Obsah prezentace

- Základní pojmy v teorii o grafech
- Úlohy a prohledávání grafů
- Hledání nejkratších cest

Základní pojmy

Vrchol grafu: {množina V}

Je to styčná vazba v grafu, nazývá se též uzlem, prvkem nebo bodem v grafu.

Hrana grafu: {množina E}

Reprezentuje spojení jednotlivých vrcholů. Toto spojení vyjadřuje nějaký vztah mezi vrcholy.

$$\boxed{\varepsilon : E \rightarrow V^2}$$

Základní pojmy

<u>Orientovaný a neorientovaný graf</u>

V orientovaném grafu jsou vždy orientované hrany, tj. hrany s definovaným počátečním a koncovým vrcholem.

V neorientovaných grafech se lze pohybovat přes hrany oběma směry.

$$G = (V, E, \varepsilon)$$

Hrany i vrcholy jsou v četných aplikacích ohodnoceny → **Ohodnocený orientovaný (neorientovaný) graf**

Základní pojmy

Sled:

Orientovaný

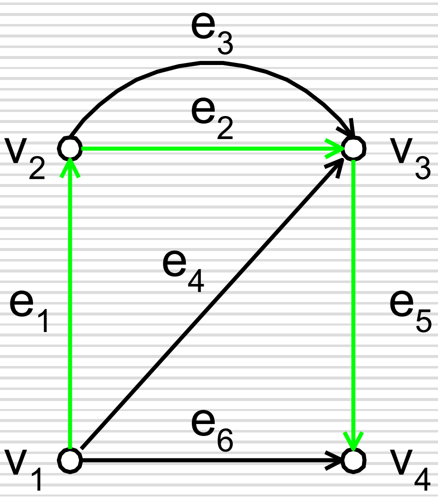
$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_4$

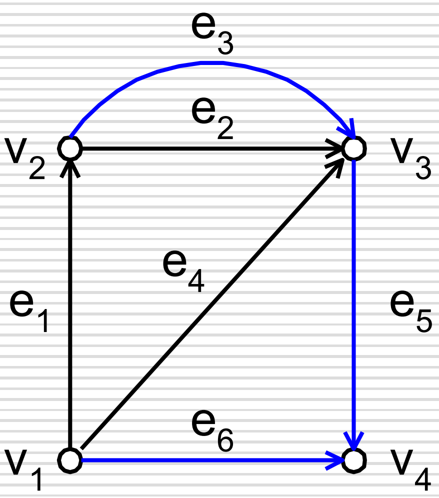
Neorientovaný

$v_2, e_3, v_3, e_5, v_4, e_6, v_1$

Není sledem

$v_1, e_2, v_3, e_5, v_2, e_1, v_4$





Posloupnost vrcholů a hran jak jdou za sebou.

