

Zkouška 12.12

Toto zadání má 2 (dvě) strany. Zkontrolujte si, že zadání je vytištěno i na druhé straně tohoto papíru. Při řešení nemůžete používat žádné knihy, zápisky či texty, ani kalkulačku. Mobilní telefon si vypněte. Na písemku máte 150 minut od zahájení testu. Každý příklad piště prosím na zvláštní papír, který podepíšete a na který napíšete číslo příkladu. Na závěr písemky vložte všechna zadání do průhledné složky, kterou zanedlouho obdržíte. Hodnota písemky je 80% z celkové známky. Všechny následující příklady mají stejnou váhu, ale jejich obtížnosti se liší. Pokud nevíte, jak některý příklad vyřešit, může být optimální věnovat se ostatním částem. Výsledky budou zveřejněny vložení celkové známky do ISu, pravděpodobně do jednoho týdne. V nepravděpodobném případě, že dostanete F , další termín je vypsán na pondělí 5. ledna. V té době si také budete moci prohlédnout hodnocení této písemky. Vzorové řešení bude zanedlouho zveřejněno na webu (v ISu) a bude k dispozici poté, co všichni odevzdají řešení.

Hodně zdaru!

Příklad 1.1 (Turnaj) Dva kandidáti, A a B se uchází o kontrakt, který vítězi přinese zisk 1 000 000 Kč. Kontrakt může být přidělen jen jednomu z nich. Oba kandidáti mají užitkovou funkci $U(x, e) = x - e$, kde x je přínos z kontraktu (1 000 000 Kč), jestliže je kandidátovi kontrakt přidělen a 0 jinak. Proměnná e označuje finanční ekvivalent úsilí, který kandidát může vyvinout za účelem získání kontraktu.

Předpokládejte, že oba hráči současně zvolí úsilí $e_A \geq 0, e_B \geq 0$. Kontrakt získá ten z hráčů, který vyvine vyšší úsilí. Pokud oba hráči zvolí stejné úsilí, každý má stejnou, tedy padesátiprocentní, pravděpodobnost, že kontrakt získá.

1. Zapište tento problém jako hru dvou hráčů v normální formě.
2. Nalezněte všechny (čisté) Nashovy rovnováhy.
3. Dokažte, že neexistuje žádná smíšená Nashova rovnováha. Pamatujte, že ve smíšené rovnováze hry s nekonečným počtem strategií libovolný hráč hraje jen konečně mnoho strategií s kladnou pravděpodobností. Náповěda: Označte e_1 a e_2 nejmenší úsilí zvolené s kladnou pravděpodobností (p_1, p_2) prvním a druhým hráčem. Diskutujte, jestli si některý z hráčů může polepšit změnou strategie (změnou akce nebo změnou pravděpodobnosti volby dané akce, nebo obojí).
4. Necht' pravděpodobnost výhry prvního hráče je $\frac{e_A}{e_A + e_B}$, $e_A \geq 0, e_B \geq 0$, pokud je úsilí alespoň jednoho hráče kladné, $\frac{1}{2}$ jinak. Nalezněte čistou Nashovu rovnováhu hry, ve které oba hráči volí úsilí současně. Jaké jsou pravděpodobnosti výhry hráčů A a B ?

Příklad 1.2 Plánujete najmout dodavatele. Vaše užitková (zisková) funkce je $u(x, w) = \sqrt{x} - w$, kde x je množství dodané dodavatelem a w je vyplacená částka za dodávku (mzda). Existují dva typy dodavatelů. Jeden má nízké mezní náklady, $c_L = 0.05$ a druhý je má vysoké, $c_H = 0.075 = \frac{1}{10} \frac{3}{4}$.¹ Oba mají nulové fixní náklady. Oba typy dodavatelů jsou stejně pravděpodobné. Oba dodavatelé jsou ochotni přijmout kontrakt na kterém neprodělají (tj. mají zisk alespoň 0). Dodavatelé znají svůj typ.

1. Jednáte s náhodně vybraným dodavatelem.² Jeho náklady jsou pozorovatelné, tedy přesně vidíte, jaké má tento konkrétní dodavatel náklady. Jaký nabídnete kontrakt dodavatelům s nízkými náklady? Jaký s vysokými náklady? Jaký je váš očekávaný užitek před tím, než se dozvíte náklady dodavatele?
2. Od teď dále uvažujte, že náklady nejsou pozorovatelné. Nabízíte kontrakty ve tvaru $\{(w^*, x^*)\}$. Nalezněte optimální kontrakt přijatelný pro oba typy dodavatelů zároveň. Uvědomte si, že takový kontrakt musí být přijatelný pro oba typy dodavatelů. Spočítejte váš očekávaný zisk.

¹Tato zdánlivě škaredá čísla zjednoduší některé výpočty později. Doporučuji vám nedosazovat konkrétní hodnoty dokud jste schopni dále pokračovat obecně.

