ANALÝZA A KLASIFIKACE DAT

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

VII.
VOLBA A VÝBĚR PŘÍZNAKŮ

ZAČÍNÁME

- kolik a jaké příznaky ?
  - málo příznaků – možná chyba klasifikace;
  - moc příznaků – možná nepřiměřená pracnost, vysoké náklady;

⇓

KOMPROMIS

(potřebujeme kritérium)

ZAČÍNÁME

KOMPROMIS

(potřebujeme kritérium)

- přípustná míra spolehlivosti klasifikace (např. pravděpodobnost chybné klasifikace, odchylka obrazu vytvořeného z vybraných příznaků vůči určitému referenčnímu);
- určit ty příznakové proměnné, jejichž hodnoty nesou nejvíce informace z hlediska řešené úlohy, tj. ty proměnné, kterou jsou nejefektivnější pro vytvoření co nejoddělenějších klasifikačních tříd;

ZAČÍNÁME

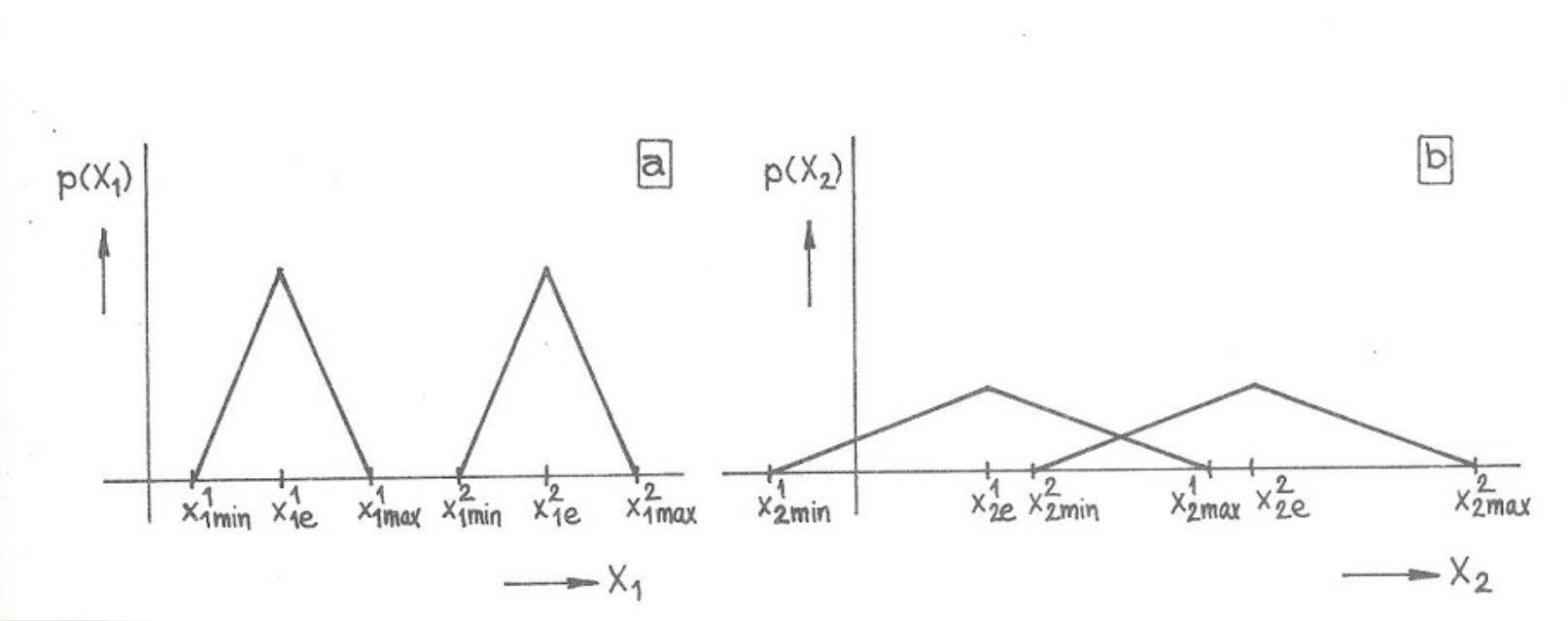
- algoritmus pro určení příznakových veličin nesoucích nejvíce informace pro klasifikátor není dosud teoreticky formalizován - pouze dílčí suboptimální řešení spočívající:
  - ve výběru nezbytného množství veličin z předem zvolené množiny;
  - vyjádření původních veličin pomocí menšího počtu skrytých nezávislých veličin, které zpravidla nelze přímo měřit, ale mohou nebo také nemusí mít určitou věcnou interpretaci

VOLBA PŘÍZNAKŮ

- počáteční volba příznakových veličin je z velké části empirická, vychází ze zkušeností získaných při empirické klasifikaci člověkem a závisí, kromě rozboru podstaty problému i na technických (ekonomických) možnostech a schopnostech hodnoty veličin určit

