do některých ferulí jsou vloženy spojky, z nichž první přemění rozbíhavý svazek paprsků z vlákna na rovnoběžný a druhá jej soustřeďuje do navazujícího vlákna.

Spoje, zejména konektory, vnášejí do optické trasy útlum záření. Ten může být způsoben rozdílnými parametry vláken (průměr jádra, numerická apertura, profil indexu lomu), odrazem na čelních plochách vláken a špatnou vzájemnou polohou vláken. Může se totiž stát, že osy vláken ve spoji jsou vzájemně posunuté, svírají nenulový úhel nebo že jsou čela vláken od sebe vzdálena a část světla unikne do mezery mezi vlákny. Nerovnosti čelních ploch jsou také zdrojem útlumu ve spoji.

2.8 Výroba optických vláken

3 Rovinné světlovody

4 Stručná zmínka o optronech

Pro úplnost zmíním v těchto naprosto neúplných skriptech optrony, tj. optoelektrické součástky, které elektrický signál na svém vstupu přenášejí ve formě optického signálu na výstup, kde jej mění zpět na elektrický. Optrony tedy slouží ke galvanickému oddělení elektronických obvodů, případně, pokud záření prochází vnějším prostředím, mohou tvořit součást optoelektronických senzorů. Zdrojem světla ve vstupní části optronu je zpravidla fotodioda, jako detektor ve výstupní části slouží fototranzistor, fotodioda, fotoodpor nebo fototyristor.

Optrony můžeme dělit do dvou kategorií, na optrony určené pro analogové a pro logické obvody. U analogových optronů se klade velký důraz na jejich linearitu. Nelinearitu jednotlivých součástí analogového optronu je možné kompenzovat pomocí dvou identických diod na výstupní straně optronu. Zatímco jedna z diod je vyvedena na výstup optronu, je signál detekovaný druhou diodou přiveden na zesilovač umístěný na vstupní straně odporu a jeho velikost je použita ke kompenzaci nelinearity a teplotní závislosti optronu. Naopak u optronů určených pro logické obvody postačuje, aby optron spínal mezi dvěma vhodnými hodnotami.

5 Dodatky

5.1 Diferenciální operátory ve válcových souřadnicích

Válcové (cylindrické) souřadnice (r, φ, z) :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad (76)$$

Jednotkové vektory

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{\varphi}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

f – skalární pole

$\vec{F} = F_r \vec{r}_0 + F_\varphi \vec{\varphi}_0 + F_z \vec{z}_0$ – vektorové pole

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}_0 \quad (78)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (79)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \vec{r}_0 + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{\varphi}_0 + \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} F_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \vec{z}_0 \quad (80)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (81)$$

$$\Delta \vec{F} = \left(\Delta F_r - \frac{1}{r^2} F_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{r}_0 + \left(\Delta F_\varphi - \frac{1}{r^2} F_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \vec{\varphi}_0 + \Delta F_z \vec{z}_0 \quad (82)$$

5.2 Besselovy funkce

Řešení diferenciální rovnice

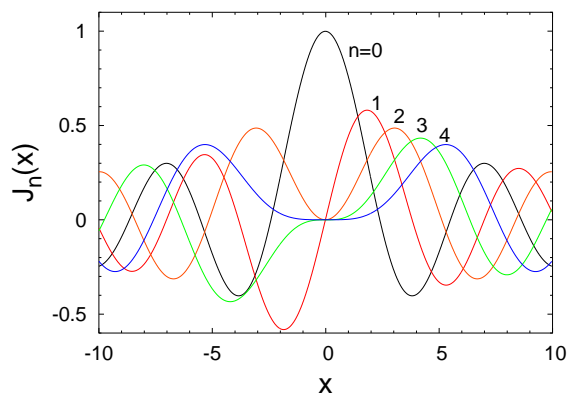
$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (83)$$

se hledá ve tvaru

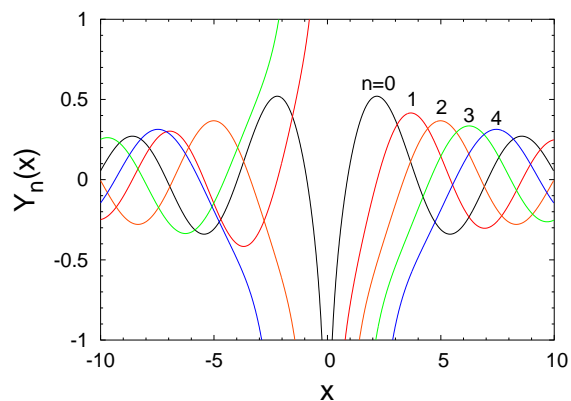
$$y(x) = x^\rho \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

což vede k rovnici

$$a_0(\rho^2 - n^2) + a_1[(\rho + 1)^2 - n^2] + \sum_{j=2}^{\infty} \{a_{j-2} + a_j[(\rho + j)^2 - n^2]\} = 0$$



Obrázek 28: Besselovy funkce prvního druhu celočíselných řádů 0 až 4.



