# 1 Vyjednávání

Standardní ekonomická teorie se zabývá problémy, kde na straně prodávajících i kupujících je mnoho hráčů (competitive equilibrium), řada kupujících a jeden prodávající (monopol), řada prodávajících a jeden kupující (monopsony) či několik prodávajících a řada kupujících (oligopol). Je evidentní, že existují situace, ve kterých je na obou stranách trhu velmi malý počet hráčů, či dokonce pouze jeden prodávající a jeden kupující. V takových situacích modely předpokládající velký počet či dokonce nekonečno účastníků nejsou příliš užitečné, neboť jejich závěry jsou většinou ve sporu s pozorovaným chováním.

Mezi typické příklady patří vyjednávání mezi podnikatelem a investiční bankou, potenciálním zaměstnavatelem a firmou, či kupujícím a prodávajícím apod. Charakteristické pro tyto příklady je, že každý z účastníků má určitou představu o tom, jakou hodnotu pro něj daný objekt představuje a za jakou cenu je schopen podobný či identický předmět koupit (prodat) na vedlejším trhu (outside option). Je evidentní, že obchod může být uzavřen jen tehdy, je-li hodnota předmětu pro prodávajícího nižší než pro kupujícího.

**Příklad 1.0.1** *Petr zvažuje prodej ojetého osobního automobilu svému kamarádovi Markovi. V autobazaru dostal nabídku na 80 000 Kč. Marek je ochoten utratit za automobil podobného typu a stáří až 90 000Kč. V jakém rozmezí lze očekávat cenu, na které se dohodnou za předpokladu, že ani jeden z nich nechce tratit?*

V řadě situací je zřejmé, jaká je hodnota vyjednávaného předmětu a proto většina ekonomických modelů tuto hodnotu bere jako danou. Pro zjednodušení je dokonce obvyklé normalizovat velikost „koláče“ (pie) na 1. Toho lze dosáhnout tak, že se předpokládá, že hodnota předmětu je pro prodávajícího nulová, zatímco pro kupujícího má hodnotu 1. Tento předpoklad většinou není na újmu obecnosti.

**Příklad 1.0.2** *Právě jste se vrátili z dovolené v Rakousku a zůstalo vám 1000 EUR, které nepotřebujete a za které můžete v nejlepší směnárně ve městě dostat 24 000 Kč. Váš kolega se na dovolenou teprve chystá a zvažuje nákup 1000 EUR, za které by ovšem musel dát 24 500 Kč. Jaký je váš maximální možný výdělek? Vašeho kolegy? Jaký výdělek očekáváte?*

Existuje několik různých přístupů jak modelovat vyjednávání. My uvedeme dva základní.[1]

## 1.1 Nashovo vyjednávání

Nashův přístup k vyjednávání je axiomatický. Tedy místo detailního určení vyjednávacího procesu je Nashova teorie postavena na vlastnostech (axiomech), které lze od „rozumné“ teorie vyjednávání očekávat. Po uvedení těchto axiomů ukážeme, že existuje jediné řešení. Pro zjednodušení budeme uvažovat, že vyjednávání probíhá mezi dvěma hráči.

Základem Nashovi teorie vyjednávání je množina možných dohod *(agreement set)* $A$ a bod neshody *(disagreement event)* $D$. Dále vyžadujeme, aby každý hráč uměl možné výsledky vyjednávání uspořádat podle svých preferencí, tedy aby měl tzv. *preference ordering.*[2] Budeme pro jednoduchost předpokládat, že existuje užitková funkce. Přestože představená teorie nepracuje přímo s rizikem, postoj hráčů k riziku bude hrát podstatnou roli. Hráč si například nemusí být jistý chováním ostatních hráčů a tedy ani tím, že vyjednávání dospěje do úspěšného konce. Tento postoj je obsažen ve tvaru užitkové funkce, ale nezávisí na případné lineární transformaci této funkce.

Důsledkem těchto předpokladů je, že problém vyjednávání lze přesunout z abstraktní množiny $A \cup D$ do množiny reálných čísel, přesněji $\mathbb{R}^2$. Základem Nashovy teorie vyjednávání tak je množina $S$, která vznikne sjednocením všech dvojic $(u_1(a), u_2(a))$ pro všechny body $a \in A$ a bodu $d = (u_1(D), u_2(D))$. Dvojce $\langle S, d \rangle$ je výchozí bod Nashovy teorie vyjednávání.

**Definice 1.1.1** *Problém vyjednávání je dvojce $\langle S, d \rangle$, kde $S \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní a konvexní množina, $d \in S$ a existuje $s \in S$ takové, že $s_i \succ d_i, i = 1, 2$. Množinu všech problémů vyjednávání označujeme*

[1] Následující dvě kapitoly jsou silně založeny na knize Osborne and Rubinstein (1990) zejména kapitolách 2 a 3. Pokud vím, tak v češtině jejich překlad není dostupný, ale kniha je dostupná v elektronické formě na adrese http://ww2.economics.utoronto.ca/osborne/bm/ .

[2] Formálně jde o kompletní, transitivní a reflexivní binární relaci na množině $A \cup D$. Jak je v ekonomii zvykem, tyto preference bereme jako daný, výchozí bod teorie.