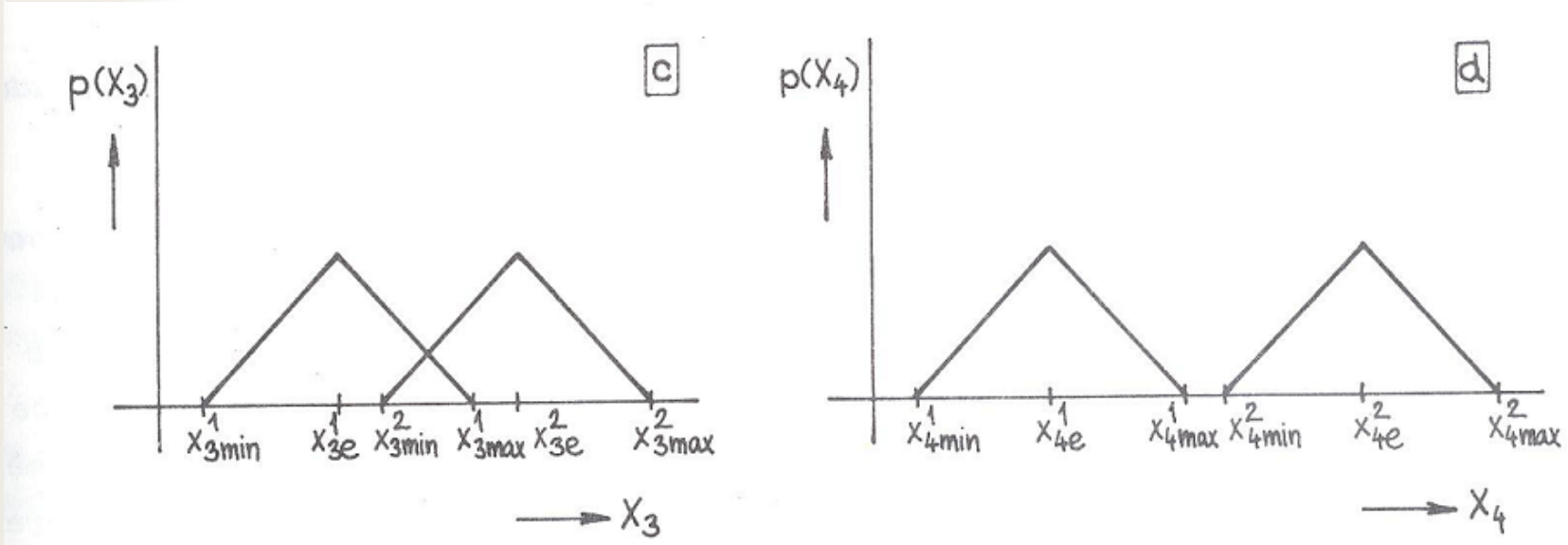
ZÁSADY PRO VOLBU PŘÍZNAKŮ

- ☑ výběr veličin s minimálním rozptylem uvnitř tříd



ZÁSADY PRO VOLBU PŘÍZNAKŮ

- ☑ výběr veličin s maximální vzdáleností mezi třídami

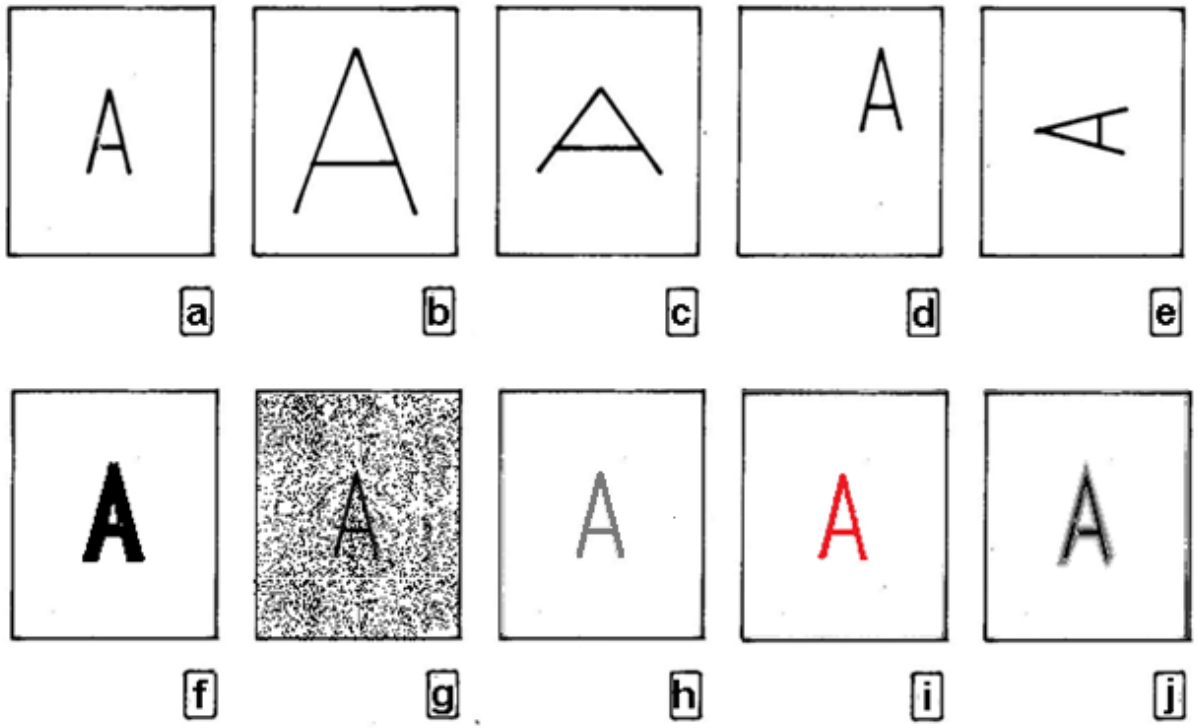


ZÁSADY PRO VOLBU PŘÍZNAKŮ

- ☑ výběr vzájemně nekorelovaných veličin
  - ➔ pokud jsou hodnoty jedné příznakové veličiny závislé na příznacích druhé veličiny, pak použití obou těchto veličin nepřináší žádnou další informaci pro správnou klasifikaci – stačí jedna z nich, jedno která

ZÁSADY PRO VOLBU PŘÍZNAKŮ

- ☑ výběr veličin invariantních vůči deformacím
  - ➔ volba elementů formálního popisu závisí na vlastnostech původních i předzpracovaných dat a může ovlivňovat způsob předzpracování



VÝBĚR PŘÍZNAKŮ

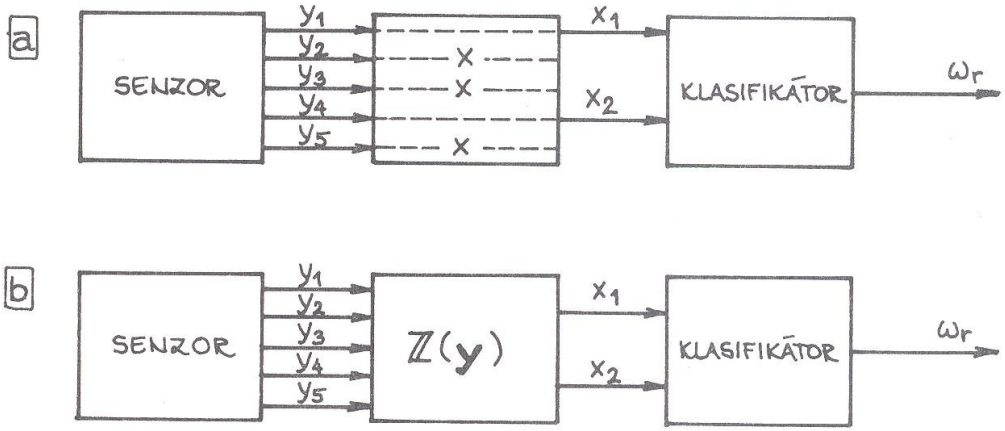
- formální popis objektu původně reprezentovaný m rozměrným vektorem se snažíme vyjádřit vektorem n rozměrným tak, aby množství diskriminační informace obsažené v původním vektoru bylo v co největší míře zachováno

$$\mathcal{Z}: \mathcal{Y}^m \rightarrow \mathcal{X}^n$$

VÝBĚR PŘÍZNAKŮ

dva principiálně různé způsoby:

- ☑ **selekce** – nalezení a odstranění těch příznakových funkcí, které přispívají k separabilitě klasifikačních tříd nejméně;
- ☑ **extrakce** – transformace původních příznakových proměnných na menší počet jiných příznakových proměnných



VÝBĚR PŘÍZNAKŮ

dva principiálně různé způsoby:

- ☑ **selekce** – nalezení a odstranění těch příznakových funkcí, které přispívají k separabilitě klasifikačních tříd nejméně;
- ☑ **extrakce** – transformace původních příznakových proměnných na menší počet jiných příznakových proměnných

Abychom dokázali realizovat libovolný z obou způsobů výběru, je třeba definovat a splnit určité podmínky optimality.

