

Hodnocení kontingenčních tabulek

Motivace

Při zpracování dat se velmi často setkáme s úkolem zjistit, zda dvě náhodné veličiny nominálního typu jsou stochasticky nezávislé. Např. nás může zajímat, zda ve sledované populaci je barva očí a barva vlasů nezávislá.

Zpravidla chceme také zjistit intenzitu případné závislosti sledovaných dvou veličin. K tomuto účelu byly zkonstruovány různé koeficienty, které nabývají hodnot od 0 do 1. Čím je takový koeficient bližší 1, tím je závislost mezi danými dvěma veličinami silnější a čím je bližší 0, tím je slabší.

Kontingenční tabulky

Nechť X, Y jsou dvě nominální náhodné veličiny (tj. obsahová interpretace je možná jenom u relace rovnosti). Nechť X nabývá variant $x_{[1]}, \dots, x_{[r]}$ a Y nabývá variant $y_{[1]}, \dots, y_{[s]}$.

Označme:

$\pi_{jk} = P(X = x_{[j]} \wedge Y = y_{[k]}) \dots$ simultánní pravděpodobnost dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$

$\pi_{.j} = P(X = x_{[j]}) \dots$ marginální pravděpodobnost varianty $x_{[j]}$

$\pi_{.k} = P(Y = y_{[k]}) \dots$ marginální pravděpodobnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní a marginální pravděpodobnosti zapíšeme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$...	$y_{[s]}$	$\pi_{.j}$
x	π_{jk}				
$x_{[1]}$		π_{11}	...	π_{1s}	$\pi_{.1}$
...	
$x_{[r]}$		π_{r1}	...	π_{rs}	$\pi_{.r}$
$\pi_{.k}$		$\pi_{.1}$...	$\pi_{.s}$	1

Nyní pořídíme dvourozměrný náhodný výběr rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskretní náhodný vektor (X, Y) . Zjištěné absolutní simultánní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$...	$y_{[s]}$	$n_{.j}$
x	n_{jk}				
$x_{[1]}$		n_{11}	...	n_{1s}	$n_{.1}$
...	
$x_{[r]}$		n_{r1}	...	n_{rs}	$n_{.r}$
$n_{.k}$		$n_{.1}$...	$n_{.s}$	n

$n_{.j} = n_{j1} + \dots + n_{js}$ je marginální absolutní četnost varianty $x_{[j]}$

$n_{.k} = n_{1k} + \dots + n_{rk}$ je marginální absolutní četnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní pravděpodobnost π_{jk} odhadneme pomocí simultánní relativní četnosti

$p_{jk} = \frac{n_{jk}}{n}$, marginální pravděpodobnosti π_j a π_k odhadneme pomocí marginálních

relativních četností $p_j = \frac{n_{j.}}{n}$ a $p_k = \frac{n_{.k}}{n}$.

Testování hypotézy o nezávislosti

Testujeme nulovou hypotézu H_0 : X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny proti alternativě H_1 : X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny. Kdyby náhodné veličiny X, Y byly stochasticky nezávislé, pak by platil multiplikativní vztah

$\forall j = 1, \dots, r, \forall k = 1, \dots, s: \pi_{jk} = \pi_j \cdot \pi_k$ neboli $\frac{n_{jk}}{n} = \frac{n_{j.}}{n} \cdot \frac{n_{.k}}{n}$, tj. $n_{jk} = \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}$. Číslo

$m_{jk} = \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}$ se nazývá **teoretická četnost** dvojice variant ($x_{[j]}$, $y_{[k]}$).

Testová statistika:
$$K = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n} \right)^2}{\frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}}$$

Platí-li H_0 , pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)), \infty \rangle$.

Hypotézu o nezávislosti veličin X, Y tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α , když $K \geq \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))$.

Podmínky dobré aproximace

Rozložení statistiky K lze aproximovat rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$, pokud teoretické četnosti $\frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}$ aspoň v 80% případů nabývají hodnoty větší nebo rovné 5 a ve zbylých 20% neklesnou pod 2. Není-li splněna podmínka dobré aproximace, doporučuje se slučování některých variant.

Měření síly závislosti

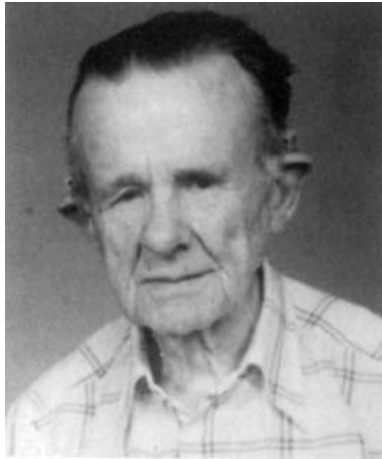
a) **Symetrická míra** (vyjadřuje intenzitu vzájemné závislosti veličin X, Y)

Cramérův koeficient: $v = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}$, kde $m = \min\{r, s\}$. Tento koeficient nabývá

hodnot mezi 0 a 1. Čím blíže je 1, tím je těsnější závislost mezi X a Y, čím blíže je 0, tím je tato závislost volnější.