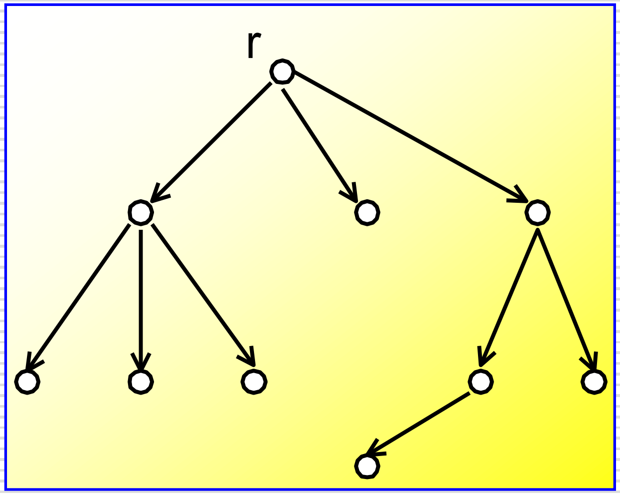
Základní pojmy

Tah

Sled, kde se neopakují hrany

Cesta

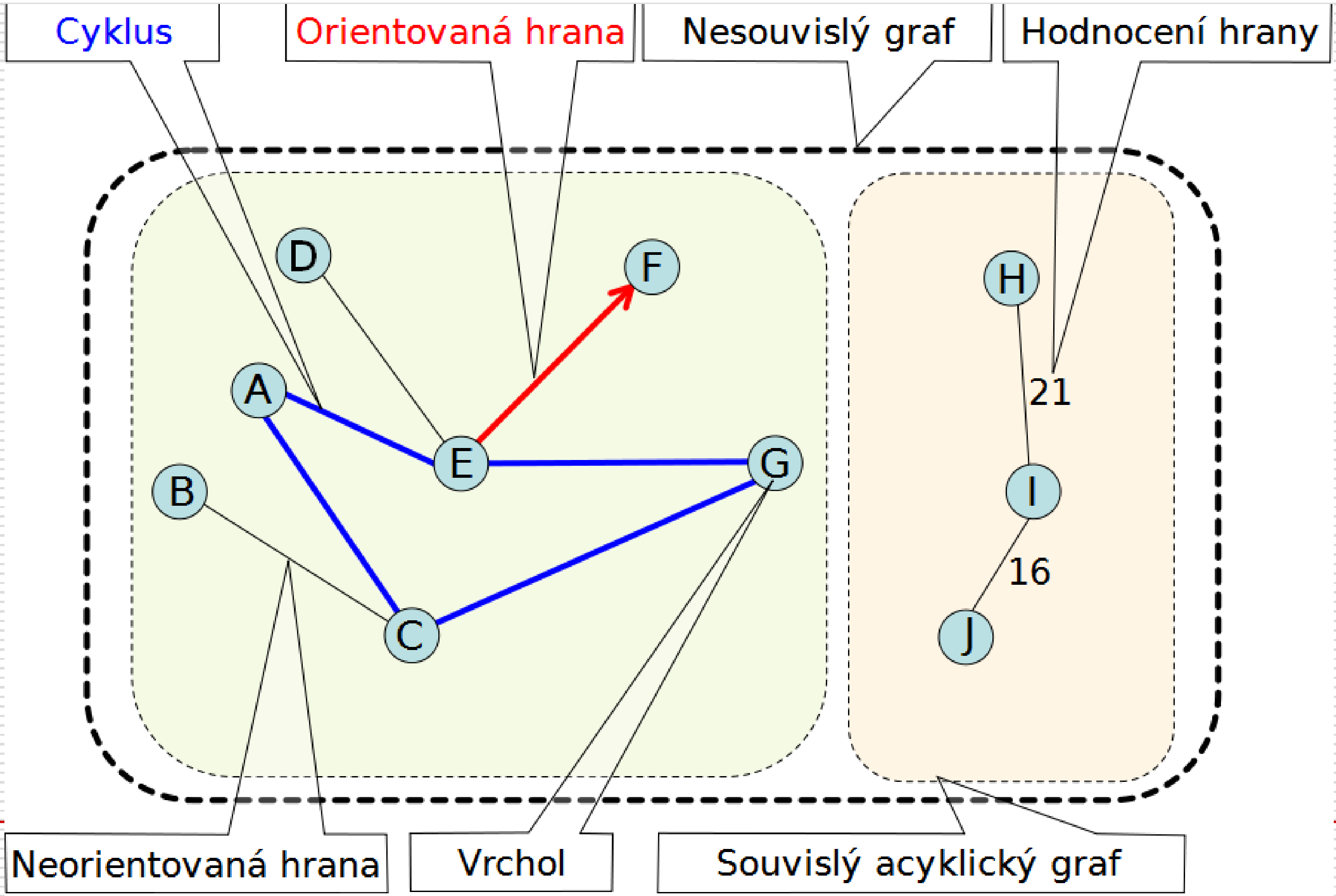
Sled, kde se neopakují vrcholy



Kořenový strom

- orientovaný graf, kde existuje vrchol r (kořen), ze kterého jsou všechny vrcholy dostupné a nevede do něj žádná hrana.

Ukázka grafu – základní pojmy



Speciální pojmy

- Hamiltonovská cesta:

  Cesta, která projde všemi vrcholy a každým pouze jedenkrát (turista).

- Eulerův tah:

  Tah, který projde všemi hranami a každou pouze jedenkrát (sedm mostů v Königsbergu).

Popis grafu

- Incidenční maticí – orientace hran (+1, -1)
- Matice sousednosti – počet hran mezi sousedy
- Spojové seznamy – seznamy následníků
- Matice délek – délka hrany mezi vrcholy (i,j)
- Matice vzdáleností

Úlohy s grafy

Grafické znázornění úlohy je názorné a v jednoduchých případech lze odhalit řešení i bez použití jakéhokoliv algoritmu.

Úloha pro převozníka:

Vlk, koza, zelí

1) v, k, z, p
2) 0

1) k, z
2) v, p

1) k, z, p
2) v

1) v
2) k, z, p

1) v, z
2) k, p

1) v, z, p
2) k

1) k
2) v, z, p

1) k, p
2) v, z

1) 0
2) v, k, z, p

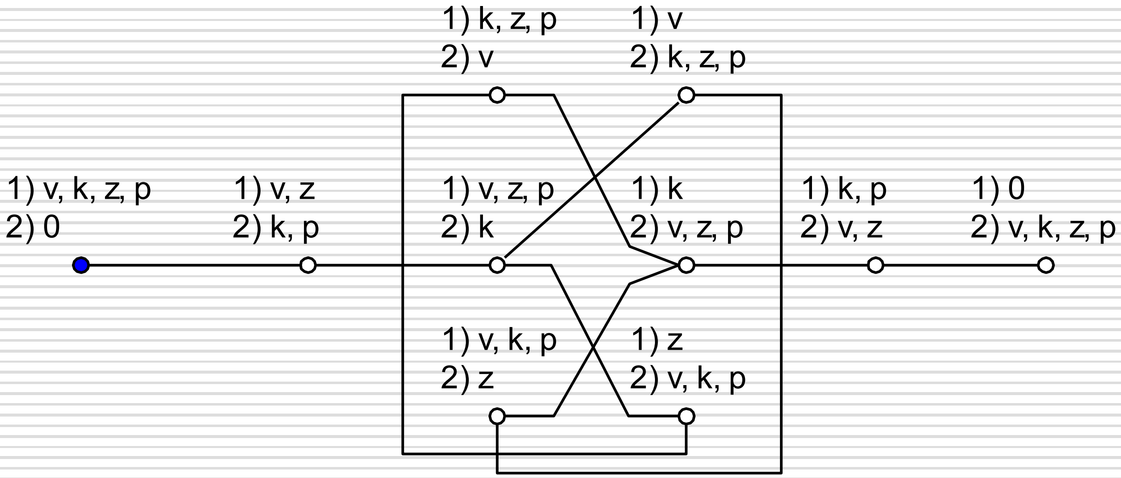
1) v, k
2) z, p

1) v, k, p
2) z

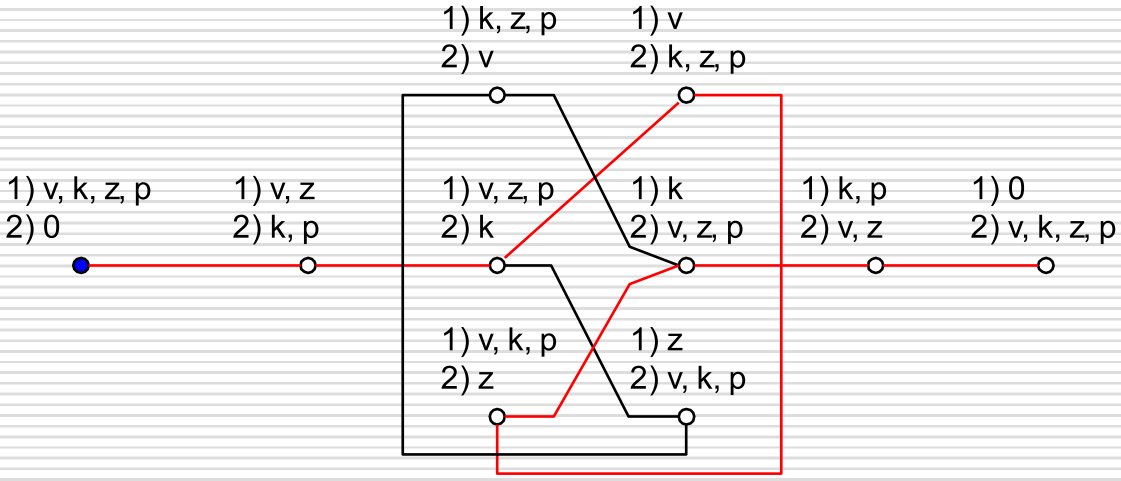
1) z
2) v, k, p

Nesmí nastat, nebudu kreslit

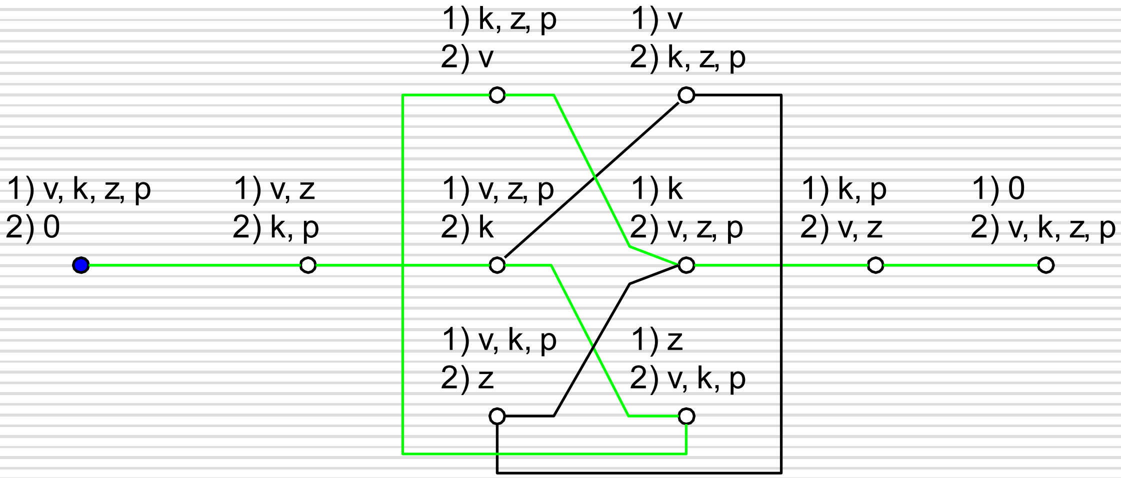
Vlk, koza, zelí



Vlk, koza, zelí



Vlk, koza, zelí



Prohledávání grafů

Úkolem prohledávání je hledání cesty z daného výchozího vrcholu do jednotlivých vrcholů grafu. To může pomoci i při vytváření grafu pro danou úlohu.