VÝBĚR PŘÍZNAKŮ
PODMÍNKY OPTIMALITY

Nechť J je kriteriální funkce, jejíž pomocí vybíráme příznakové veličiny.

V případě **selekce** vybíráme vektor $x=^{T}(x_1,\ldots,x_n)$ ze všech možných n-tic χ příznaků y_i, i=1,2,…,m. Optimalizaci selekce příznaků formálně zapíšeme jako

$$J(y)=\operatorname{extr}_{\forall\chi} J(\chi)$$

Problémy k řešení:

- stanovení kriteriální funkce;
- stanovení nového rozměru kriteriální funkce;
- stanovení optimalizačního postupu

VÝBĚR PŘÍZNAKŮ
PODMÍNKY OPTIMALITY

Nechť J je kriteriální funkce, jejíž pomocí vybíráme příznakové veličiny.

V případě **extrakce** transformujeme příznakový prostor na základě výběru zobrazení $\succsim$ z množiny všech možných zobrazení ζ prostoru $\mathscr{Y}^m$ do $\mathscr{X}^n$, tj.

$$\succsim(\mathbf{y}) = \operatorname{ext}_{\forall\zeta} J(\zeta)$$

Příznakový prostor je pomocí optimálního zobrazení $\succsim$ dán vztahem $\mathbf{x} = \succsim(\mathbf{y})$

Problémy k řešení:

- stanovení kriteriální funkce;
- stanovení nového rozměru kriteriální funkce;
- zvolení požadavků na vlastnosti zobrazení;
- stanovení optimalizačního postupu

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MÍRY

- pro bayesovské klasifikátory

  je-li $\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ možná n-tice příznaků, vybraných ze všech možných m hodnot y_i, $i=1,\ldots,m$, $n \leq m$, pak pravděpodobnost chybného rozhodnutí P_{eme} je pro tento výběr rovna

$$P_{eme} = J(a^*) = \min_{\forall a} J(a) = \int_{\chi} \min_{\forall r} L_{r\varphi}(\omega_\varphi) p(\chi) d\chi =$$

$$= \int_{\chi} \min_{\forall r} [p(\chi) - p(\chi|\omega_\varphi) P(\omega_\varphi)] d\chi = \int_{\chi} p(\chi) d\chi - \int_{\chi} \max_{\forall r} p(\chi|\omega_\varphi) P(\omega_\varphi) d\chi =$$

$$= 1 - \int_{\chi} \max_{\forall r} p(\chi|\omega_\varphi) P(\omega_\varphi) d\chi$$

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MÍRY

- pro dichotomický bayesovský klasifikátor (R=2) je celková pravděpodobnost chybného rozhodnutí

$$e = 1 - \int_{\chi} |p(\chi|\omega_1)P(\omega_1) - p(\chi|\omega_2)P(\omega_2)| d\chi$$

- pravděpodobnost chyby bude maximální, když integrál bude nulový – obě váhované hustoty pravděpodobnosti budou stejné, pravděpodobnost chyby bude minimální, když se obě hustoty nebudou překrývat.
- Čím větší vzdálenost mezi klasifikačními třídami, tím menší pravděpodobnost chyby

⇓

Integrál může být považován za vyjádření „pravděpodobnostní vzdálenosti“

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MÍRY

- zobecnění

$$J(\chi) = \int_{\chi} f[p(\chi|\omega_i)P(\omega_i), i = 1,2]d\chi$$

- $J(\chi) \geq 0$;
- $J(\chi) = 0$, když jsou hustoty pravděpodobnosti totožné;
- $J(\chi)$ je maximální, když se hustoty nepřekrývají

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MÍRY

Chernoffova vzdálenost

$$J_C = - \ln \int p^{s}(x|\omega_1) . p^{s-1}(x|\omega_2) dx, \quad s \in \langle 0,1 \rangle ;$$

Bhattacharyyova vzdálenost

$$J_B = - \ln \int [p(x|\omega_1) . p(x|\omega_2)]^{\frac{1}{2}} dx ;$$

Divergence

$$J_D = \int [p(x|\omega_1) - p(x|\omega_2)] \ln \left(\frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} \right) dx ;$$

Patrikova - Fisherova vzdálenost

$$J_P = \left\{ \int [p(x|\omega_1) - p(x|\omega_2)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MÍRY

zprůměrněná Chernoffova vzdálenost

$$J_C = -\ln \int [p(x|\omega_1)P(\omega_1)]^s \cdot [p(x|\omega_2)P(\omega_2)]^{s-1} dx, \quad s \in \langle 0,1 \rangle;$$

zprůměrněná Bhattacharyyova vzdálenost

$$J_B = -\ln \int [p(x|\omega_1) \cdot P(\omega_1) \cdot p(x|\omega_2) \cdot P(\omega_2)]^{\frac{1}{2}} dx ;$$

zprůměrněná divergence

$$J_D = \int [p(x|\omega_1)P(\omega_1) - p(x|\omega_2)P(\omega_2)] \cdot \ln \left(\frac{p(x|\omega_1)P(\omega_1)}{p(x|\omega_2)P(\omega_2)} \right) dx ;$$

zprůměrněná Patrikova - Fisherova vzdálenost

$$J_P = \left\{ \int [p(x|\omega_1)P(\omega_1) - p(x|\omega_2)P(\omega_2)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MÍRY

- pro více klasifikačních tříd tzv. bayesovská vzdálenost

$$J_{BA} = \int_{\chi} \left(\sum_{r=1}^{R} P^2(\omega_r | \chi) \right) p(\chi) d\chi$$