$\mathbb{B}$. *Řešení problému vyjednávání je funkce $f : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^2$, která každému problému vyjednávání $\langle S, d\rangle$ přiřadí jednoznačně prvek z $S$.*

Nash dokázal, že řešení problému vyjednávání je jednoznačně určeno, pokud požadujeme následující čtyři axiomy. První axiom vyžaduje, aby výsledek vyjednávání závisel pouze na preferencích hráčů, nikoliv na konkrétní volbě užitkové funkce. Tedy první axiom požaduje, aby dvě užitkové funkce, které se „liší“ o lineární transformaci vedly ke stejnému řešení. Tento požadavek je vlastně požadavkem na množinu $\langle S, d\rangle$.

**Axiom 1.1.2 (INV)** *Jestliže problém $\langle S', d'\rangle$ vznikne z problému $\langle S, d\rangle$ pomocí lineární transformace $s_i \mapsto \alpha_i s_i + \beta_i$ for $i = 1, 2$ a $\alpha_i > 0$, pak $f_i(S', d') = \alpha_i f_i(S, d) + \beta_i$, pro $i = 1, 2$.*

Druhý axiom vyžaduje, aby veškeré možné odlišnosti hráčů byly obsaženy v popisu hry, tedy v množině $S$ a bodu $d$, případně množině možných dohod a užitkových funkcí. Důsledkem je, že pokud jsou tyto předpoklady symetrické, pak i výsledek vyjednávání musí být symetrický.

**Axiom 1.1.3 (SYM)** *Nechť je problém vyjednávání $\langle S, d\rangle$ symetrický, tedy $d_1 = d_2$ a $(s_1, s_2) \in S \iff (s_2, s_1) \in S$. Pak $f_1(S, d) = f_2(S, d)$.*

Další axiom vyžaduje, aby výsledek vyjednávání nezávisel na irelevantních alternativách. Tedy požadujeme, aby se výsledek vyjednávání nezměnil, pokud odstraníme ty možné výsledky vyjednávání, na kterých se hráči neshodnou.

**Axiom 1.1.4 (IIA)** *Nechť $\langle S, d\rangle$ a $\langle T, d\rangle$ jsou dva problémy vyjednávání takové, že $S \subset T$ a $f(T, d) \in S$. Pak $f(S, d) = f(T, d)$.*

Konečně, poslední axiom vyžaduje, aby po dokončení vyjednávání již neexistoval další prostor k vylepšení dosažené dohody *(renegotiation).*

**Axiom 1.1.5 (PAR)** *Nechť $\langle S, d\rangle$ je problém vyjednávání, $s \in S, t \in S, t_i > s_i$, pro $i = 1, 2$. Pak $f(S, d) \neq s$.*

Nyní již můžeme přistoupit k samotné formulaci Nashovi věty.

**Věta 1.1.6** *Problém vyjednávání má jednoznačné řešení $f^N : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^2$ vyhovující všem čtyřem výše uvedeným axiomům (INV,SYM,IIA,PAR). Toto řešení je ve tvaru*

$$f^N(S, d) = \underset{(d_1,d_2)\le(s_1,s_2)\in S}{\arg\max} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$$

.

**Důkaz 1.1.7** *Důkaz Nashovi věty provedeme postupně. Nejprve ukážeme, že uvedený předpis jednoznačně definuje řešení, které splňuje uvedené axiomy. Pak ukážeme, že jakékoliv další řešení splňující tyto axiomy se shoduje s Nashovým řešením.*

- *Množina $\{s \in S : s \ge d\}$ je kompaktní a funkce*

  $$H(s_1, s_2) = (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$$

  *je na této množině spojitá. Dále lze ukázat, že množina $\{s \in S : s \ge d\}$ je konvexní a funkce $H$ je striktně kvasi-konkávní[3] a tedy nabývá maxima v jediném bodě. Tedy funkce $f^N$ je dobře definována.*

- *Funkce $f^N$ splňuje čtyři axiomy.*

[3]Funkce $g : X \to \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}^n$ je striktně kvasi-konkávní, pokud pro každé $x, y \in X, x \neq y$, platí, že $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) > min\{f(x), f(y)\}$ pro všechna $\lambda \in (0, 1)$. Lze ukázat, že pokud $X$ je konvexní množina, pak striktně kvasi-konkávní funkce nabývá maxima na $X$ v jediném bodě. Důkaz lze nalézt na http://homepages.nyu.edu/čaw1/UMath/Handouts/ums06h23convexsetsandfunctions.pdf

- INV *Mějme problém $\langle S,d\rangle$ a problém $\langle S',d'\rangle$, který vznikne lineární transformací pomocí koeficientů $(\alpha_i,\beta_i), i=1,2$. Pak $s'\in S'$ tehdy a jen tehdy, existuje-li $s\in S$ takové, že $s_i=\alpha_i s_i+\beta_i, i=1,2$. Pak ovšem*

$$(s_1'-d_1')(s_2'-d_2')=\alpha_1\alpha_2(s_1-d_1)(s_2-d_2)$$

*Pokud tedy $(s_1^*,s_2^*)$ maximalizuje $(s_1-d_1)(s_2-d_2)$ na množině $S$, pak $({s_1^*}',{s_2^*}')$ maximalizuje $(s_1'-d_1')(s_2'-d_2')$ na množině $S'$*

- SYM *Funkce $H$ je symetrická a pokud dosahuje maxima v bodě $(s_1^*,s_2^*)\in S$, a problém $\langle S,d\rangle$ je symetrický, pak $(s_2^*,s_1^*)\in S$ a $d_1=d_2$ a tedy $(s_2^*,s_1^*)\in S$ rovněž maximalizuje $H$ na množině $S$. Protože řešení je určeno jednoznačně, musí platit, že $s_1^*=s_2^*$.*