²Předpokládejte, že nemáte možnost jít za jiným dodavatelem, pokud se vám tento „nelíbí“ z libovolného důvodu. Chcete s ním uzavřít smlouvu, pokud na ní neproděláte (očekávaný zisk je alespoň 0).

3. Nalezněte optimální kontrakt přijatelný jen pro jeden typ dodavatele. Jaký typ dodavatele to musí být? Spočítejte váš očekávaný zisk. Nezapomeňte, že v polovině případů narazíte na dodavatele, který vámi nabízený kontrakt nepřijme.
4. Nalezněte optimální dvojici kontraktů oddělujících oba typy hráčů, tj. dva kontrakty takové, že dodavatelé různých kontraktů přijmou různé kontrakty. Spočítejte váš očekávaný zisk. Nezapomeňte, že kontrakt pro daného dodavatele musí splňovat dvě podmínky (podmínka přijatelnosti a musí být lepší než alternativní kontrakt určený pro jiný typ), ale z těchto 4 podmínek jen 2 podmínky jsou splněny s rovností. Diskutujte které a proč, pokud tento fakt použijete při řešení.
5. Diskutujte, co se stalo s užítky dodavatelů? Jak se změnil Váš užitek? Jak se změnilo poptávané množství v porovnání s případem kdy úsilí je pozorovatelné?

Příklad 1.3 V řadě stojí n lvů, kde $n \geq 3$ je přirozené číslo. Lvi jsou očíslováni $1, 2, \dots, n$. Hra začíná rozhodnutím předposledního lva, zda sežrat lva posledního. Pokud se předposlední lev (tedy lev s číslem $n - 1$) rozhodne posledního lva nesežrat, hra končí. Pokud jej sežere, sám se stane posledním lvem a jeho soused, nyní předposlední lev (s číslem $n - 2$) se rozhoduje, zda sežrat nyní posledního lva (jehož číslo je $n - 1$). Hra končí tím, že se lev, který se rozhoduje (je na řadě), rozhodne posledního lva nesežrat a nebo tím, že zůstane jediný lev.

Každý lev preferuje zůstat naživu a sežrat lva (když má možnost) před tím zůstat na živu a nikoho nesežrat. Obě tyto možnosti jsou preferovány před tím být sežrán.³

1. Nakreslete si hru jako poziční hru například pro $n = 3$ nebo $n = 4$ (nebo více, pokud potřebujete).
2. Nalezněte všechny dokonalé rovnováhy vzhledem k podhrám (subgame perfect equilibria). Návod: Uvědomte si, co jsou podhry a začněte od té poslední. Pokud si ani tak nevíte rady, zkuste si problém vyřešit postupně pro $n = 2, 3, 4, (5)$.

Příklad 1.4 Zvažujete možnost otevřít si zmrzlinový stánek na pláži. Na pláži o šíři 1km (pláž vypadá jako úsečka) už existuje jeden stánek ve vzdálenosti 300m od levého okraje. Nákupní i prodejní cenu zmrzliny vám udává váš dodavatel, a je stejná jako cena u již existujícího stánku. Celkem 1000 lidí je rovnoměrně rozmístěno podél pláže, každý z nich má ručník ve vzdálenosti $n = 1, 2, \dots, 1000$ m od levého okraje. Každý z nich si za jeden den koupí jedenkrát zmrzlinu, vždy od nejbližšího stánku. Lidé nakupují tam, kde je to blíže. V případě, že dva stánky jsou stejně daleko, volba od koho nakupovat je náhodná. Náklady na pronájem stánku (a nakoupení ledu) jsou 1000Kč na den, jednu porci zmrzliny nakupujete za 9 Kč a prodáváte za 15 Kč. Zatím předpokládejte, že je to vaše jediná možnost výdělků. Samozřejmě nechcete prodávat—kdybyste měli dosáhnout záporného zisku, raději nevstoupíte.

1. Když si můžete vybrat, kde bude váš stánek umístěn (již existující stánek se hýbat nemůže), jakou pozici si vyberete? Pokud chcete, můžete uvažovat, že pozice stánku je určena na metry a dva stánky nemohou být umístěny na stejné pozici. Zákazníci jdou vždy do bližšího stánku, i kdyby rozdíl vzdáleností byl jen 1 metr. Rozhodnete se vstoupit i v případě, že si jinde máte možnost vydělat za den 3 000 Kč ve stejně náročné práci?
2. Co když vám obecní úřad nařídí, abyste vstoupili na pozici 300m od pravého okraje. Vstoupíte, i když si jinde můžete vydělat 3 000 Kč?

³Pro řešení hry žádné konkrétní číselné hodnoty nejsou potřeba. Pokud máte pocit, že by vám ale pomohly, můžete předpokládat například hodnotu užitku rovnu 1, pokud lev přežil a sežral sousedního lva, 0 pokud přežil a nesežral a -1 pokud byl sežrán, bez ohledu na to, zda někoho sám sežral.