Význam hodnot Cramérova koeficientu:

mezi 0 až 0,1 ... zanedbatelná závislost,
 mezi 0,1 až 0,3 ... slabá závislost,
 mezi 0,3 až 0,7 ... střední závislost,
 mezi 0,7 až 1 ... silná závislost.



Carl Harald Cramér (1893 – 1985): Švédský matematik

b) **Asymetrická míra** (hodnotí intenzitu jednostranné závislosti vysvětlované veličiny na vysvětlující veličině)

Koeficient nejistoty (uncertainty coefficient):

$$Y \text{ závisí na } X: U_{Y/X} = \frac{-\sum_{j=1}^r p_{j.} \ln p_{j.} - \sum_{k=1}^s p_{.k} \ln p_{.k} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s p_{jk} \ln p_{jk}}{-\sum_{k=1}^s p_{.k} \ln p_{.k}},$$

$$X \text{ závisí na } Y: U_{X/Y} = \frac{-\sum_{j=1}^r p_{j.} \ln p_{j.} - \sum_{k=1}^s p_{.k} \ln p_{.k} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s p_{jk} \ln p_{jk}}{-\sum_{j=1}^r p_{j.} \ln p_{j.}},$$

$$\text{Vzájemná závislost: } U_{\text{sym}} = \frac{2}{\frac{1}{U_{Y/X}} + \frac{1}{U_{X/Y}}}$$

Upozornění: Výraz $-\sum_{j=1}^r p_{j.} \ln p_{j.}$ představuje entropii $H(X)$ veličiny X . Vzorec

pro koeficient nejistoty $U_{Y/X}$ lze tedy psát ve tvaru:

$$U_{Y/X} = \frac{H(X) + H(Y) - H(XY)}{H(Y)}$$

Koeficient nejistoty nabývá hodnot mezi 0 a 1. Hodnota 0 znamená, že znalost jedné proměnné nám nepřináší žádnou informaci o druhé proměnné, zatímco

hodnota 1 indikuje, že nezávisle proměnná perfektně předpovídá hodnoty závisle proměnné.

Příklad

V sociologickém průzkumu byl z uchazečů o studium na vysokých školách pořízen náhodný výběr rozsahu 360. Mimo jiné se zjišťovala sociální skupina, ze které uchazeč pochází (veličina X) a typ školy, na kterou se hlásí (veličina Y). Výsledky jsou zaznamenány v kontingenční tabulce:

Sociální skupina	Typ školy			n _j
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
n _k	140	110	110	360

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny. Vypočtěte Cramérův koeficient a koeficient nejistoty $U_{Y/X}$.

Řešení:

Nejprve vypočteme všech 12 teoretických četností:

$$\frac{n_{1,n_1}}{n} = \frac{90 \cdot 140}{360} = 35, \quad \frac{n_{1,n_2}}{n} = \frac{90 \cdot 110}{360} = 27,5, \quad \frac{n_{1,n_3}}{n} = \frac{90 \cdot 110}{360} = 27,5,$$

$$\frac{n_{2,n_1}}{n} = \frac{100 \cdot 140}{360} = 38,9, \quad \frac{n_{2,n_2}}{n} = \frac{100 \cdot 110}{360} = 30,6, \quad \frac{n_{2,n_3}}{n} = \frac{100 \cdot 110}{360} = 30,6,$$

$$\frac{n_{3,n_1}}{n} = \frac{60 \cdot 140}{360} = 23,3, \quad \frac{n_{3,n_2}}{n} = \frac{60 \cdot 110}{360} = 18,3, \quad \frac{n_{3,n_3}}{n} = \frac{60 \cdot 110}{360} = 18,3,$$

$$\frac{n_{4,n_1}}{n} = \frac{110 \cdot 140}{360} = 42,8, \quad \frac{n_{4,n_2}}{n} = \frac{110 \cdot 110}{360} = 33,6, \quad \frac{n_{4,n_3}}{n} = \frac{110 \cdot 110}{360} = 33,6$$

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny, všechny teoretické četnosti převyšují číslo 5.

Nyní dosadíme do vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{(50 - 35)^2}{35} + \frac{(30 - 27,5)^2}{27,5} + \dots + \frac{(50 - 33,6)^2}{33,6} = 76,84.$$

Dále stanovíme kritický obor:

$$W = \langle \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)), \infty \rangle = \langle \chi^2_{0,95}((4-1)(3-1)), \infty \rangle = \langle \chi^2_{0,95}(6), \infty \rangle = \langle 12,6, \infty \rangle$$

Protože $K \in W$, hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$$\text{Vypočteme Cramérův koeficient: } V = \sqrt{\frac{76,4}{360 \cdot 2}} = 0,3267.$$

Hodnota Cramérova koeficientu svědčí o tom, že mezi veličinami X a Y existuje středně silná závislost.