- IIA *Pokud $s^*\in S$ maximalizuje $H$ na množině $T$, pak $s^*$ maximalizuje $H$ i na množině $S\subset T$.*

- PAR *Kdyby existovalo vylepšení dohody $t\in S$ takové, že $t_i>s_i, i=1,2$, pak by $s$ nemaximalizovalo $H$, neboť $H$ je rostoucí v obou svých argumentech.*

- *Důkaz jednoznačnosti. Předpokládejme, že existuje funkce $f$ splňující všechny čtyři axiomy. Ukážeme, že $f(S,d)=f^N(S,d)$ pro libovolný problém $\langle S,d\rangle$. Nechť $z=f^N(S,d)$ Transformujeme problém $\langle S,d\rangle$ lineárně na problém $\langle S',(0,0)\rangle$, který má řešení v bodě $f^N(S',(0,0))=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Odpovídající předpis tohoto zobrazení je $\alpha_i=\frac{1}{2(z_i-d_i)},\beta_i=-\frac{d_i}{2(z_i-d_i)}, z'=\alpha z+\beta$. Tato definice je korektní, neboť existuje $s$ takové,že $s_i>d_i$ a proto i $z_i>d_i, i=1,2$. Pokud $f^N(S',(0,0))=f(S',(0,0))$ pak i $f(S,d)=f^N(S,d)$.*

  *Nejprve ukážeme, že v $S'$ neexistuje bod $(s_1',s_2')$ takový, že by $s_1'+s_2'>1$. Sporem, předpokládejme, že takový bod existuje. Protože v bodě $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ je součet 1, body na spojnici bodů $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a $(s_1',s_2')$ mají rovněž součet souřadnic větší než 1 a z konvexnosti množiny $S'$ vyplývá, že leží v $S'$. Pro $\varepsilon>0$ uvažme bod $(t_1,t_2)=((1-\varepsilon)\frac{1}{2}+\varepsilon s_1,(1-\varepsilon)\frac{1}{2}+\varepsilon s_2)$. Pro dostatečně malé $\varepsilon$ platí*

$$t_1t_2=\frac{1}{2}(1-\varepsilon)((1-\varepsilon)\frac{1}{2}+\varepsilon(s_2'+s_1'))+\varepsilon^2 s_1's_2'>1$$

  *Pak by ovšem $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ nemohlo být Nashovo řešení problému $\langle S',(0,0)\rangle$, což je spor s předpokladem.*

  *Doplňme množinu $S'$ tak, aby tvořila trojúhelník*

$$S''=\{(s_1'',s_2''|s_1''\geq 0,s_2''\geq 0,s_1''+s_2''\leq\frac{1}{2}\}$$

  *Takto vzniklý problém je symetrický, takže $f(S'',(0,0))=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Protože problém $\langle S',(0,0)\rangle$ již bod $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ obsahuje, přidali jsme jen irelevantní alternativy a řešení $f$ tedy musí dát rovněž $f(S'',(0,0))=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Protože se shoduje s Nashovým řešením na problému $S''$, shoduje se i na množině $S'$ a také $S$ což jsme chtěli dokázat.*

**Příklad 1.1.8** *Dva hráči vyjednávají o tom, jak si rozdělit 1 mKč. Pokud se nedohodnou, žádný z nich nezíská nic (dolar propadne). Hráči mají možnost ponechat část peněz nerozdělenou. Předpokládejte, že oba hráči se snaží maximalizovat svůj podíl a mají stejnou užitkovou funkci, která je konkávní.*[4] *Jakým způsobem si rozdělí dolar? Jak se situace změní, jestliže jeden z nich se stane více averzní?*

**Řešení 1.1.9** *Množina možných dohod je*

$$A=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2: a_1+a_2\leq 1,\ a_i\geq 0, i=1,2\}$$

*a bod neshody $D=(0,0)$. Pokud oba hráči mají identickou užitkovou funkci, pak množina $S$ musí být symetrická a bod $d=(u(0),u(0))$ rovněž. Problém je tedy symetrický a Nashovo řešení je tedy $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Nyní předpokládejme, že hráč 2 se stane více averzní k riziku. Lze ukázat, že existuje rostoucí konkávní funkce $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taková, že jeho předchozí a současné preference platí*

$$v_2=h\circ u_2.$$

[4] Konkávní užitková funkce odpovídá situaci, kdy hráči mají averzi k riziku. Averze k riziku znamená, že hráč preferuje jistou věc o dané hodnotě před loterií s toutéž střední hodnotou.

*Pro zjednodušení označme $v_1 = u_1$ užitkovou funkci prvního hráče, která se nezměnila. Rovněž celý problém normalizujme, $h(0) = 0$ a $v_i(0) = 0, u_i(0) = 0$. Máme tedy dva problémy. První problém $\langle S, d\rangle$ s užitkovými funkcemi $u_1, u_2$, a problém $\langle S', d'\rangle$ odpovídající užitkovým funkcím $v_1, v_2$. Označme jejich řešení $z_u$ a $z_v$, tedy řešení problému*[5]

$$\max_{0\le z\le 1} u_1(z)u_2(1-z)$$

*a podobně pro $v$. Předpokládejme, že funkce $u_i v_i, h$ jsou diferencovatelné a problém má vnitřní řešení $(0 < z_u, z_v < 1)$. Pak pro řešení platí podmínky prvního řádu, které vzniknou diferencováním maximalizované funkce podle $z$. V případě užitkových funkcí $u_i$ to je*

$$u_1'(z)u_2(1-z) - u_1(z)u_2'(1-z) = 0$$

*což lze přepsat do tvaru*

$$\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} = \frac{u_2'(1-z)}{u_2(1-z)} \tag{1}$$