Obrázek 29: Besselovy funkce druhého druhu celočíselných řádů 0 až 4.

a výsledkům

$$\begin{aligned}\rho &= \pm n \\ a_1 &= 0 \\ a_j &= -\frac{a_{j-2}}{j(j \pm 2n)}\end{aligned}$$

Řešením rovnice (83) jsou tedy tzv. Besselovy funkce 1. druhu řádu n (obr. 28):

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}}{j! \Gamma(n+j+1)} \quad (84)$$

s vlastnostmi

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{pro } n \in \mathbf{Z} \quad (85)$$

$$J'_n(x) = \pm \left(\frac{n}{x} J_n(x) - J_{n \pm 1}(x) \right) \quad (86)$$

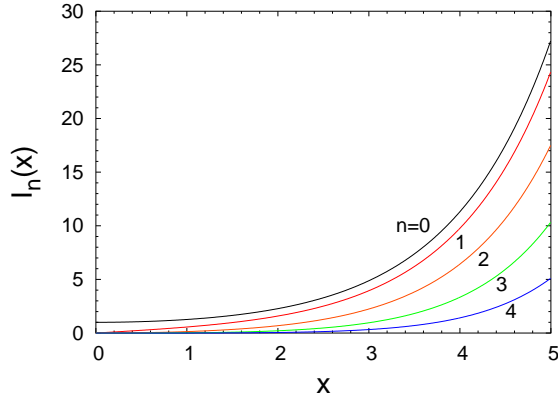
a limitním chováním

$$J_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \quad (87)$$

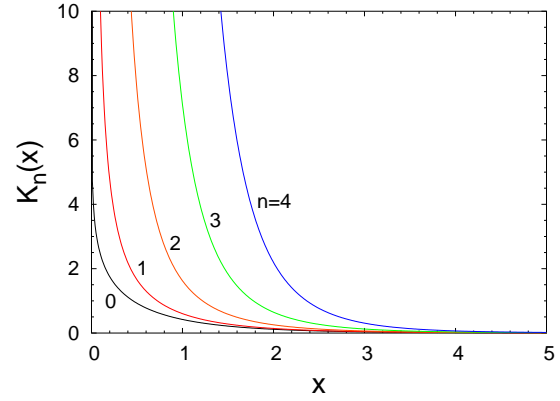
$$J_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (88)$$

Tabulka nejnižších kořenů Besselových funkcí 1. druhu:

řád:	0	1	2	3	4	5
	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002



Obrázek 30: Modifikované Besselovy funkce prvního druhu celočíselných řádů 0 až 4.



Obrázek 31: Modifikované Besselovy funkce druhého druhu celočíselných řádů 0 až 4.

Dalším řešením rovnice (83) jsou tzv. Besselovy funkce 2. druhu řádu n (obr. 29):

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (89)$$

Kombinací $J_n(x)$ a $Y_n(x)$ vznikají Besselovy funkce třetího druhu (Hankelovy funkce):

$$H_n^{(1)} = J_n(x) + iY_n(x) \quad (90)$$

$$H_n^{(2)} = J_n(x) - iY_n(x) \quad (91)$$

Jejich význam spočívá v limitním chování pro komplexní argument z :

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} H_n^{(1)}(z) &= 0 && \text{pro } \text{Im}(z) > 0 \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} H_n^{(2)}(z) &= 0 && \text{pro } \text{Im}(z) < 0 \end{aligned}$$

Výrazy $i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$ a $i^{-(n+1)} H_n^{(2)}(-ix)$ jsou reálné pro reálná kladná x .

Modifikované Besselovy funkce

prvního druhu (I_n , obr. 30) a druhého druhu (K_n , obr. 31) jsou řešením diferenciální rovnice

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \quad (92)$$

Pro reálná $x > 0$ platí

$$I_n = i^{-n} J_n(ix) \quad (93)$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix) \quad (94)$$

Limitní chování I_n a K_n popisují vztahy

$$I_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$$

$$K_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

V optoelektronice mají význam rovnice

$$K'_n(x) = \pm \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n\pm 1}(x) \quad (95)$$

$$K_{-n}(x) = K_n(x) \quad (96)$$

5.3 Paprsková rovnice

Pro výpočet trajektorie paprsku nebo stanovení invariantů na této dráze je užitečná tzv. paprsková rovnice. V této kapitole je uvedeno její odvození pomocí Fermatova principu.