Tři způsoby prohledávání:

1) Značkování vrcholů
2) Prohledávání do šířky
3) Prohledávání do hloubky

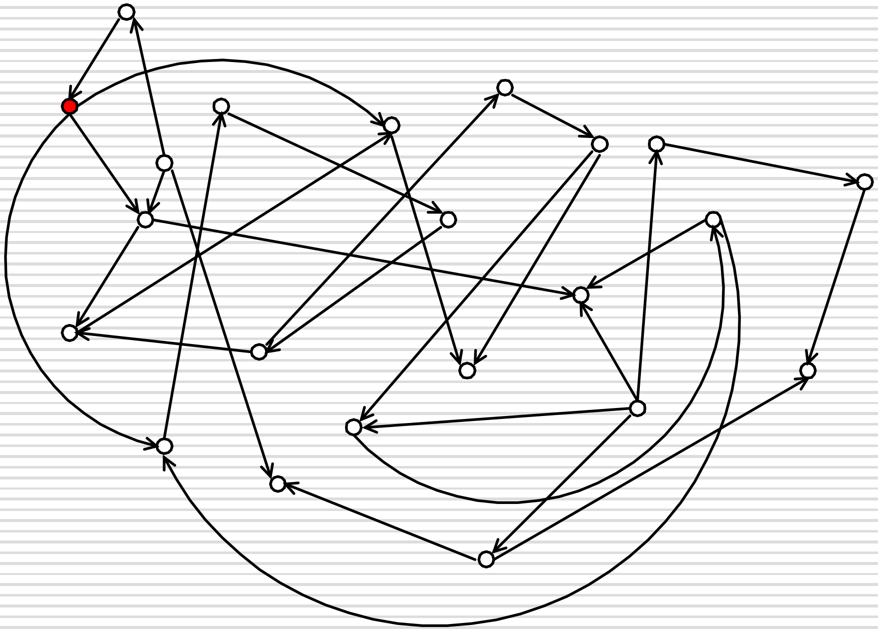
Značkování vrcholů

Vrcholům přiřazujeme značky, pokud vrchol značku má, pak do něj vede cesta z daného výchozího vrcholu => vyjadřuje možnost

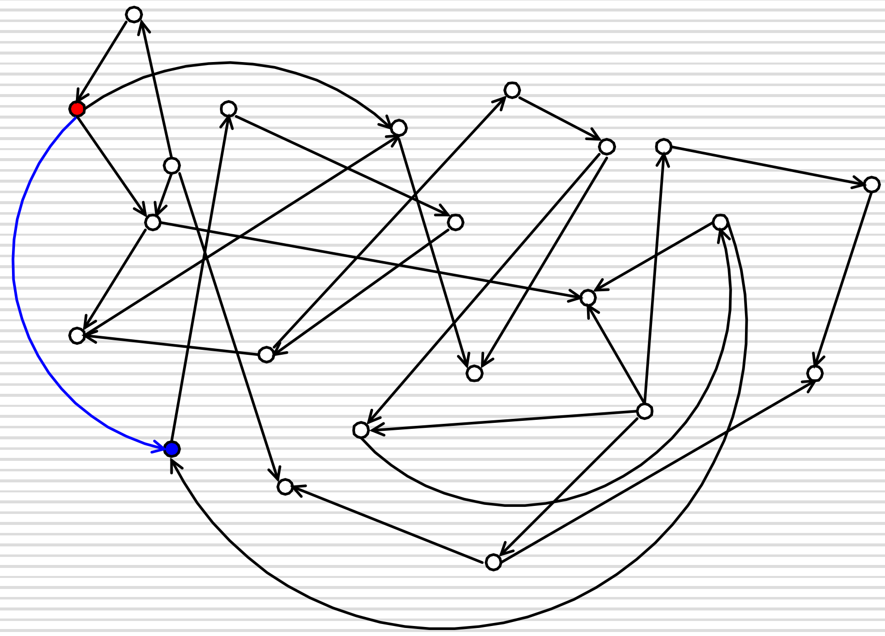
Výsledek lze převézt na kořenový strom, pokud zaznamenáme každou použitou hranu a její počáteční a koncový vrchol.

U neorientovaných grafů má tato metoda malý význam (pouze u velmi složitých, kde není zřejmé propojení jednotlivých vrcholů částí grafu).