*Podobně pro $z_v$, kde rovnou dosadíme $v_2 = h \circ u_2$. Dostaneme*

$$\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} = \frac{h'(u_2(1-z))u_2'(1-z)}{h(u_2(1-z))} \tag{2}$$

*Protože $u_i$ jsou užitkové a tedy rostoucí funkce a protože $u_i$ jsou konkávní,*[6] *výrazy na levé straně předchozích rovnic jsou klesající v argumentu $z$. Dále lze ukázat,*[7] *že $h'(t)t \le h(t), \forall t \ge 0$. Označme tedy $u_2(1-z) = t$ a porovnejme pravé strany rovnic 1 a 2: $\frac{h'(t)}{h(t)} \le \frac{1}{t}$ a tedy pravá strana rovnice 1 je větší nebo rovna pravé straně rovnice 2. Protože výrazy na pravých stranách rovnic jsou rostoucí v $z$, dokázali jsme, že hodnota $z$ splňující rovnici 1 musí být větší než řešení rovnice 2. Tedy $z_u \le z_v$. Protože $z$ označuje podíl prvního hráče, výsledek lze interpretovat tak, že pokud se druhý hráč stane více averzní k riziku, pak podíl prvního hráče vzroste.*

**Poznámka 1.1.10** *Lze ukázat, že žádný ze 4 axiomů není zbytečný. Důkaz spočívá v konstrukci řešení, které se liší od Nashova, ale splňují vždy právě 3 axiomy.*

- *INV* *Za řešení můžeme označit body $(s_1, s_2)$ které maximalizují součet $s_1 + s_2$. Pokud jich je více, tak zvolíme nejbližší přímce skrz bod $D$ se sklonem $-1$.*
- *SYM* *Je-li maximalizovaná funkce $f(x,y) = (x-d_1)^\alpha (y-d_2)^{1-\alpha}$*
- *IIA* *Označme $s_i'$ maximální možný užitek hráče $i$ na množině $\{s|s \in S, s \ge D\}$. Definujme jako řešení bod ležící na spojnici $D$ a $(s_1', s_2')$, na hr anici množiny $S$.*
- *PAR* *Za řešení můžeme definovat právě bod $D$.*

**Příklad 1.1.11** *(Lehký). Na příkladu $A = \{(a,a')|a + a' \le 1, a \ge 0, a' \ge 0\}, u_1(x) = x, u_2(x) = \sqrt{x}, D = (0,0)$ si ověřte, že hráč více averzní k riziku získá menší podíl (poloviční v tomto případě).*

## 1.2 Rubinsteinovo vyjednávání

Na rozdíl od Nashova vyjednávání, Rubinsteinův přístup předpokládá danou strukturu vyjednávání, tzv. střídajících se nabídek *(alternating offers)*. Strategické modelování vyjednávání přináší řadu potenciálních problémů. Příliš jednoduchý model nepostihne realitu a nedá tak užitečné výsledky. Naopak příliš složitý model nemusí být řešitelný, nebo může poskytovat pouze povrchní, příliš obecné výsledky. Na ekonomickém modelování je zřejmě nejtěžší umět najít rovnováhu mezi přílišným a nedostatečným zjednodušením. Jak se to podařilo v tomto případě uvidíte sami.

Rubeinsteinův model předpokládá zjednodušenou strukturu vyjednávání. Hráči se střídají v předkládání nabídek protihráči. Pokud je nabídka odmítnuta, protihráč získává možnost předložit

[5] Všimněte si, že podle axiomu PAR stačí hledat řešení na hranici, tedy stačí studovat situace, ve kterých jsou všechny prostředky rozděleny beze zbytku.

[6] Pro diferencovatelné konkávní funkce platí, že jejich první derivace je klesající.

[7] Nakreslete si obrázek a uvědomte si, že $h(0) = 0$. Tvrzení platí obecněji, pro $h(0) \ge 0$.

svoji nabídku. Hra končí v okamžiku, kdy je předložena nabídka přijata. Pokud není shody dosaženo, získává každý hráč svoji vedlejší hodnotu *(outside option)*. Motivací pro dosažení shody v konečném čase jsou časové preference hráčů, neboli diskontování výhry. To znamená, že každý hráč upřednostňuje získat danou hodnotu ihned, proti možnosti získat ji později. Mezičasové preference jsou obvykle modelovány stejně jako úročení. Diskontní sazba $\delta < 1$ znamená, že předmět o hodnotě 1 získaný okamžitě, má hodnotu $\delta$, je-li získán v dalším kole. Dále množinu možných dohod označujeme $X$ a uvažujeme $X \subset \mathbb{R}^n$, kde $n$ je počet hráčů (obvykle 2). I když teorii není problém zobecnit, stejně jako v Nashově teorii můžeme problém přenést z obecné množiny $X$ do podmnožiny reálných čísel, a to díky užitkové funkci.