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
POMĚR ROZPTYLŮ

- rozptyl uvnitř třídy pomocí disperzní matice

$$D(x) = \sum_{r=1}^{R} P(\omega_r) \int_{\chi} (x-\mu_r)^T (x-\mu_r) p(x|\omega_r) dx,$$

kde

$$\mu_r = \int_{\chi} p(x|\omega_r) dx$$

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
POMĚR ROZPTYLŮ

- rozptyl mezi třídami může být dán

$$B(\chi) = \sum_{r=1}^{R} \sum_{s=r+1}^{R} P(\omega_r) P(\omega_s) \mu_{rs}^T \mu_{rs}$$

$$\text{kde } \mu_{rs} = \mu_r - \mu_s$$

- pokud

$$\mu_0 = \sum_{r=1}^{R} P(\omega_r) \cdot \mu_r = \int_{\chi} \chi \cdot p(\chi) d\chi$$

lze také psát

$$B(\chi) = \sum_{r=1}^{R} P(\omega_r) \cdot (\mu_r - \mu_0)^T (\mu_r - \mu_0)$$

SELEKCE PŘÍZNAKŮ
POMĚR ROZPTYLŮ

- vyjádření vztahu obou rozptylů

$$J_{r1}(\chi)=tr(D^{-1}(\chi).B(\chi))$$

$$J_{r2}(\chi)=tr(B(\chi)/tr(D(\chi))$$

$$J_{r3}(\chi)=|D^{-1}(\chi).B(\chi)|= |B(\chi)|/|D(\chi)|$$

$$J_{r4}(\chi) = \ln(J_{r3}(\chi))$$

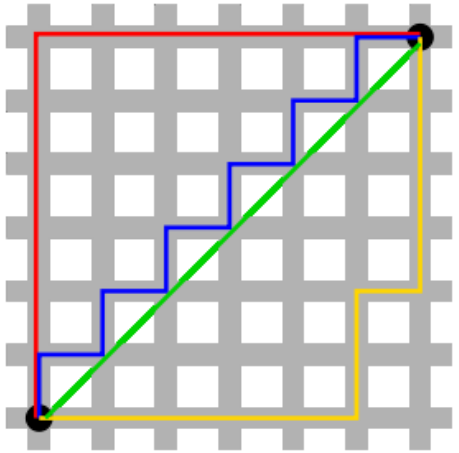
NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

- **Euklidovská metrika** (s nejnázornější geometrickou interpretaci)

$$\rho_E(x_1, x_2) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - x_{2i})^2 \right]^{1/2}$$

- **Hammingova metrika (Manhattan m.)**

$$\rho_H(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} |x_{1i} - x_{2i}|$$



- **Minkovského metrika**

$$\rho_M(x_1, x_2) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_{1i} - x_{2i}|^m \right]^{1/m}$$

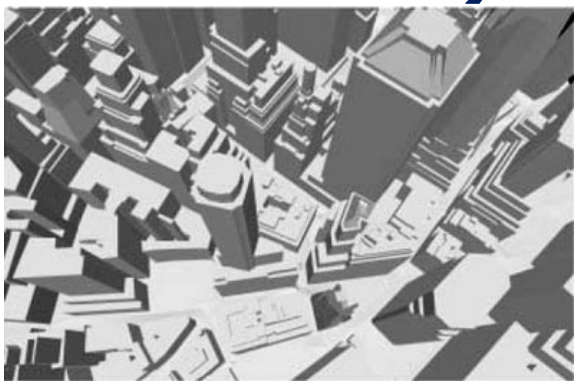
NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

- **Euklidovská metrika** (s nejnázornější geometrickou interpretaci)

$$\rho_E(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2\right]^{1/2}$$

- **Hammingova metrika (Manhattan m.)**

$$\rho_H(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\sum_{i=1}^{n}|x_{1i}-x_{2i}|$$



- **Minkovského metrika**

$$\rho_M(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left[\sum_{i=1}^{n}|x_{1i}-x_{2i}|^m\right]^{1/m}$$

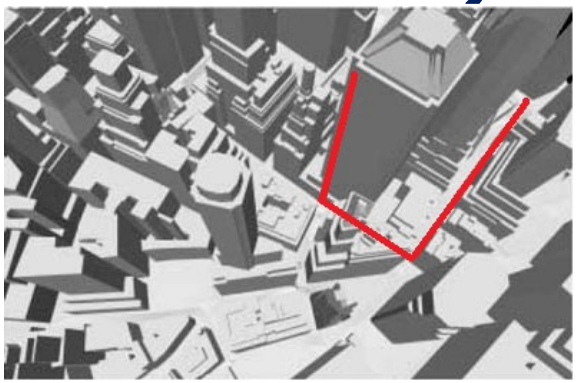
NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

- **Euklidovská metrika** (s nejnázornější geometrickou interpretaci)

$$\rho_E(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2\right]^{1/2}$$

- **Hammingova metrika (Manhattan m.)**

$$\rho_H(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\sum_{i=1}^{n}|x_{1i}-x_{2i}|$$



- **Minkovského metrika**

$$\rho_M(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left[\sum_{i=1}^{n}|x_{1i}-x_{2i}|^m\right]^{1/m}$$

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

Čebyševova metrika

$$\rho_C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\max_{\forall i}\{|x_{1i}-x_{2i}|\}$$

Čebyševovu metriku lze vyjádřit jako limitu

$$\rho_C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\lim_{m\to\infty}\rho_M(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$$

Sokalova metrika

$$\rho_S(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left\{\frac{\rho_E^2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}{n}\right\}^{1/2}$$

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

Čebyševova metrika

$$\rho_C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\max_{\forall i}\{|x_{1i}-x_{2i}|\}$$

Čebyševovu metriku lze vyjádřit jako limitu

$$\rho_C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\lim_{m\to\infty}\rho_M(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$$

Sokalova metrika

$$\rho_S(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left\{\frac{\rho_E^2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}{n}\right\}^{1/2}$$

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

Čebyševova metrika

$$\rho_C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\max_{\forall i}\{|x_{1i}-x_{2i}|\}$$