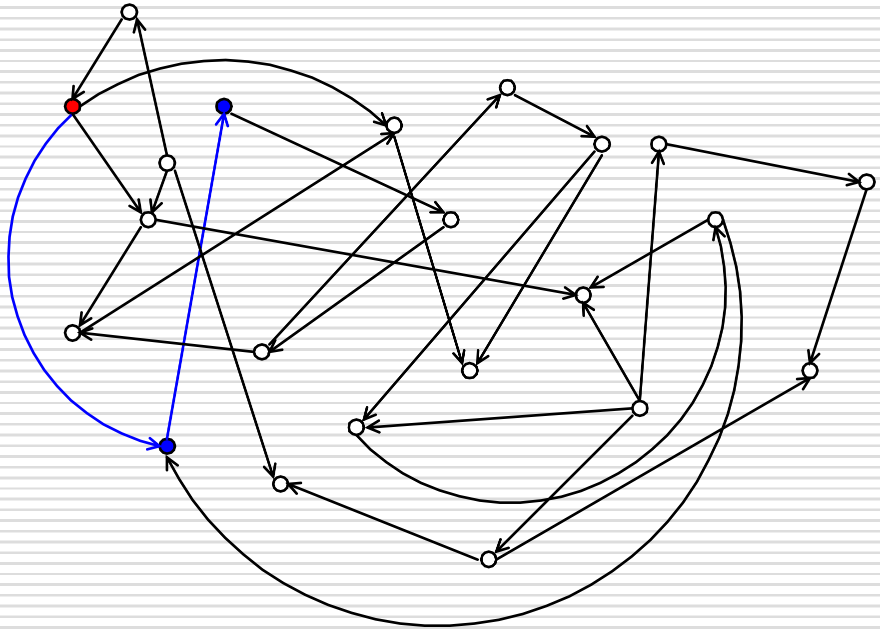
Značkování vrcholů



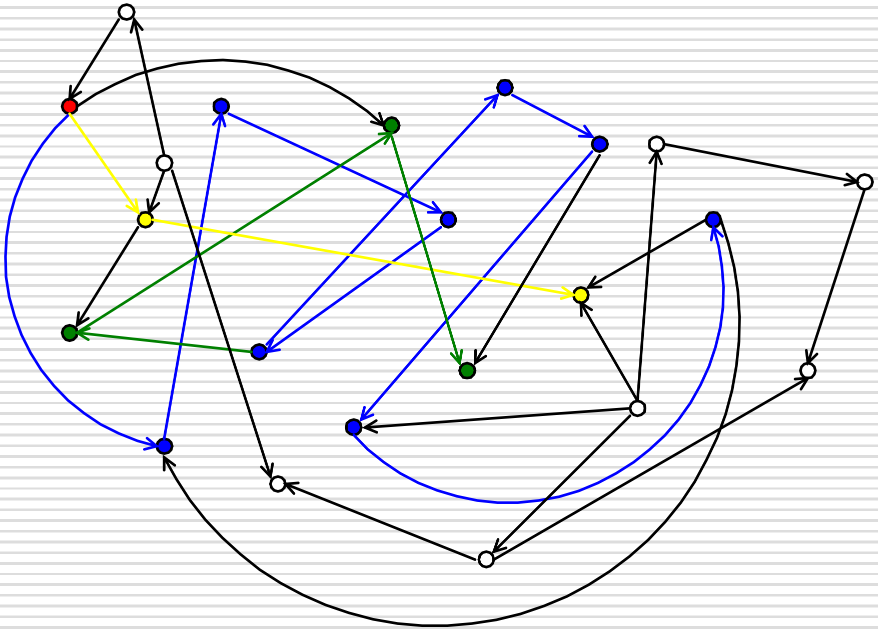
Značkování vrcholů



Značkování vrcholů



Značkování vrcholů



Značkování vrcholů

Vlastnosti:

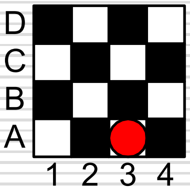
- Odpovídá na otázku: „Je možné?"
- Jednoduchý algoritmus
- Malé časové nároky: max V(G) – 1
- Nelze jej použít při hledání cest s určitými vlastnostmi (nejkratší, nejdelší).

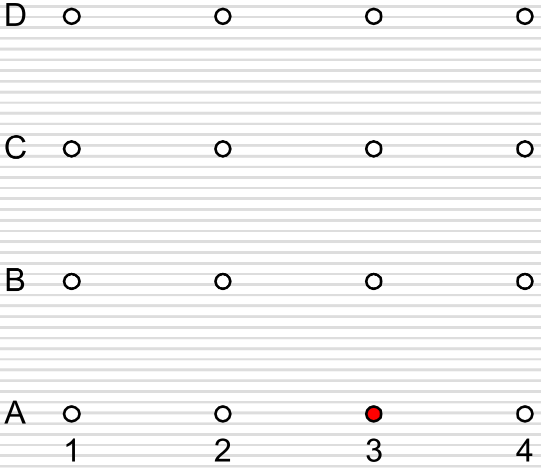
Prohledávání grafu do šířky

Algoritmus lze přirovnat ke štěpné reakci. Probíhá tak, že počátečnímu vrcholu označíme všechny následníky, pak označíme následníky následníků atd.