Vypočteme koeficient nejistoty. Nejprve provedeme pomocné výpočty entropií:

$$H(X) = -\left(\frac{90}{360} \ln \frac{90}{360} + \frac{100}{360} \ln \frac{100}{360} + \frac{60}{360} \ln \frac{60}{360} + \frac{110}{360} \ln \frac{110}{360}\right) = 1,363289$$

$$H(Y) = -\left(\frac{140}{360} \ln \frac{140}{360} + \frac{110}{360} \ln \frac{110}{360} + \frac{110}{360} \ln \frac{110}{360}\right) = 1,091838$$

$$H(XY) = -\left(4 \cdot \frac{50}{360} \ln \frac{50}{360} + 3 \cdot \frac{30}{360} \ln \frac{30}{360} + 3 \cdot \frac{10}{360} \ln \frac{10}{360} + 2 \cdot \frac{20}{360} \ln \frac{20}{360}\right) = 2,337717$$

Nyní vypočteme

$$U_{Y/X} = \frac{H(X) + H(Y) - H(XY)}{H(Y)} = \frac{1,363289 + 1,091838 - 2,337717}{1,091838} = 0,107534$$

Hodnota koeficientu nejistoty je nízká, predikce typu školy na základě sociální skupiny, z níž uchazeč pochází, by nebyla příliš kvalitní.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných (X - sociální skupina, Y - typ školy, četnost) a 12 případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	I	univerzitní	50
2	I	technický	30
3	I	ekonomický	10
4	II	univerzitní	30
5	II	technický	50
6	II	ekonomický	20
7	III	univerzitní	10
8	III	technický	20
9	III	ekonomický	30
10	IV	univerzitní	50
11	IV	technický	10
12	IV	ekonomický	50

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Očekávané četnosti. Dostaneme kontingenční tabulku teoretických četností:

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (typ školy)				
Četnost označených buněk > 10				
Pearsonův chí-kv. : 76,8359, sv=6, p=,000000				
X	Y univerzitní	Y technický	Y ekonomický	Řádk. součty
I	35,0000	27,5000	27,5000	90,0000
II	38,8889	30,5556	30,5556	100,0000
III	23,3333	18,3333	18,3333	60,0000
IV	42,7778	33,6111	33,6111	110,0000
Vš.skup.	140,0000	110,0000	110,0000	360,0000

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny. V záhlaví tabulky je uvedena hodnota testové statistiky $K = 76,8359$, počet stupňů volnosti 6 a odpovídající p-hodnota. Je velmi blízká 0, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny.

Hodnotu testové statistiky, Cramérův koeficient a koeficient nejistoty dostaneme také tak, že na záložce Možnosti zaškrtneme Pearsonův & M-V chí kvadrát, Cramérovo V a Koeficienty nejistoty, na záložce Detailní výsledky vybereme Detailní 2 rozm. tabulky.

Statist.	Statist. : X(4) x Y(3) (typ školy)		
	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	76,83589	df=6	p=,000000
M-V chí-kvadr.	84,53528	df=6	p=,000000
Fí	,4619881		
Kontingenční koeficient	,4193947		
Cramér. V	,3266749		
Koeficient nejistoty	X=,0861227	Y=,1075343	X Y=,09564

Testování hypotézy o homogenitě (o shodnosti struktury)

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

$H_0: \pi_{1k} = \pi_{2k} = \dots = \pi_{rk}, k = 1, 2, \dots, s$ proti alternativě H_1 : aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší.

Nulová hypotéza tvrdí, že rozložení pravděpodobností náhodné veličiny Y je stejné za různých podmínek, které vyjadřují varianty náhodné veličiny X.

(Jde o podobný problém jako v analýze rozptylu jednoduchého třídění, kde porovnáváme shodu středních hodnot intervalové či poměrové proměnné. V tomto případě však porovnáváme shodu pravděpodobnostního rozložení nominální proměnné.)

Testová statistika i kritický obor jsou stejné jako při testování hypotézy o nezávislosti.

Příklad: V severozápadním Skotsku byla provedena studie, která měla prokázat, zda je procentuální zastoupení krevních skupin na celém území homogenní či nikoliv. V oblasti Eskdale bylo náhodně vybráno 100 osob, v oblasti Annandale 125 osob a v oblasti Nithsdale 253 osob. Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

oblast	Krevní skupina				n_j
	A	B	O	AB	
Eskdale	33	6	56	5	100
Annandale	54	14	52	5	125
Nithsdale	98	35	115	5	253
n_k	185	55	223	15	478

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 proved'te test homogenity.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných (X - oblast, Y – krevní skupina, četnost) a 12 případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	Eskdale	A	33
2	Eskdale	B	6
3	Eskdale	O	56
4	Eskdale	AB	5
5	Annandale	A	54
6	Annandale	B	14
7	Annandale	O	52
8	Annandale	AB	5
9	Nithsdale	A	98
10	Nithsdale	B	35
11	Nithsdale	O	115
12	Nithsdale	AB	5