Čebyševovu metriku lze vyjádřit jako limitu

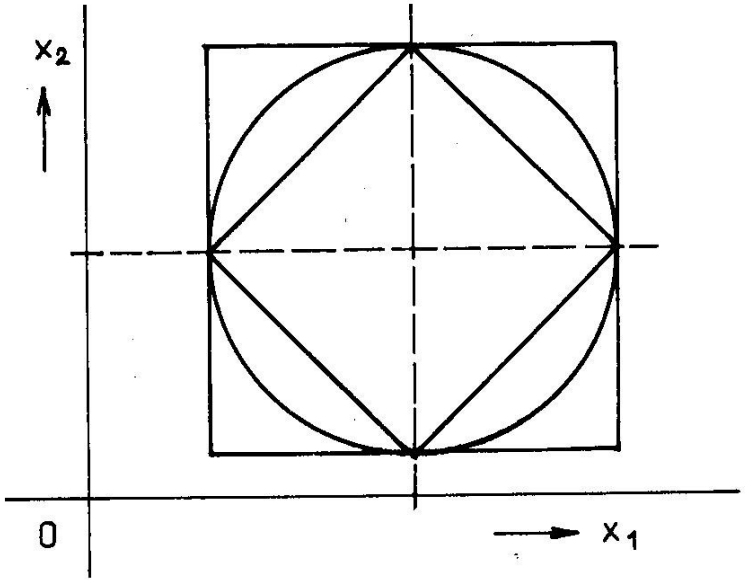
$$\rho_C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\lim_{m\to\infty}\rho_M(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$$

Sokalova metrika

$$\rho_S(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left\{\frac{\rho_E^2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}{n}\right\}^{1/2}$$

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

Volba podle toho jak potřebujeme posílit vliv proměnných, u nichž je pro dané obrazy x_1 a x_2 velký rozdíl.



NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

nevýhody:

- ☑ fyzikální nesmyslnost vytvářet kombinaci veličin s různým fyzikálním rozměrem
- ☑ jsou-li příznakové veličiny zahrnovány do výsledné vzdálenosti se stejnými vahami, zvyšuje se vliv korelovaných veličin

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

možné odstranění (potlačení) nevýhod:

vztažením k nějakému vyrovnávacímu faktoru, např. střední hodnotě, směrodatné odchylce, normě daného obrazu $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

rozpětí

$$\Delta = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij},$$

resp. standardizací podle vztahu

$$u_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j}, \quad i = 1..n, j = 1..k,$$

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

možné odstranění (potlačení) nevýhod:

- lze i subjektivně či na základě nějaké apriorní informace o úloze přiřadit každé příznakové proměnné váhový koeficient, např. váhovaná Minkovského metrika má tvar

$$\rho_{WM}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left[\sum_{i=1}^{n} a_i |x_{1i}-x_{2i}|^m\right]^{1/m}$$

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

možné odstranění (potlačení) nevýhod:

- ☑ váhování příznaků lze zapsat maticově

$$\mathbf{u}_i = {}^{T}\mathbf{C}.\mathbf{x}_i,$$

kde prvky transformační matice **C** jsou definovány jako

$$c_{ii} = a_i, \text{ pro } i = 1, \ldots, n$$

$$c_{ij} = 0, \text{ pro } i \neq j$$

Za tohoto formalismu je Euklidova metrika definována vztahem

$$\rho_E(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \left|{}^{T}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\mathbf{C}^{T}\mathbf{C}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right|^{1/2}$$

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

možné odstranění (potlačení) nevýhod:

- pokud jsou složky transformovaného obrazu dány lineární kombinací více složek původního obrazu, není ani matice **C**, ani matice $\mathbf{C}.^{T}\mathbf{C}$ čistě diagonální. Použijeme-li místo matice $\mathbf{C}.^{T}\mathbf{C}$ inverzní kovarianční matice $\mathbf{K}^{-1}$, pak definiční vztah pro váhovanou Euklidovu metriku je definičním vztahem pro **Mahalanobisovu metriku**

$$\rho_E(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)=\rho_{MA}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left|{}^{T}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\mathbf{K}^{-1}.(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right|^{1/2}$$

NEPRAVDĚPODOBNOSTNÍ METRIKY

možné odstranění (potlačení) nevýhod:

- pokud jsou složky transformovaného obrazu dány lineární kombinací více složek původního obrazu, není ani matice **C**, ani matice **C**.^{T}**C** čistě diagonální. Použijeme-li místo matice **C**.^{T}**C** inverzní kovarianční matice $\mathbf{K}^{-1}$, pak definiční vztah pro váhovanou Euklidovu metriku je definičním vztahem pro **Mahalanobisovu metriku**

$$\rho_E(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)=\rho_{MA}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\left|{}^{T}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\mathbf{K}^{-1}.(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right|^{1/2}$$

- **Kovarianční matice** dvou (náhodných) vektorů $\mathbf{x}={}^{T}(x_1,\ldots,x_m)$ a $\mathbf{y}={}^{T}(y_1,\ldots,y_n)$ je dána vztahem
  - $\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})=E((\mathbf{x}-E\mathbf{x}).^{T}(\mathbf{y}-E\mathbf{y})) = [\mathrm{cov}(x_i,y_j)]_{m,n}$

KOEFICIENTY KORELACE

KOEFICIENTY KORELACE

TO SNAD OPAKOVAT NEMUSÍME

KOEFICIENTY ASOCIACE

KOEFICIENTY ASOCIACE

- **Koeficienty asociace** jsou míry podobnosti mezi obrazy obsahujícími logické (binární, dichotomické) příznakové veličiny.
- Ke zjištění podobnosti je třeba sledovat shodu či neshodu hodnot odpovídajících si příznaků ⇒ čtyři možné situace

KOEFICIENTY ASOCIACE

a) u obou obrazů sledovaný jev nastal (oba odpovídající si příznaky mají hodnotu true) – **pozitivní shoda**;

b) u obrazu $\mathbf{x}_i$ jev nastal (x_{ik} = true), zatímco u obrazu $\mathbf{x}_j$ nikoliv (x_{jk} = false);

c) u obrazu $\mathbf{x}_i$ jev nenastal (x_{ik} = false), zatímco u obrazu $\mathbf{x}_j$ ano (x_{jk} = true);

d) u obou obrazů sledovaný jev nenastal (oba odpovídající si příznaky mají hodnotu false) – **negativní shoda**;

KOEFICIENTY ASOCIACE

		x_j	
		true	false
x_i	true	A	B
	false	C	D

KOEFICIENTY ASOCIACE

- sledujeme, kolikrát pro všechny příznaky obrazů x_i a x_j nastaly případy shody a neshody
  - A+D celkový počet shod příznaků;
  - B+C celkový počet neshod příznaků;
  - A+B+C+D =n tj. počet příznaků obou obrazů

Na základě počtu zjištěných shod a neshod jsou definovány různé koeficienty asociace.