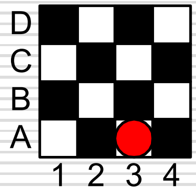
Metoda vede k nalezení nejkratší cesty, za předpokladu, že hrany mají stejnou hodnotu => nejmenší počet tahů.

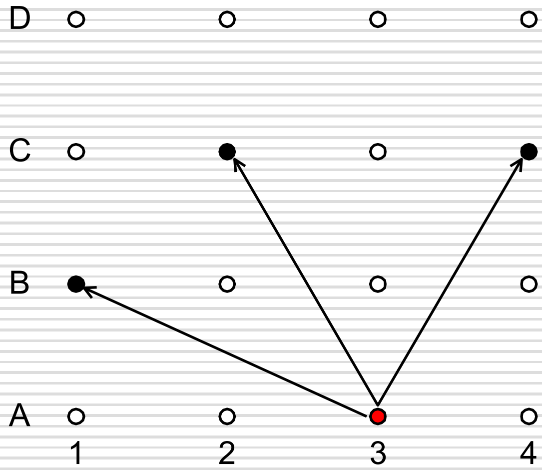
Prohledávání do šířky



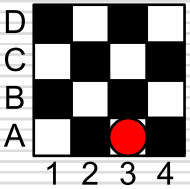


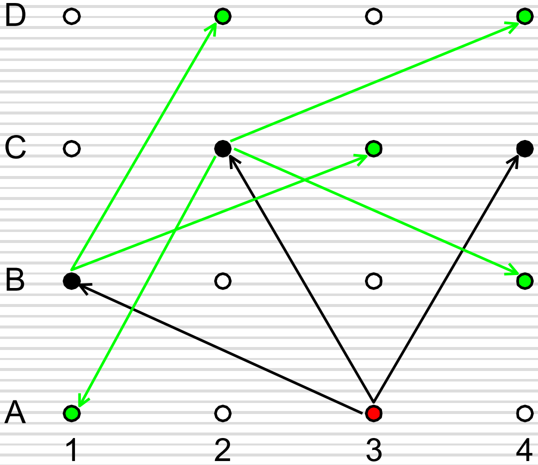
Prohledávání do šířky



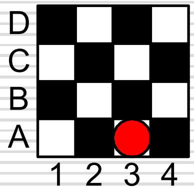


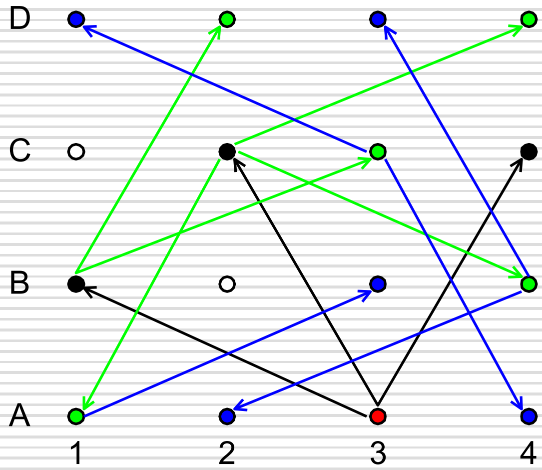
Prohledávání do šířky



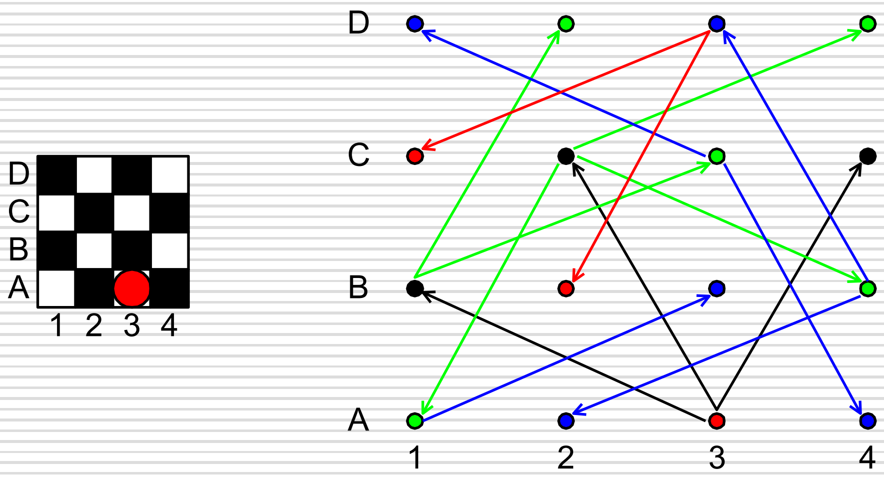


Prohledávání do šířky





Prohledávání do šířky



Prohledávání grafu do šířky

Vlastnosti:

- Podobné časové nároky jako v případě značkování vrcholů: max V(G) – 1
- Získáme kořenový strom s nejmenším počtem úrovní