V nejjednodušším případě má předmět hodnotu 1, vedlejší možnost hodnotu 0, oba hráči mají stejnou diskontní sazbu $\delta > 1$ a každý z hráčů maximalizuje hodnotu předmětu, kterou získá.[8] Jednotlivá kola (v každém kole podává nabídku pravě jeden hráč) označujeme přirozenými čísly $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$. V každém kole daný hráč podá nabídku $0 \leq x \leq 1$, na kterou protihráč odpoví ANO nebo NE. Výsledek hry označujeme pomocí dvojce $(x, t)$, kde $x$ označuje podíl, který první hráč získal a $t$ čas (index kola), ve kterém došlo ke shodě. Bod neshody označujeme $D$.

Podstatný, avšak poměrně přirozený předpoklad je, že hráče nezajímá, jakým způsobem došlo k dojednání daného výsledku, pouze výsledek samotný. Například, pokud došlo k dohodě ve 3. kole a oba hráči získají polovinu předmětu, pak jejich užitek nezáleží na tom, jaká nabídka byla odmítnuta v prvním a druhém kole.

Na rozdíl od Nashova vyjednávání, kde podstatnou roli hrál postoj hráčů k riziku, zde je rozhodujícím postoj k času—trpělivost. Musíme tedy specifikovat preference hráčů přes množinu $(X \times T) \cup \{D\}$. V našem případě se primárně budeme zabývat případem, kdy $X = [0, 1]$, ale teorii lze velmi snadno zobecnit. Po preferencích $(\succeq_i)$požadujeme, aby byly kompletní, transitivní a reflexivní. Tím již máme naznačenu extenzivní formu hry. Formální definici vynecháváme.

Pro hlavní výsledky modelu musíme upřesnit mezičasové preference.

**Axiom 1.2.1** *Neshoda je nejhorší možný výsledek. Tedy každý shoda $(x, t) \in X \times T$ je preferována před neshodou $D : (x, t) \succeq_i D$, pro všechna $i$.*

Druhý axiom požaduje, aby hráči usilovali o získání daného předmětu. Tedy aby mezi shodami v daném kole preferovaly ty, které jim zaručí větší podíl.

**Axiom 1.2.2** *Předmět je hodnotný (desirable) . V libovolném kole $t \in T$ a pro libovolné $x, y \in X$ platí, že $(x, t) \succ_i (y, t)$ tehdy a jen tehdy $x_i > y_i$.*

Dále požadujeme, aby hráči byli netrpělivý, tedy každá shoda byla preferována dříve.

**Axiom 1.2.3** *Pro každé $t < s \in T$ a $x \in X$ platí $(x, t) \succeq_i (x, s))$. Preference je striktní, pokud hráč něco získá $x_i > 0$.*

Čtvrtý axiom zaručuje, že preference hráčů jsou spojité, v následujícím smyslu:

**Axiom 1.2.4** *Nechť $\{(x_n, t)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{(y_n, s)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti z $(X, T)$ takové, že $lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $lim_{n\to\infty} y_n = y$. Pak $(x, t) \succeq_i (y, s)$, pokud $(x_n, t) \succeq_i (y_n, s)$ pro všechna $n$.*

Lze ukázat, že poslední tři axiomy jsou ekvivalentní požadavku, že existuje spojitá užitková funkce $U_i : X \times T \to \mathbb{R}$, rostoucí v prvním argumentu, klesající ve druhém pokud je první argument kladný.

Pátý axiom výrazně zjednodušuje následující analýzu. Axiom požaduje, aby preference mezi dvěma dohodami $(x, t), (y, s)$ záležela pouze na $x, y$ a vzdálenosti $t$ a $s$, tedy $t - s$.

**Axiom 1.2.5** *Pro každé $t \in T, x, y \in X$ platí, že $(x, t) \succ_i (y, t + 1)$ tehdy a jen tehdy $(x, 0) \succ_i (y, 1)$.*

Je užitečné zavést pojem současné hodnoty *(present value)* dohody $(x, t)$. Současná hodnota je takový podíl $y$ získaný okamžitě (v kole 0), takový, že daný hráč je indiferentní mezi $(y, 0)$ a $(x, t)$. Označujeme $v_i(x_i, t) = y_i, (x, t) \sim_i (y, 0)$. Pokud žádné takové $y$ neexistuje, volíme $v_i(x_i, t) = 0$.

[8] Případ, kdy je předmět nedělitelný, je možné snadno vyřešit pomocí loterie. Návrhy v takovém případě nepředstavují podíl na daném předmětu, ale pravděpodobnosti, se kterou předmět danému hráči připadne v dané loterii. Pro zjednodušení budeme dále předpokládat, že předmět o který vyjednávání probíhá, je dokonale dělitelný.

Takto definovaná současná hodnota má očekávané vlastnosti. Platí, že $(y,t) \succ_i (x,s)$ tehdy a jen tehdy, když $v_i(y_i,t) > v_i(x_i,s)$.

Poslední podmínkou na mezičasové preference je, že náklady spojené z prodlení jsou vyšší pro vyšší podíl.