KOEFICIENTY ASOCIACE

- **Jaccardův (Tanimotův) koeficient**

$$S_J(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=\frac{A}{A+B+C}$$

(není definován pro dvojice obrazů, které vykazují negativní shodu ve všech příznacích);

- **Sokalův- Michenerův koeficient**

$$S_{SM}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=\frac{A+D}{A+B+C+D}$$

- **Diceův koeficient**

$$S_D(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=\frac{2A}{2A+B+C}=\frac{2A}{(A+B)+(A+C)}$$

KOEFICIENTY ASOCIACE

Russelův- Raoův koeficient

$$s_{RR}(x_i, x_j) = \frac{A}{A+B+C+D}$$

Asociační koeficienty zpravidla nabývají hodnot z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. V případě R-R koeficientu je při srovnání dvou týchž obrazů hodnota $s_{RR} = 1$ pouze když došlo u všech příznaků jen k pozitivní shodě.

KOEFICIENTY ASOCIACE

- **Rogersův-Tanimotův koeficient**

$$s_{RT}(x_i,x_j)=\frac{A+D}{A+D+2(B+C)}=\frac{A+D}{(B+C)+(A+B+C+D)}$$

- **Hammanův koeficient**

$$s_{H}(x_i,x_j)=\frac{A+D-(B+C)}{A+B+C+D}$$

Na rozdíl od všech předcházejících nabývá Hammanův koeficient hodnot z intervalu ⟨-1,1⟩, přičemž hodnoty -1 nabývá, pokud se příznaky neshodují ani jednou, 0 nabývá když je počet shod a neshod v rovnováze a +1 je v případě úplné shody mezi všemi příznaky.

KOEFICIENTY ASOCIACE

Na základě četností A až D lze vytvářet také dříve uvedené míry:

- **Pearsonův korelační koeficient**

$$s_1(x_i,x_j)=\frac{AD-BC}{\sqrt{(A+B).(C+D).(A+C).(B+D)}}$$

- **kritérium shody χ^2**

$$s_\chi(x_i,x_j)=n s_1^2(x_i,x_j)$$

KOEFICIENTY ASOCIACE

Na základě četností A až D lze vytvářet také dříve uvedené míry:

- **Hammingova vzdálenost**

$$\rho_H(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) = B + C$$

- **Euklidova vzdálenost**

$$\rho_E(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) = \sqrt{B + C}$$

KOEFICIENTY ASOCIACE

Z koeficientů asociace, které vyjadřují míru podobnost lze odvodit koeficienty nepodobnosti

$$d_x(x_i,x_j) = 1 - s_x(x_i,x_j)$$

V případě Jaccardova a Dicova koeficientu nepodobnosti je dodefinována hodnota i pro případy úplné negativní shody tak, že

$d_J(x_i,x_j) = d_D(x_i,x_j) = 0$ pro $A = B = C = 0$

KOEFICIENTY ASOCIACE

NÁZEV	ROZSAH	VZTAH
Cosine	0.0,1.0	$\frac{c}{\sqrt{(a+c)*(b+c)}}$
Dice	0.0,1.0	$\frac{2.0*c}{(a+c)+(b+c)}$
Euclid	0.0,1.0	$\sqrt{\frac{c+d}{a+b+c+d}}$
Forbes	0.0,∞	$\frac{c*(a+b+c+d)}{(a+c)*(b+c)}$
Hamman	-1.0,1.0	$\frac{(c+d)-(a+b)}{a+b+c+d}$
Jaccard	0.0,1.0	$\frac{c}{a+b+c}$
Kulczynski	0.0,1.0	$0.5*\left(\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)$
Manhattan	1.0,0.0	$\frac{(a+b)}{(a+b+c+d)}$

KOEFICIENTY ASOCIACE

NÁZEV	ROZSAH	VZTAH
Sokal-Michener	0.0,1.0	$\frac{c+d}{a+b+c+d}$
Pearson	-1.0,1.0	$\frac{(c*d)-(a*b)}{\sqrt{(a+c)*(b+c)*(a+d)*(b+d)}}$
Rogers-Tanimoto	0.0,1.0	$\frac{c+d}{(a+b)+(a+b+c+d)}$
Russell-Rao	0.0,1.0	$\frac{c}{a+b+c+d}$
Simpson	0.0,1.0	$\frac{c}{\min((a+c),(b+c))}$
Yule	-1.0,1.0	$\frac{(c*d)-(a*b)}{(c*d)+(a*b)}$

PODOBNOST MEZI TŘÍDAMI

- „podobnost" jednoho obrazu s více obrazy jedné třídy (skupin, množin, shluků);
- „podobnost" obrazů dvou tříd (skupin, množin, shluků);

- zavedeme funkci, která ke každé dvojici skupin obrazů (C_i, C_j) přiřazuje číslo D(C_i, C_j), které podobně jako míry podobnosti či nepodobnosti (metriky) jednotlivých obrazů musí splňovat minimálně podmínky:

PODOBNOST MEZI TŘÍDAMI

PODMÍNKY

- ☑ (S1) $D(C_i, C_j) \geq 0$
- ☑ (S2) $D(C_i, C_j) = D(C_j, C_i)$
- ☑ (S3) $D(C_i, C_i) = \max_{i,j} D(C_i, C_j)$

  (pro míry podobnosti)
- ☑ (S3') $D(C_i, C_i) = 0$ pro všechna i

  (pro míry podobnosti)

METODA NEJBLIŽŠÍHO SOUSEDA

- je-li d libovolná míra nepodobnosti (vzdálenosti) dvou obrazů a C_i a C_j jsou libovolné skupiny množiny obrazů $\{x_i\}$, $i=1,\ldots,K$, potom metoda nejbližšího souseda definuje mezi skupinami C_i a C_j vzdálenost

$$L_{NN}(C_i, C_j) = \min_{\substack{x_p \in C_i \\ x_q \in C_j}} d(x_p, x_q)$$

Pozn.:

Při použití této metody se mohou vyskytovat v jednom shluku často i poměrně vzdálené obrazy. Tzn. metoda nejbližšího souseda může generovat shluky protáhlého tvaru.

METODA K NEJBLIŽŠÍCH SOUSEDŮ

Je zobecněním metody nejbližšího souseda.

Je definována vztahem

$$D_{NNk}(G_i, G_j) = \min \sum_{\substack{x_p \in G_i \\ x_q \in G_j}}^{k} d(x_p, x_q),$$

tj. vzdálenost dvou shluků je definována součtem k nejkratších vzdáleností mezi obrazy dvou skupin obrazů.

Pozn.:

Při shlukování metoda částečně potlačuje generování řetězcových struktur.

METODA NEJVZDÁLENĚJŠÍHO SOUSEDA

- opačný princip než nejbližší sousedi

$$D_{FN}(G_i, G_j) = \max_{\substack{x_p \in G_i \\ x_q \in G_j}} d(x_p, x_q)$$

Pozn.:

Generování protáhlých struktur tato metoda potlačuje, naopak vede ke tvorbě nevelkých kompaktních shluků.