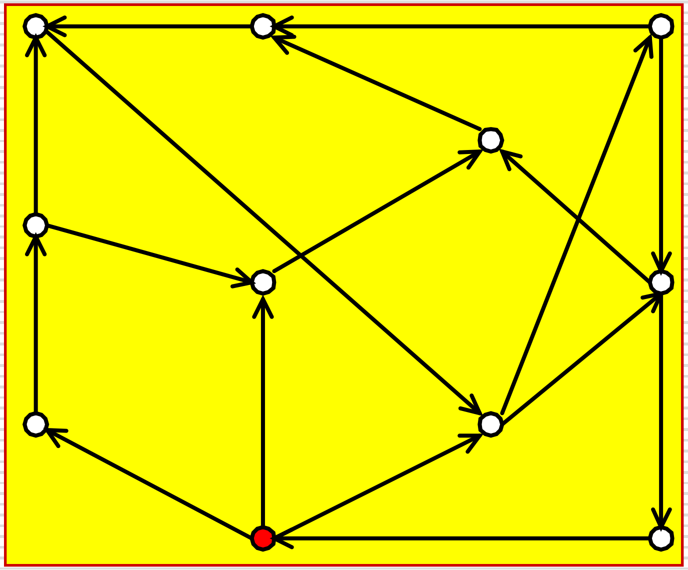
Prohledávání do hloubky

Podobá se průzkumu neznámých tras. Je základem pro další metody. Jdeme do hloubky grafu kam až můžeme a pak se vracíme a hledáme odbočky, kterými lze dále pokračovat.

Algoritmus je časově náročnější než oba předešlé, avšak jeho úpravou a zaznamenáváním jednotlivých tras jej lze využít pro hledání cest splňujících nějakou speciální podmínku. Například cesta začínající v r a obsahující všechny vrcholy =Hamiltonovská cesta

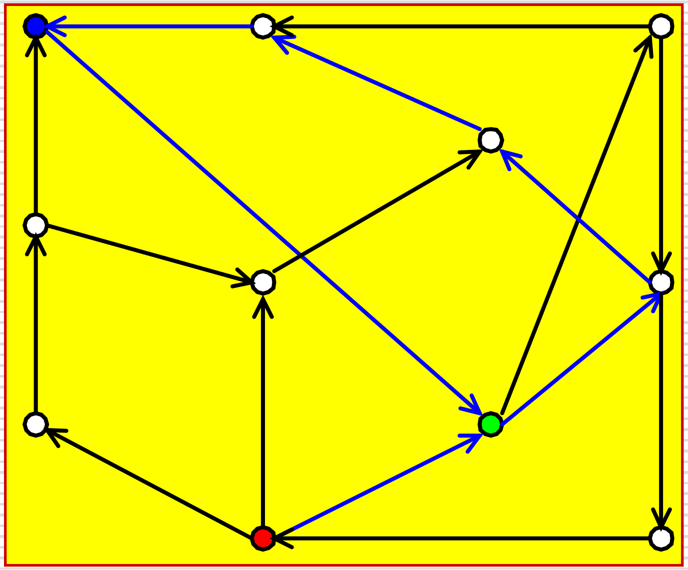
Návštěvník zábavního parku

- Chce se dostat na všechny atrakce
- Atrakce jsou spojeny elektrickým vláčkem
- Žádné nádraží nechce navštívit dvakrát



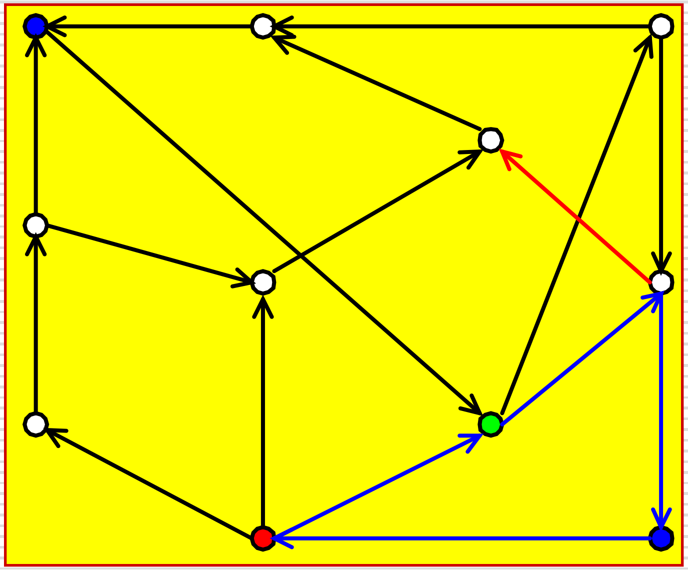
Návštěvník zábavního parku

- Naplánuje jednu trasu a kouká kam až dojde.
- Označí si koncový vrchol a vrchol, který mu zabránil v cestě.