Nejprve vytvoříme kontingenční tabulku řádkově podmíněných relativních četností, abychom získali představu o procentuálním zastoupení krevních skupin ve sledovaných třech oblastech:

Kontingenční tabulka (krevní skupiny)						
Četnost označených buněk > 10						
(Marginální součty nejsou označeny)						
	X	Y A	Y B	Y O	Y AB	Řádk. součty
Četnost	Eskdale	33	6	56	5	100
Řádk. četn.		33,00%	6,00%	56,00%	5,00%	
Četnost	Annandale	54	14	52	5	125
Řádk. četn.		43,20%	11,20%	41,60%	4,00%	
Četnost	Nithsdale	98	35	115	5	253
Řádk. četn.		38,74%	13,83%	45,45%	1,98%	
Četnost	Vš.skup.	185	55	223	15	478

Ověříme podmínky dobré aproximace:

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (krevní skupiny)					
Četnost označených buněk > 10					
Pearsonův chí-kv. : 10,4537, sv=6, p=,106812					
X	Y A	Y B	Y O	Y AB	Řádk. součty
Eskdale	38,7029	11,50628	46,6527	3,13808	100,0000
Annandale	48,3787	14,38285	58,3159	3,92259	125,0000
Nithsdale	97,9184	29,11088	118,0314	7,93933	253,0000
Vš.skup.	185,0000	55,00000	223,0000	15,00000	478,0000

Podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Testová statistika nabývá hodnoty 10,45372, p-hodnota je 0,10681, což znamená, že na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu, že procentuální zastoupení krevních skupin ve sledovaných třech oblastech Skotska je shodné.

Testování hypotézy o symetrii

Má-li kontingenční tabulka stejný počet řádků jako sloupců (tj. $r = s$), nazývá se **čtvercová**. Pokud veličiny X a Y mají stejné varianty, můžeme testovat hypotézu symetrie $H_0: \pi_{jk} = \pi_{kj}$ pro všechny dvojice (j,k).

Testová statistika:
$$K = \sum_{j=1}^r \sum_{k=j+1}^{r-1} \frac{(n_{jk} - n_{kj})^2}{n_{jk} + n_{kj}}$$
. Platí-li H_0 , pak K se asymptoticky

řídí rozložením $\chi^2(r(r-1)/2)$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r(r-1)/2), \infty \rangle$.

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α , když $K \in W$.

Příklad: Na souboru 45 náhodně vybraných žáků byla zjišťována obtížnost dvou úloh. Každý žák řešil obě úlohy v náhodném pořadí (polovina žáků v jednom pořadí, polovina v opačném). Výsledky řešení byly klasifikovány do tří kategorií:

Řešení 1. úlohy	Řešení 2. úlohy			$n_{j.}$
	správně	částečně správně	chybně	
správně	8	5	1	14
částečně správně	2	15	1	18
chybně	4	3	6	13
$n_{.k}$	14	23	8	45

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že obě úlohy jsou stejně obtížné.

Řešení:

Vypočítáme realizaci testové statistiky:

$$K = \frac{(5-2)^2}{5+2} + \frac{(1-4)^2}{1+4} + \frac{(1-3)^2}{1+3} = 4,0857$$

Stanovíme kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r(r-1)/2), \infty \rangle = \langle \chi^2_{1-\alpha}(3), \infty \rangle = \langle 7,815, \infty \rangle$.

Testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu, že obě úlohy jsou stejně obtížné.

Výpočet míry souhlasu ve čtvercových tabulkách

Mají-li veličiny X a Y stejné varianty, můžeme sledovat míru souhlasu, např. míru shody názorů manželů na určitý problém, míru shody dvou lékařů při určování diagnózy nebo míru shody rodinného stavu ženicha a nevěsty. Jako míra souhlasu slouží **Cohenův koeficient kappa**:

$$\kappa = \frac{\sum_{j=1}^r (n_{jj} - m_{jj})}{n - \sum_{j=1}^r m_{jj}}, \text{ kde } m_{jj} = \frac{n_{j.} \cdot n_{.j}}{n} \text{ jsou teoretické četnosti.}$$

Tento koeficient nabývá hodnot mezi 0 a 1. Hodnoty 1 nabývá tehdy, když se nenulové četnosti vyskytují pouze na diagonále kontingenční tabulky.

kappa	míra souhlasu
do 0,2	nízká
0,2 – 0,4	mírná
0,4 – 0,6	střední
0,6 – 0,8	dobrá
0,8 - 1	výborná

Příklad: Z rakouské statistické ročenky z roku 1968 jsou převzaty údaje o rodinném stavu ženicha a nevěsty před sňatkem:

ženich	nevěsta			n _{j.}
	svobodná	ovdovělá	rozvedená	
svobodný	44833	391	2343	47567
ovdovělý	978	581	560	2119
rozvedený	3405	375	2535	6315
n _k	49216	1347	5438	56001

Vypočtěte a interpretujte Cohenův koeficient kappa.

