Verze A2 (každý příklad je za 2body)

1. Rozhodněte, jestli řada konverguje nebo diverguje:

$$\text{a.} \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \left(\frac{n+1}{n-1}\right), \qquad \text{b.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}.$$

Řešení: a) použijeme odmocninové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln^n \left(\frac{n+1}{n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right) = \ln 1 = 0 < 1 \Rightarrow \text{konverguje.}$$

b) ověříme nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^3} = |\text{použijeme l'Hopitalovo pravidlo}| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{6} = \infty \Rightarrow \text{diverguje.}$$

2. Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení: Použijeme Weierstrassovo kriterium:

$$\frac{1}{3^n} \text{ je konvergentní, geometrická s } q = \frac{1}{3} < 1$$

$$\left|\frac{\cos nx}{3^n}\right| \le \frac{1}{3^n} \Rightarrow |\cos nx| \le 1 \Rightarrow \text{konverguje stejnoměrně.}$$

3. Určete obor konvergence mocniné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n}(x+2)^n.$$

Řešení: $x_0 = -2$,

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(-3)^n}{n}}{\frac{(-3)^{n+1}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-3)^n(n+1)}{n(-3)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{3n} = \frac{1}{3},$$

$x = -\frac{7}{3}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n}(-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ harmonická řada, diverguje.
$x = -\frac{5}{3}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n}(\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0 \Rightarrow$
je splněna nutná podmínka konvergence, řada konverguje.

Obor konvergence mocniné řady je $x \in (-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}]$.

4. Určete součet mocniné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n2^n}.$$

Řešení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}\,t}{2^n} = x\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{2^n}\mathrm{d}\,t =$$

$$\left[\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 2\right] = x\int_0^x \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{t}{2}}\mathrm{d}\,t = x\int_0^x \frac{1}{2-t}\mathrm{d}\,t = -x[ln|2-t|]_0^x = -x(ln|2-x| - ln2).$$

5. Pomocí čtyř prvních členů Maclorenova rozvoje určete přibližnou hodnotu výrazu:

$$\sqrt[3]{150}.$$

Řešení:

$$\sqrt[3]{150} = \sqrt[3]{125+25} = \sqrt[3]{5^3+5^2} = \sqrt[3]{5^3\left(1+\frac{1}{5}\right)} = 5\left(1+\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 5\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{3}\frac{-2}{3}}{2}\frac{1}{5^2} + \frac{\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}}{2*3}\frac{1}{5^3}\right) = 5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2*5} + \frac{1}{3^4*5} = 5,3136.$$