Doba, kterou paprsek potřebuje k průletu prostředím s obecně proměnným indexem lomu $n(\vec{r})$ se rovná integrálu

$$\int \frac{n ds}{c},$$

kde ds je infinitezimální úsek dráhy paprsku. Podle Fermatova principu platí

$$\delta \int n ds = 0, \quad (97)$$

což můžeme přepsat na

$$\delta \int n \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} dz = 0, \quad (98)$$

kde

$$ds = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} dz$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dz}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dz}$$

a kde dále označíme

$$L = n \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (99)$$

Pro funkce splňující $\delta \int L ds = 0$ platí

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (100)$$

tedy

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{n \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Protože analogický postup můžeme použít i pro souřadnice y a z , dostáváme vektorovou rovnici

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n, \quad (101)$$

kteřá se nazývá paprsková rovnice.

5.4 Výpočet výrazu $\mathcal{I} = \frac{1}{I_1} \int_0^Z \left(\frac{r}{a} \right)^q dz$ v gradientním vlákne

Při výpočtu použijeme následující předpoklady či označení:

$$\begin{aligned} n^2 &= n_1^2 \left[1 - K \left(\frac{r}{a} \right)^q \right] && \text{pro } r \leq a \\ I_1 &\equiv n \cos \vartheta = \frac{n}{\sqrt{1 + \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}} \\ I_2 &\equiv I_1 \frac{r^2}{a} \dot{\varphi} \\ \dot{r} &= \frac{dr}{dz} && \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dz} \end{aligned}$$

I_1 a I_2 jsou konstanty, které se během letu paprsku vláknem nemění (viz kpt. 2.3.3).

Při výpočtu se nejprve přechází na integrál přes r . Praktické je počítat v mezích od nejmenšího do největšího r :

$$\mathcal{I} = \frac{1}{I_1} \int_0^Z \left(\frac{r}{a} \right)^q dz = \frac{1}{I_1} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\dot{r}} \left(\frac{r}{a} \right)^q dr = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\sqrt{f}} \left(\frac{r}{a} \right)^q dr = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{r}{a} \right)^{q+1} dr$$

Na předchozím řádku byly použity následující pomocné výpočty a označení:

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{I_1^2} &= 1 + \dot{r}^2 + \left(\frac{I_2 a}{I_1 r} \right)^2 \\ \dot{r} &= \pm \frac{1}{I_1} \sqrt{n^2 - \left(\frac{I_2 a}{r} \right)^2 - I_1^2} \\ f &\equiv (I_1 \dot{r})^2 = n_1^2 - I_1^2 - n_1^2 K \left(\frac{r}{a} \right)^q - I_2^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \\ g &\equiv f \left(\frac{r}{a} \right)^2 = (n_1^2 - I_1^2) \left(\frac{r}{a} \right)^2 - n_1^2 K \left(\frac{r}{a} \right)^{q+2} - I_2^2 \end{aligned}$$

V dalším postupu se využije výpočet

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dr} &= \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{a} \frac{r}{a} - n_1^2 K \frac{q+2}{a} \left(\frac{r}{a} \right)^{q+1} \\ \left(\frac{r}{a} \right)^{q+1} &= \frac{a}{n_1^2 K (q+2)} \left[\frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{a} \frac{r}{a} - \frac{dg}{dr} \right] \end{aligned}$$

Dosazením za $\left(\frac{r}{a} \right)^{q+1}$ a využitím $\int_0^0 \frac{dg}{\sqrt{g}} = 0$, protože $g(r_{min}) = g(r_{max}) = 0$, dostáváme

$$\mathcal{I} = \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{n_1^2 K (q+2)} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{r}{a} dr - konst. \int_0^0 \frac{dg}{\sqrt{g}} = \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{n_1^2 K (q+2)} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{f}} = \frac{2(n_1^2 - I_1^2)}{n_1^2 K (q+2)} \frac{1}{I_1} Z$$

Doporučená literatura

- [1] A. Yariv: Optical Electronics in Modern Communications, *Oxford University Press* 1997.
- [2] A. Ghatak, K. Thyagarajan: Introduction to Fiber Optics, *Cambridge University Press* 1998.
- [3] B.E.A. Saleh, M.C. Teich: Základy fotoniky. Svazky 2–4, *Matfyzpress* 1994–6, originál: Fundamentals of photonics.
- [4] L. Maršálek: Optická vlákna, goro.czweb.org/download/interest/vlakna.pdf 2006.