Řešení:

Pro výpočet tohoto koeficientu musíme znát teoretické četnosti na diagonále:

$$m_{11} = \frac{n_{1.} \cdot n_{.1}}{n} = \frac{47567 \cdot 49216}{56001} = 41803,9, m_{22} = \frac{n_{2.} \cdot n_{.2}}{n} = \frac{2119 \cdot 1347}{56001} = 51,$$

$$m_{33} = \frac{n_{3.} \cdot n_{.3}}{n} = \frac{6315 \cdot 5438}{56001} = 613,2$$

Dosadíme do vzorce pro výpočet kappa:

$$\kappa = \frac{\sum_{j=1}^r (n_{jj} - m_{jj})}{n - \sum_{j=1}^r m_{jj}} = \frac{(44833 - 41803,9) + (581 - 51) + (2535 - 613,2)}{56001 - (41803,9 + 51 + 613,2)} = 0,405$$

Vidíme, že míra souhlasu mezi rodinným stavem snoubenců je pouze střední.

Čtyřpolní tabulky

Nechť $r = s = 2$. Pak hovoříme o **čtyřpolní kontingenční tabulce** a používáme označení: $n_{11} = a$, $n_{12} = b$, $n_{21} = c$, $n_{22} = d$.

X	Y		$n_{j.}$
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	
$x_{[1]}$	a	b	a+b
$x_{[2]}$	c	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

Test nezávislosti ve čtyřpolní tabulce

Testovou statistiku pro čtyřpolní kontingenční tabulku lze zjednodušit do tvaru:

$$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}.$$

Platí-li hypotéza o nezávislosti veličin X, Y, pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(1)$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty \rangle$

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α , když $K \in W$.

Povšimněte si, že za platnosti hypotézy o nezávislosti $ad = bc$.

Pro tuto tabulku navrhl R. A. Fisher přesný (exaktní) test nezávislosti známý jako **Fisherův faktoriálový test**.



Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962): Britský statistik a genetik. (Fisherův přesný test je popsán např. v knize K. Zvára: Biostatistika, Karolinum, Praha 1998. Princip spočívá v tom, že pomocí kombinatorických úvah se vypočítají pravděpodobnosti toho, že při daných marginálních četnostech dostaneme tabulky, které se od nulové hypotézy odchyľují aspoň tak, jako daná tabulka.)

Upozornění: STATISTICA poskytuje p-hodnotu pro Fisherův přesný test. Jestliže vyjde $p \leq \alpha$, pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti α .

Příklad: V náhodném výběru 50 obézních dětí ve věku 6 – 14 let byla zjišťována obezita rodičů. Veličina X – obezita matky, veličina Y – obezita otce. Výsledky průzkumu jsou uvedeny v kontingenční tabulce:

X	Y		n _{j.}
	ano	ne	
ano	15	9	24
ne	7	19	26
n _k	22	28	50

Pomocí Fisherova exaktního testu ověřte, zda lze na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu o nezávislosti náhodných veličin X a Y.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných X, Y (varianty 0 – neobézní, 1 – obézní) a četnost a čtyřech případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	obézní	obézní	15
2	obézní	neobézní	9
3	neobézní	obézní	7
4	neobézní	neobézní	19

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Fisher exakt., Yates, McNemar (2x2). Dostaneme výstupní tabulku:

Statist.	Statist. : X(2) x Y(2) (obezita rodičů)		
	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	6,410777	df=1	p=,01134
M-V chí-kvadr.	6,548348	df=1	p=,01050
Yatesův chí-kv.	5,048207	df=1	p=,02465
Fisherův přesný, 1-str.			p=,01188
2-stranný			p=,02163
McNemarův chí-kv. (A/D)	,2647059	df=1	p=,60691
(B/C)	,0625000	df=1	p=,80259

Vidíme, že p-hodnota pro Fisherův exaktní oboustranný test je 0,02163, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že obezita matky a otce spolu nesouvisí.

Test homogenity ve čtyřpolní tabulce

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0: \pi_{1k} = \pi_{2k}$, $k = 1, 2$ proti alternativě H_1 : aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší. Na problém lze pohlížet tak, že máme dva nezávislé výběry z alternativních rozložení, první má rozsah $n_1 = a+c$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_1)$, druhý má rozsah $n_2 = b+d$ a pochází z rozložení $A(\vartheta_2)$. Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti oboustranné alternativě. V kapitole o hodnocení náhodných výběrů z alternativních rozložení

jsme použili testovou statistiku $T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1 - M_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$, která se za plat-

nosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením $N(0,1)$. (M_* je vážený průměr výběrových průměrů.) Nyní použijeme testovou statistiku

$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$, stejně jako u testu nezávislosti. Tato statistika se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(1)$. Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty \rangle$. Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α , když $K \in W$.