- je možné i zobecnění pro více nejbližších sousedů

$$D_{FNk}(G_i, G_j) = \max_{\substack{x_p \in G_i \\ x_q \in G_j}} \sum d(x_p, x_q),$$

METODA CENTROIDNÍ

- vychází z geometrického modelu v euklidovském n rozměrném prostoru a určuje vzdálenost dvou tříd jako čtverec Euklidovy vzdálenosti těžišť obou tříd.
- je-li těžiště třídy definováno jako střední hodnota z obrazů patřících do této třídy, tj.

$$\mathbf{x}_{rk} = \{x_{rk1}, x_{rk2}, \ldots x_{rkn}\}, \mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{k} x_{rik}, i = 1..n,$$

- pak

$$D_c(G_i, G_j) = \rho_E^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$$

METODA PRŮMĚRNÉ VAZBY

- vzdálenost dvou tříd C_i a C_j je průměrná vzdálenost mezi všemi obrazy tříd C_i a C_j. Obsahuje-li shluk C_i P obrazů a C_j Q obrazů, pak jejich vzdálenost je definována vztahem

$$D_{GA}(C_i, C_j) = \frac{1}{PQ} \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q} d(x_p, x_q)$$

Pozn.:

Metoda často vede k podobným výsledkům jako metoda nejvzdálenějšího souseda.

WARDOVA METODA

- vzdálenost mezi třídami (shluky) je definována přírůstkem součtu čtverců odchylek mezi těžištěm a obrazy shluku vytvořeného z obou uvažovaných shluků C_i a C_j oproti součtu čtverců odchylek mezi obrazy a těžišti v obou shlucích C_i a C_j.

WARDOVA METODA

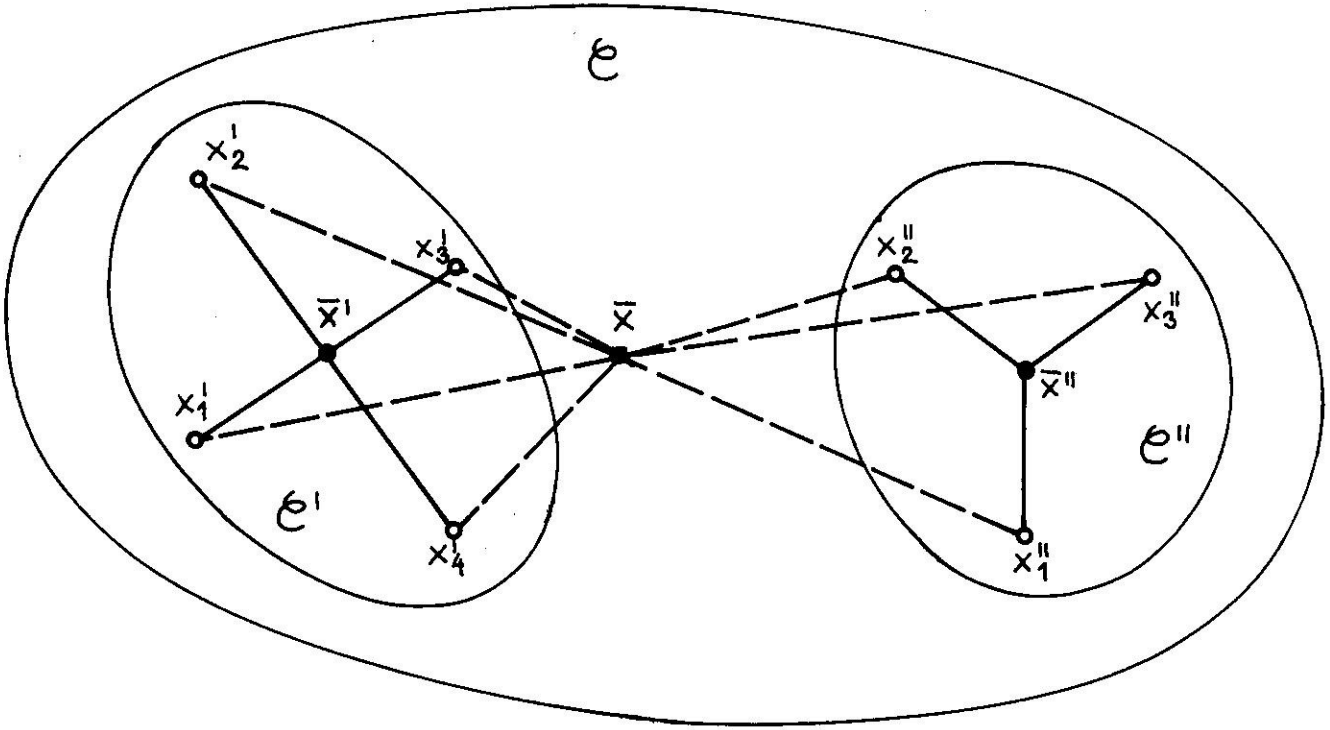
- jsou-li $\bar{\mathbf{x}}_i$ a $\bar{\mathbf{x}}_j$ těžiště tříd C_i a C_j a $\bar{\mathbf{x}}$ těžiště sjednocené množiny, pak Wardova vzdálenost obou shluků je definována výrazem

$$D_W(C_i, C_j) = \sum_{x_i \in C_i \cup C_j} \sum_{k=1}^{p} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2 - \left(\sum_{x_i \in C_i} \sum_{k=1}^{p} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2 + \sum_{x_i \in C_j} \sum_{k=1}^{p} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2 \right)$$

Pozn.:

Metoda má tendenci vytvářet shluky zhruba stejné velikosti, tedy odstraňovat shluky malé, resp. velké.