**Axiom 1.2.6** *Rozdíl $x_i - v_i(x_i,1)$ je rostoucí funkcí $x_i$.*

**Příklad 1.2.7** *(Lehký). Ověřte, že užitková funkce $U_i(x_i,t) = x_i - c_i t, u_i(D) = -\infty$ splňuje axiomy 1.2.1 až 1.2.5, ale ne axiom 1.2.6.*

**Příklad 1.2.8** *(Lehký). Ověřte, že užitková funkce $U_i(x_i,t) = \delta^t x_i, u_i(D) = -\infty$ splňuje axiomy 1.2.1 až 1.2.6.*

**Příklad 1.2.9** *Předpokládejte že užitkovou funkci $U_i(x_i,t) = \delta^t x_i$ obou hráčů. Nalezněte nějakou Nashovu rovnováhu. Dokážete pro každý výsledek $(x,0)$, tedy dohodu na $0 \leq x \leq 1$ v nultém kole najít Nashovu rovnováhu, která by k takovému výsledku vedla? Pro jednoduchost můžete uvažovat, že si hráči dělí koláč o velikosti $1$.*

**Řešení 1.2.10** *Vyřešíme druhou část problému. Popíšeme stacionární strategie, které vedou k výsledku $(x,0)$. Strategie prvního hráče je nabídnout $x$ a přijmout každou nabídku, která mu zaručuje alespoň $x$. Druhý hráč má stejnou strategii. Tato strategie vede okamžitě k výsledku $x$. Jde o Nashovu rovnováhu? Hráč 2 nemůže nikdy dosáhnout lepšího výsledku než $x$ a je tedy pro něj optimální jej přijmout hned v prvním kole. Podobně pro prvního hráče. Neexistuje tedy výhodná odchylka (profitable deviation) a tedy jde o Nashovu rovnováhu.*

**Příklad 1.2.11** *Předpokládejte že užitkovou funkci $U_i(x_i,t) = \delta^t x_i$ obou hráčů. Omezte se na následující strategie: Hráč 1 nabídne $\hat{x}$ a je akceptuje jakékoliv $y \geq \hat{y}$.[9] Druhý hráč nabízí $\hat{y}$ a přijme nabídku alespoň $\hat{x}$. Pro jaké hodnoty $\hat{x}, \hat{y}$ jde o DRVP (subgame perfect equilibrium)?*

**Řešení 1.2.12** *Definice DRVP vyžaduje, aby popsané strategie tvořili Nashovu rovnováhu v každé podhře (subgame). Začněme tedy podhrou v čase $t$, kdy hráč 1 dává nabídku. Popsané strategie nezávisí na historii a proto není relevantní, jaké předchozí nabídky byly odmítnuty. V DRVP hráč 2 musí odmítnout každou nabídku nižší než $x_2 = 1-x$. To je optimální jen tehdy, kdy $(x',t) \preceq_2 (\hat{y},t+1), \forall x' \leq \hat{x}$, neboť nabídka hráče 2 v dalším kole ($y$) je přijata.[10] Vzhledem ke spojitosti (1.2.4) musí tedy platit, že $(\hat{x},t) \preceq_2 (\hat{y},t+1)$ a podle 1.2.5 tedy $(\hat{x},0) \preceq_2 (\hat{y},1)$. Protože hráč 2 zároveň přijme nabídku $x$ v nultém kole, musí platit i $(\hat{x},0) \succeq_2 (\hat{y},1)$. Takovou situaci označujeme $(\hat{x},0) \sim_2 (\hat{y},1)$. Podobná úvaha pro prvního hráče dává $(\hat{x},1) \sim_1 (\hat{y},0)$.*

*Dosadíme-li specifickou užitkovou funkci $U_i(x_i,t) = \delta^t x_i$, pak dostaneme rovnice pro $\hat{x}$ a $\hat{y}$:*

$$(1-\hat{x}) = \delta(1-\hat{y}), \delta\hat{x} = y.$$

*Řešení tohoto systému je*

$$\hat{x} = \frac{1}{1-\delta}, \hat{y} = \frac{\delta}{1-\delta}.$$

*Toto je jediné řešení DRVP problému.*

Hlavní výsledek Rubensteinovy teorie je, že toto DRVP řešení je jednoznačné a to i když připustíme nestacionární strategie. Před jejím formulováním ale uvedeme potřebné lemma. Jeho důkaz je ponechán na čtenáři.

**Lemma 1.2.13** *Jestliže preference hráčů splňují axiomy 1.2.2 až 1.2.6, pak existuje jediné řešení $(x^*,y^*) \in X \times X$ rovnice*

$$y_1^* = v_1(x_1^*,1), x_2^* = v_2(y_2^*,1) \tag{3}$$

[9] Protože dělíme jednotkový koláč, pro zjednodušení budeme všechny nabídky popisovat podílem příslušejícím prvnímu hráči. Pokud tedy říkáme, že nějaký hráč nabízí $x$, tak to znamená, že navrhuje dohodu na rozdělení $(x,1-x)$, kde první složka přísluší prvnímu hráči.

[10] Implicitně využíváme výsledku teorie her, že stačí studovat jednorázové odchylky od rovnovážné strategie.

**Věta 1.2.14** *Pokud preference hráčů splňují axiomy 1.2.1 až 1.2.6, pak vyjednávání ve formě střídajících se nabídek má jediné DRVP řešení. Toto řešení je určeno rovnicemi (3). Strategie prvního hráče je nabídnout $x^*$ a přijmout jakoukoliv nabídku, která mu zaručuje alespoň $y_1^*$. Druhý hráč vždy nabízí $y^*$ a přijme každou nabídku, která mu zaručuje alespoň $x_2^*$. Výsledkem hry je okamžitá dohoda $(x, 0)$.*

**Důkaz 1.2.15** *Důkaz lze provést v několika krocích. Jednoznačnost DRVP, pokud je řešením požadovaných rovnic, plyne z toho, že systém (3) má jediné řešení, jak jsme ukázali v lemmatu 1.2.13. Druhým krokem je ukázat, že jde o DRVP řešení. V dalším kroku je vhodné ukázat, že každé další DRVP řešení zaručuje stejný zisk jako dokazované řešení. Závěrečným krokem je pak důkaz, že DRVP které zaručuje stejný zisk je dokazované DRVP.*