Příklad: Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce a 220 dostalo placebo. Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou. 20 z nich bylo z očkované skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Na asymptotické hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině je shodný.

Řešení:

Údaje uspořádáme do čtyřpolní kontingenční tabulky, kde roli veličiny X hraje onemocnění chřipkou a roli veličiny Y existence očkování.

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování		n _j
	ano	ne	
ano	20	80	100
ne	220	140	360
n _k	240	220	460

Vypočteme sloupcově podmíněné relativní četnosti:

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování	
	ano	ne
ano	8,3%	36,4%
ne	91,7%	63,6%

Vidíme, že v očkované skupině onemocnělo chřipkou 8,3% lidí, v kontrolní skupině však 36,4%. Zjistíme, zda takto velký rozdíl je způsoben pouze náhodnými vlivy.

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace, tedy nejprve vypočteme teoretické četnosti:

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{100 \cdot 240}{460} = 52,17, \quad \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{100 \cdot 220}{460} = 47,83,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{360 \cdot 240}{460} = 187,83, \quad \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{360 \cdot 220}{460} = 172,17$$

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Realizace testové statistiky:

$$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} = \frac{460(20 \cdot 140 - 80 \cdot 220)^2}{240 \cdot 220 \cdot 100 \cdot 360} = 53,01.$$

$$\text{Kritický obor: } W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty \rangle = \langle \chi^2_{0,99}(1), \infty \rangle = \langle 6,635, \infty \rangle.$$

Protože $K \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,01. S rizikem omylu nejvýše 0,01 jsme tedy prokázali, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině se liší.

(Výpočet pomocí systému STATISTICA se provede analogicky jako v příkladě s obezitou.)

Test symetrie ve čtyřpolní tabulce (McNemarův test)

Jde o obdobu párového testu pro ordinální, intervalové či poměrové proměnné. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu

$H_0: \pi_{12} = \pi_{21}$ proti alternativě $H_1: \pi_{12} \neq \pi_{21}$. (Jedná se o shodu pravděpodobností v políčkách na vedlejší diagonále.)

Například sledujeme, zda určité ošetření ovlivňuje pravděpodobnost výskytu jistého znaku na objektech základního souboru.

Testová statistika $K = \frac{(b-c)^2}{b+c}$ se v případě platnosti H_0 asymptoticky řídí rozlo-

žením $\chi^2(1)$. Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty \rangle$. Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α , když $K \in W$.

Podmínky dobré aproximace: $b + c > 8$.

Příklad: Máme zjistit, zda požití alkoholu ovlivňuje schopnost řidičů správně projet určitou trasu. Bylo náhodně vybráno 100 řidičů, kteří měli za úkol projet uvedenou trasu. Po požití alkoholu dostali stejný úkol. Výsledky experimentu máme v tabulce:

Před požitím alkoholu	Po požití alkoholu		n_j
	bezchybně	s chybami	
bezchybně	45	35	80
s chybami	15	5	20
n_k	60	40	100

Test provedte na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Řešení:

Před požitím alkoholu správně projelo trať 80 řidičů, po požití pouze 60. Ověříme, zda rozdíl mezi těmito počty řidičů je způsoben pouze náhodnými vlivy.

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny, $b + c = 50 > 8$.

Vypočteme testovou statistiku: $K = \frac{(b-c)^2}{b+c} = \frac{(35-15)^2}{35+15} = 8$. Kritický obor:

$W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty \rangle = \langle \chi^2_{0,95}(1), \infty \rangle = \langle 3,841, \infty \rangle$. Protože $K \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 0,05 jsme tedy prokázali, že požití alkoholu ovlivňuje schopnost řidiče správně projet určitou trasu.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných X (1 – před požitím alkoholu, 2 – po požití alkoholu), Y (1 – bezchybně, 2 – s chybami) a četnost a čtyřech případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	před požitím alkoholu	bezchybně	45
2	před požitím alkoholu	s chybami	35
3	po požití alkoholu	bezchybně	15
4	po požití alkoholu	s chybami	5

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Fisher exakt., Yates, McNemar (2x2). Dostaneme výstupní tabulku:

Statist.	Statist. : X(2) x Y(2) (ridici.sta)		
	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	2,343750	df=1	p=,12579
M-V chí-kvadr.	2,458654	df=1	p=,11688
Yatesův chí-kv.	1,627604	df=1	p=,20204
Fisherův přesný, 1-str.			p=,09946
2-stranný			p=,20120
McNemarův chí-kv. (A/D)	30,42000	df=1	p=,00000
(B/C)	7,220000	df=1	p=,00721

Zajímá nás poslední řádek označený McNemarův chí-kv. (B/C). Testová statistika nabývá hodnoty 7,22 (systém STATISTICA používá při výpočtu testové

statistiky tzv. opravu na nespojitost: $K = \frac{(|n_{12} - n_{21}| - 1)^2}{n_{12} + n_{21}}$). Odpovídající p-

hodnota je 0,00721, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že požití alkoholu neovlivňuje schopnost řidiče správně projet určitou trasu.