WARDOVA METODA



ALGORITMY SELEKCE PŘÍZNAKŮ

- ☑ výběr optimální podmnožiny obsahující n ($n \leq m$) příznakových proměnných – kombinatorický problém ($m!/(m-n)!n!$ možných řešení)

$$\Downarrow$$

hledáme jen kvazioptimální řešení

ALGORITMUS OHRANIČENÉHO VĚTVENÍ

předpoklad:

- monotónnost kritéria selekce - označíme-li X_j množinu obsahující j příznaků, pak monotónnost kritéria znamená, že podmnožiny

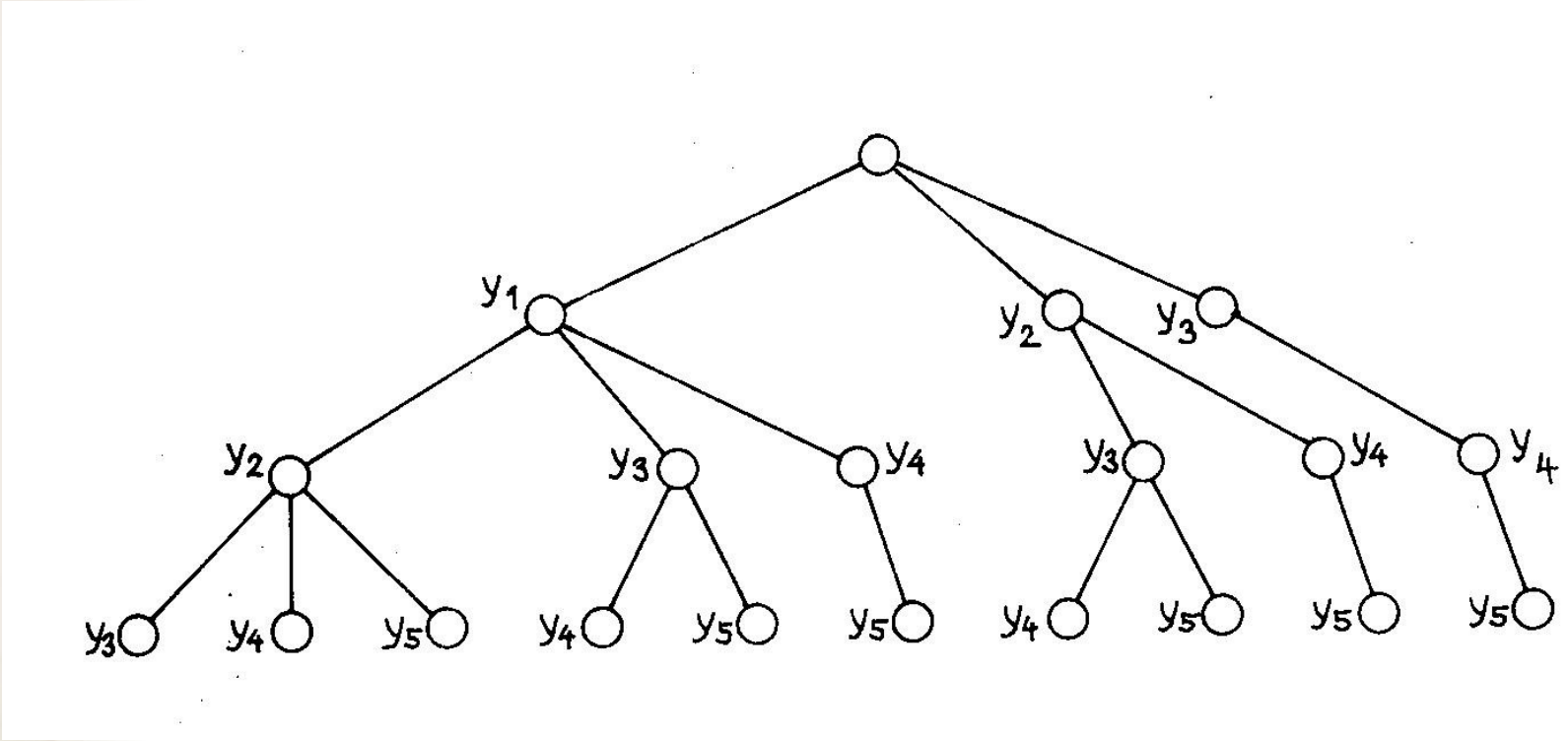
$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_j \subset \ldots \subset X_m$$

splňuje selekční kritérium vztah

$$J(X_1) \leq J(X_1) \leq \ldots \leq J(X_m)$$

ALGORITMUS OHRANIČENÉHO VĚTVENÍ

uvažme případ selekce dvou příznaků z pěti



ALGORITMUS SEKVENČNÍ DOPŘEDNÉ SELEKCE

- algoritmus začíná s prázdnou množinou, do které se vloží proměnná s nejlepší hodnotou selekčního kritéria;
- v každém následujícím kroku se přidá ta proměnná, která s dříve vybranými veličinami dosáhla nejlepší hodnoty kritéria, tj.

$$J(\{X_{k+1}\}) = \max J(\{X_k \cup y_j\}),\ y_j \in \{Y - X_k\}$$

ALGORITMUS SEKVENČNÍ ZPĚTNÉ SELEKCE

- algoritmus začíná s množinou všech příznakových veličin;
- v každém následujícím kroku se eliminuje ta proměnná, která způsobuje nejmenší pokles kriteriální funkce, tj. po (k+1). kroku platí

$$J(\{X_{m-k-1}\}) = \max J(\{X_{m-k} - y_j\}),\ y_j \in \{X_{m-k}\}$$

ALGORITMY SEKVENČNÍ SELEKCE SUBOPTIMALITA

Suboptimalita nalezeného řešení sekvenčních algoritmů je způsobena:

- ☑ dopředná selekce - tím, že nelze vyloučit ty veličiny, které se staly nadbytečné po přiřazení dalších veličin;
- ☑ zpětná selekce – neexistuje možnost opravy při neoptimálním vyloučení kterékoliv proměnné;

Dopředný algoritmus je výpočetně jednodušší, protože pracuje maximálně v n-rozměrném prostoru, naopak zpětný algoritmus umožňuje průběžně sledovat množství ztracené informace.

ALGORITMUS PLUS P MÍNUS Q

- po přidání p veličin se q veličin odstraní;
- proces probíhá, dokud se nedosáhne požadovaného počtu příznaků;
- je-li p>q, pracuje algoritmus od prázdné množiny;
- je-li p<q, varianta zpětného algoritmu

ALGORITMUS MIN - MAX

Heuristický algoritmus vybírající příznaky na základě výpočtu hodnot kriteriální funkce pouze v jedno- a dvourozměrném příznakovém prostoru.

Předpokládejme, že bylo vybráno k příznakových veličin do množiny $\{X_k\}$ a zbývají veličiny z množiny $\{Y\text{-}X_k\}$. Výběr veličiny $y_j \in \{Y\text{-}X_k\}$ přináší novou informaci, kterou můžeme ocenit relativně k libovolné veličině $x_i \in X_k$ podle vztahu

$$\Delta J(y_j,x_i) = J(y_j,x_i) - J(x_i)$$

ALGORITMUS MIN - MAX

Informační přírůstek ΔJ musí být co největší, ale musí být dostatečný pro všechny veličiny již zahrnuté do množiny X_k. Vybíráme tedy veličinu y_{k+1}, pro kterou platí

$$\Delta J(y_{k+1},x_k) = \max_j \min_i \Delta J(y_j,x_i),\ x_i \in X_k$$