*Začneme důkazem, že jde o DRVP řešení. Definice DRVP (viz první přednáška) je taková, že strategie musí indukovat Nashovu rovnováhu v každé podhře. Nechť jsme tedy v čase t a nechť je to první hráč, kdo dává nabídku. Případ, kdy druhý hráč podává nabídku se řeší analogicky. Musíme zkusit najít výhodnou odchylku pro prvního hráče při dané strategii druhého hráče, a naopak.*

*Druhý hráč tedy je ochoten přijmout nabídku neostře lepší než $(x^*, t)$ a nabídne $(y^*)$ v dalším kole, tj. kole $t + 1$. Pokud první hráč nabídne dohodu, která je pro něj výhodnější a tak méně výhodná pro druhého hráče, tato nabídka bude odmítnuta. V dalším kole pak první hráč přijme nabídku druhého hráče $(y^*, t+1)$, čímž si ale nepolepší z definice $x^*, y^*$. Pokud by nabídku druhého hráče odmítl, mohl by získat $x^*$ v $t + 2$ a později, což pro něj není výhodné. Je samozřejmé, že nabídnout méně než $x^*$ pro prvního hráče rovněž není výhodné, přestože tato nabídka by byla ihned přijata. Shrnuto: Pokud první hráč chce více, tak toho nedosáhne, jeho požadavek je odmítnut a k dalším dohodám může dojít později. Chtít méně není výhodné.*

*Pokud bychom zafixovali strategii prvního hráče a podívali se na možnosti druhé hráče, tak zjistíme, že pro něj přijmout $x^*$ v čase t je stejné jako získat $y^*$ o kolo později, opět z definice $x^*, y^*$. Požadovat v některém kole více (ať už při odmítání nabídky či podávání vlastní nabídky) mu tedy nemůže polepšit, Klíčové je, že strategie prvního hráče se nemění.*

*Jde tedy o Nashovu rovnováhu v podhře, ve které je na tahu první hráč. V podstatě identická úvaha platí v situaci, kdy je v daném kole na tahu druhý hráč. Daná strategie tedy tvoří DRVP. Zbývá náročnější část důkazu, kdy musíme ukázat, že jde o jedinou DRVP. Postup důkazu lze použít i v situaci, kdy je zadán podobný problém a hledáme jeho řešní, nikoliv jen důkaz jednoznačnosti.*

*Označme $M_i$ a $m_i$ nejvyšší a nejnižší možnou výhru v DRVP v okamžiku, kdy je na tahu hráč $i$. Jakmile ukážeme, že*

$$M_1 = m_1 = x_1^*, M_2 = m_2 = y_2^*, \tag{4}$$

*bude důkaz jednoznačnosti ukončen díky následujícímu argumentu: V libovolné DRVP musí být první nabídka přijata, ať už je na tahu první nebo druhý hráč. Nechť je například na tahu první hráč. Kdyby došlo k odmítnutí první nabídky, následuje podhra, ve které je na tahu druhý hráč a který tedy vyhraje $y_2^*$. První hráč vyhraje tedy nejvíce $y_1^*$, což má současnou hodnotu $v_1(y_1^*, 1)$ což je méně než $y_1$ v čase 0 a to je méně než $x_1$ v čase 0. Kdyby tedy šlo o SPE ve kterém by první nabídka prvního hráče byla odmítnuta, neplatilo by (4). Podobně kdyby začínal druhý hráč a jeho první nabídka by byla odmítnuta. Takže pokud první hráč nabídne $x^*$, je jeho nabídka druhým hráčem přijata a když druhý hráč nabídne $y^*$, je jeho nabídka přijata prvním hráčem. První hráč rovněž odmítne jakoukoliv nabídku, která mu v daném okamžiku nabízí méně než $y_1^*$ (díky tomu, co by mu zaručilo čekání o jedno kolo více) a přijal by cokoliv, co nabízí více. Podobně pro druhého hráče.*

*Zbývá tedy důkaz (4). Nejprve ukážeme, že $m_2 \geq 1 - v_1(M_1, 1)$. Tento zápis znamená, že nejmenší hodnota výhry druhého hráče musí být doplněk k nejvyšší možné hodnotě výhry prvního hráče o kolo později. Jinými slovy, když je na tahu druhý hráč, tak může nabídnout prvnímu hráči tolik, jakou hodnotu pro něj (prvního hráče) má výhra, kdyby začínal o kolo později. Nejvíce, čeho může první hráč dosáhnout je $M_1$ když je na tahu, tedy o kolo později. Současná hodnota je pro něj $v_1(M_1, 1)$ a pokud je mu nabídnuto alespoň tolik druhým hráčem když je na tahu, nabídku přijme.*

*Nyní ukážeme, že $M_1 \leq 1 - v_2(m_2, 1)$. Když druhý hráč odmítne nabídku prvního hráče, pak v druhém kole získá alespoň $m_2$ a tedy odmítne cokoliv, co mu v prvním kole nezaručí současnou hodnotu této výhry v druhém kole, tedy $v_2(m_2, 1)$. První hráč nemůže tedy získat více než $1 - v_2(m_2, 1)$ v prvním kole. Protože ale ani v dalších kolech nemůže získat více, platí $M_1 \leq 1 - v_2(m_2, 1)$*

*Stejnými argumenty lze ukázat i* $m_1 \geq 1 - v_2(M_2, 1)$ *a* $M_2 \leq 1 - v_1(m_1, 1)$. *Dále víme, že* $m_2 \leq y_2^*, M_1 \geq x_1^*$ *a* $m_1 \leq y_1, M_2 \geq x_2^*$. *Protože jde o dělení koláče o velikosti 1, platí i* $x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1$. *Z těchto vztahů musíme ukázat* $M_2 = m_2 = y_2^*$ *a* $M_1 = m_1 = y_1^*$. *I když to není obtížné, důkaz přece jenom není zcela triviální.*

Následující postup ukazuje jednodušší způsob jak najít DRVP.