Podíl šancí ve čtyřpolní kontingenční tabulce

Ve čtyřpolních tabulkách používáme charakteristiku $OR = \frac{ad}{bc}$, která se nazývá

podíl šancí (odds ratio). Můžeme si představit, že pokus se provádí za dvojích různých okolností a může skončit buď úspěchem nebo neúspěchem.

Výsledek pokusu	okolnosti		n_j
	I	II	
úspěch	a	b	a+b
neúspěch	c	d	c+d
n_k	a+c	b+d	n

Poměr počtu úspěchů k počtu neúspěchů (tzv. **šance**) za 1. okolností je $\frac{a}{c}$, za

druhých okolností je $\frac{b}{d}$. Podíl šancí je $OR = \frac{ad}{bc}$.

Pomocí 100(1- α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro podíl šancí lze na asymptotické hladině významnosti α testovat hypotézu o nezávislosti nominálních veličin X a Y. Asymptotický 100(1- α)% interval spolehlivosti pro skutečný podíl šancí má meze:

$$d = \exp\left(\ln \text{OR} - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} u_{1-\alpha/2}\right), \quad h = \exp\left(\ln \text{OR} + \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} u_{1-\alpha/2}\right).$$

Jestliže interval spolehlivosti neobsahuje 1, pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na asymptotické hladině významnosti α .

Příklad (testování nezávislosti pomocí podílu šancí a pomocí statistiky K):

U 125 uchazečů o studium na jistou fakultu byl hodnocen dojem, jakým zapůsobili na komisi u ústní přijímací zkoušky. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že přijetí na fakultu nezávisí na dojmu u přijímací zkoušky.

přijetí	dojem		n _j
	dobry	špatny	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
n _k	56	69	125

Řešení:

a) Testování pomocí podílu šancí:

$\text{OR} = \frac{ad}{bc} = \frac{17 \cdot 58}{11 \cdot 39} = 2,298$. Podíl šancí nám říká, že uchazeč, který zapůsobil na komisi dobrým dojmem, má asi 2,3 x větší šanci na přijetí než uchazeč, který zapůsobil špatným dojmem.

Provedeme další pomocné výpočty:

$$\ln \text{OR} = 0,832,$$

$$\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{1}{17} + \frac{1}{11} + \frac{1}{39} + \frac{1}{58}} = 0,439, \quad u_{0,975} = 1,96$$

Dosadíme do vzorců pro meze asymptotického intervalu spolehlivosti pro podíl šancí:

$$\ln d = \ln \text{OR} - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} u_{1-\alpha/2} = 0,832 - 0,439 \cdot 1,96 = -0,028$$

$$\ln h = \ln \text{OR} + \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} u_{1-\alpha/2} = 0,832 + 0,439 \cdot 1,96 = 1,692$$

Po odlogaritmování dostaneme:

$$d = e^{-0,028} = 0,972, \quad h = e^{1,692} = 5,433$$

Protože interval (0,972; 5,433) obsahuje číslo 1, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nezávislosti dojmu u přijímací zkoušky a přijetí na fakultu.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Dolní a horní mez intervalu spolehlivosti pro OR zjistíme pomocí STATISTIKY. Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných DM a HM a jednom případě. Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:

$$=\exp(\log(2,298)-\sqrt{(1/17+1/11+1/39+1/58)}*\text{VNormal}(0,975;0;1))$$

a analogicky do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro horní mez:

$$=\exp(\log(2,298)+\sqrt{(1/17+1/11+1/39+1/58)}*\text{VNormal}(0,975;0;1))$$

	1 DM	2 HM
1	0,972244	5,431562

b) Testování pomocí statistiky K:

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace:

$$\frac{n_1 \cdot n_{.1}}{n} = \frac{28 \cdot 56}{125} = 12,544, \quad \frac{n_1 \cdot n_{.2}}{n} = \frac{28 \cdot 69}{125} = 15,456,$$

$$\frac{n_2 \cdot n_{.1}}{n} = \frac{97 \cdot 56}{125} = 43,456, \quad \frac{n_2 \cdot n_{.2}}{n} = \frac{97 \cdot 69}{125} = 53,544$$

Podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Dosadíme do zjednodušeného vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} = \frac{125 \cdot (17 \cdot 58 - 11 \cdot 39)^2}{28 \cdot 97 \cdot 56 \cdot 69} = 3,6953$$

$$\text{Kritický obor: } W = \langle \chi^2_{0,95}(1), \infty \rangle = \langle 3,841, \infty \rangle.$$

Protože testová statistika se nerealizuje k kritickému oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$$\text{Vypočteme ještě Cramérův koeficient: } V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}} = \sqrt{\frac{3,6953}{125(2-1)}} = 0,1719$$