**Příklad 1.2.16** *Nechť oba hráči mají stejne* $\delta < 1$ *a dělí si koláč o velikosti 1. Nalezněte DRVP.*

**Řešení 1.2.17** *Označme* $M_1$ *maximum, které si může první hráč zajistit v DRVP, když je na tahu. Začněme studovat strategie odzadu, například od třetího kola. Ve druhém kole dává nabídku druhý hráč. Jestliže první hráč v následujícím kole může získat* $M$, *musí mu druhý hráč nabídnout* $\delta M$ *a nechat si tak* $1 - \delta M$. *V prvním kole tak první hráč musí nabídnout druhému hráči alespoň* $\delta(1 - \delta M)$ *a ponechat si tak může* $1 - \delta(1 - \delta M)$. *V rovnováze částka, kterou takto může získat musí být samozřejmě rovna* $M$ *a tak* $M = 1 - \delta(1 - \delta M)$, *což má řešení* $M = \frac{1}{1+\delta}$. *Všimněte si, že tento argument nezávisí na tom, že jde o maximum. Argument platí pro libovolnou DRVP. Výsledek je ale stejný, existuje jediné řešení,* $M = \frac{1}{1+\delta}$. *Každý hráč je ochoten přijmout nabídku ve výši* $1 - M = \frac{\delta}{1+\delta}$. *Zatím jsme nedokázali, že jde o DRVP, ale ukázali jsme, že pokud jde o DRVP, musí jít o rovnováhu jedinou. Zde můžeme použít část formálního důkazu.*

Tento postup je výhodný pro hledání řešení podobných příkladů, například když se liší diskontní faktory, nebo hráči mají vedlejší příležitost (outside option).

**Příklad 1.2.18** *(Lehký). Uvažte stejný příklad s jedinou modifikací. Diskontní faktory hráčů se liší, a jsou* $\delta_1, \delta_2$. *Odvoďte DRVP.*

**Řešení 1.2.19** *Mělo by vám vyjít řešení*

$$x_1^* = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}, y_1^* = \frac{\delta_1(1 - \delta_2)}{1 - \delta_1\delta_2} \qquad (5)$$

*Všimněte si, že když se daný hráč stane trpělivějším (*$\delta_i$ *vzroste), pak se jeho podíl zvýší. Pokud se některý hráč stane nekonečně trpělivý* $\delta_i \mapsto 1$, *pak získá koláč celý.*

**Příklad 1.2.20** *Obtížnost: střední. Vyřešte příklad s dělením jednotkového koláče při stejných diskontních faktorech za situace, kdy první hráč předkládá nabídku ve dvou po sobě následujících kolech (tedy v kolech 0,1,3,4, atd.).*

**Příklad 1.2.21** *Vyřešte problém vyjednávání, kdy druhý hráč má možnost ukončit vyjednávání poté, co mu první hráč předloží nabídku, a tím získá b. První hráč získá a, přičemž platí* $a + b < 1$. *Diskutujte DRVP řešení. Kdy (tj. pro jaké hodnoty b možnost ukončit vyjednávání zvýší rovnovážný zisk prvního hráče?*

**Řešení 1.2.22** *Označme* $m$ *výhru prvního hráče v DRVP. V případě, že druhý hráč neukončí hru po nabídce od prvního hráče, musí dát prvnímu hráči nabídku alespoň ve výši* $\delta m$. *Druhému hráči pak zůstane* $1 - \delta m$. *První hráč v předchozím kole musí nabídnout druhému hráči alespoň* $\delta(1 - \delta m)$. *Druhý hráč dá přednost přednost ukončení hry pokud* $b > \delta(1 - \delta m)$, *jinak přijme nabídku* $\delta(1 - \delta m)$. *Pokud nabídku přijme, pak stejně jako základním příkladu* $m = \frac{1}{1+\delta}$. *Pokud* $b > \delta(1 - \delta m)$, *pak první hráč nabídne druhému hráči právě b, ten tuto nabídku přijme a první hráč získá* $m = 1 - b$. *Platí, že* $b < \delta(1 - \delta m)$ *pro* $m = \frac{1}{1+\delta}$ *tehdy a jen tehdy, pokud* $b < \frac{\delta}{\delta+1}$.

*Výsledkem je, že pro dostatečně malé* $b < \frac{\delta}{\delta+1}$ *je* $m = \frac{1}{\delta+1}$, *jinak* $m = 1 - b$. *Všimněte si, že pro dostatečně malá b zvýšení b na výsledku nic nezmění. Srovnejte tento výsledek s výsledek Nashova vyjednávaní.*

# Reference


OSBORNE, M. J., AND A. RUBINSTEIN (1990): *Bargaining and Markets.* Academic Press Inc.