Vidíme, že mezi dojmem u přijímací zkoušky a přijetím na fakultu je pouze slabá závislost.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných X (1 – přijat, 0 – nepřijat), Y (1 – dobrý dojem, 2 – špatný dojem) a četnost a čtyřech případech:

	1 X	2 Y	3 četnost
1	přijat	dobrý dojem	17
2	přijat	špatný dojem	11
3	nepřijat	dobrý dojem	39
4	nepřijat	špatný dojem	58

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Fisher exakt., Yates, McNemar (2x2). Dostaneme výstupní tabulku:

Statist.	Statist. : X(2) x Y(2) (prijeti na fakultu.sta)		
	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	3,695333	df=1	p=,05457
M-V chí-kvadr.	3,687112	df=1	p=,05484
Yatesův chí-kv.	2,912566	df=1	p=,08790
Fisherův přesný, 1-str.			p=,04413
2-stranný			p=,08331
McNemarův chí-kv. (A/D)	21,33333	df=1	p=,00000
(B/C)	14,58000	df=1	p=,00013

Vidíme, že p-hodnota pro Fisherův exaktní oboustranný test je 0,08331, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že přijetí na fakultu a dojem na přijímací komisi spolu nesouvisí.

Poznámka k jednostranným alternativám:

Nulová hypotéza tvrdí, že podíl šancí je roven 1, tj. $H_0: OR = 1$.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch vyšší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme pravostrannou alternativu $H_1: OR > 1$.

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch pravostranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický levostranný interval spolehlivosti pro OR neobsahuje číslo 1.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch nižší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme levostrannou alternativu $H_1: OR < 1$.

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch levostranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický pravostranný interval spolehlivosti pro OR neobsahuje číslo 1.

Pokud jsou šance na úspěch stejné za prvních i druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme oboustrannou alternativu $H_1: OR \neq 1$.

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch oboustranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro OR neobsahuje číslo 1.

Příklad: U 24 žáků 6. třídy základní školy bylo zjišťováno, zda jsou úspěšní v matematice (tj. mají na posledním vysvědčení známku 1 nebo 2 z matematiky) a zda hrají na nějaký hudební nástroj. Z 10 úspěšných matematiků 6 hrálo na

nějaký hudební nástroj, kdežto ve skupině neúspěšných matematiků hrál pouze 1 žák na hudební nástroj. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že úspěch v matematice a hra na hudební nástroj jsou nezávislé veličiny. Proti nulové hypotéze postavte

- oboustrannou alternativu, tj. tvrzení, úspěch v matematice a hra na hudební nástroj spolu souvisí,
- pravostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou vyšší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj,
- levostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou nižší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj.

Řešení:

Máme kontingenční tabulku

úspěch v M	hra na hudební nástroj		n _j
	ano	ne	
ano	6	4	10
ne	1	13	14
n _k	7	17	24

Vypočteme podíl šancí: $OR = \frac{ac}{bd} = \frac{6 \cdot 13}{4 \cdot 1} = \frac{39}{2} = 19,5$. Podíl šancí nám říká, že žák, který hraje na nějaký hudební nástroj, má 19,5 x větší šanci na úspěch v matematice než žák, který nehraje na žádný hudební nástroj.

Ad a)

Pro testování nulové hypotézy proti oboustranné alternativě sestrojíme oboustranný interval spolehlivosti:

Dolní a horní mez intervalu spolehlivosti pro OR zjistíme pomocí STATISTIKY. Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných DM a HM a jednom případě. Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:

$$= \exp(\log(19,5) - \sqrt{1/6 + 1/4 + 1/1 + 1/13}) * VNormal(0,975; 0; 1)$$

a analogicky do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro horní mez:

$$= \exp(\log(19,5) + \sqrt{1/6 + 1/4 + 1/1 + 1/13}) * VNormal(0,975; 0; 1)$$

	1 DM	2 HM
1	1,777296	213,9486

Vidíme, že $1,7773 < OR < 213,9486$ s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval neobsahuje 1, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

dině významnosti 0,05 ve prospěch oboustranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že úspěch v matematice souvisí s hrou na hudební nástroj.

Ad b)

Pro testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě sestojíme levostranný interval spolehlivosti:

Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:

$$= \exp(\log(19,5) - \sqrt{1/6 + 1/4 + 1/1 + 1/13}) * VNormal(0,95; 0; 1)$$

	1 DM
1	2,612213

Protože interval $(2,612213; \infty)$ neobsahuje 1, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají vyšší šance na úspěch v matematice.

Ad c)

Pro testování nulové hypotézy proti levostranné alternativě sestojíme pravostranný interval spolehlivosti:

Do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro dolní mez:

$$= \exp(\log(19,5) + \sqrt{1/6 + 1/4 + 1/1 + 1/13}) * VNormal(0,95; 0; 1)$$

	1 HM
1	145,5663

Protože interval $(-\infty; 145,5663)$ obsahuje 1, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch levostranné alternativy. Neprokázalo se tedy, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají nižší šance na úspěch v matematice.