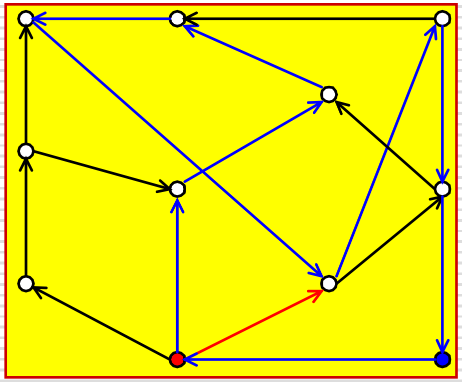


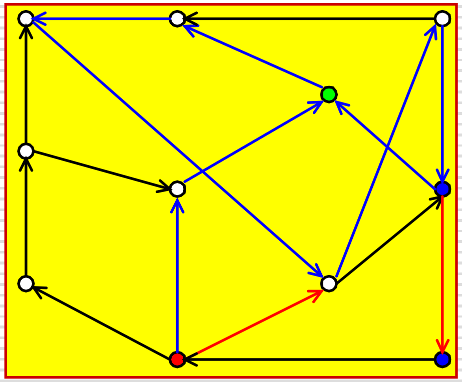
Návštěvník zábavního parku

- Vrací se zpět, až k prvnímu vrcholu, kde může odbočit.
- Označí hranu, kterou se vrátil.
- Pokud narazí na další koncový bod, vrátí se až za nejbližší vrchol, který působí konec a začne hledat znovu

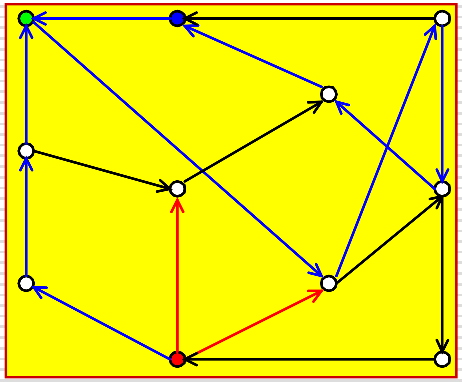


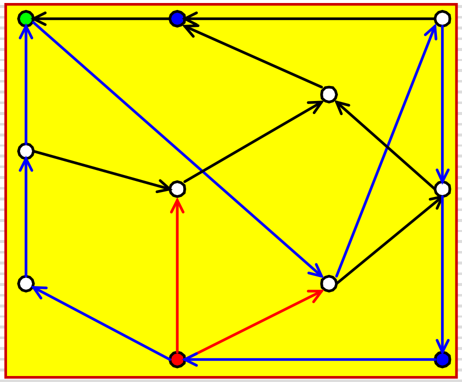
Návštěvník zábavního parku



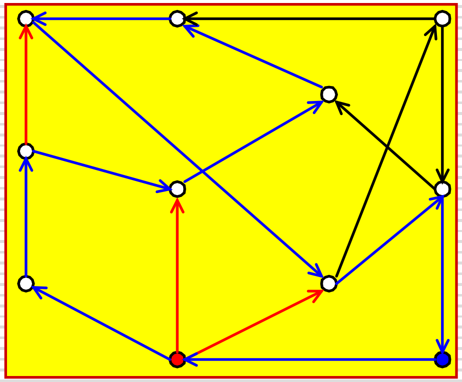


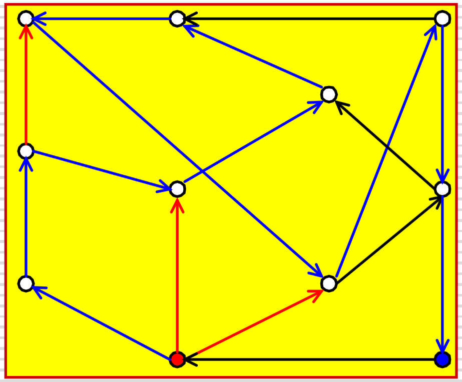
Návštěvník zábavního parku





Návštěvník zábavního parku





Eulerův tah

- Uzavřený:
  - $\Rightarrow$ Vrátíme se do stejného vrcholu

- Otevřený:
  - $\Rightarrow$ Skončíme v jiném vrcholu

Eulerův tah

Uzavřený:

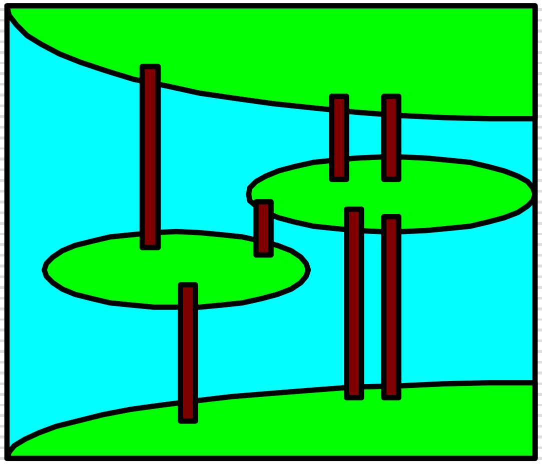
- Neorientovaný – vrcholy mají sudý stupeň
- Orientovaný – počet vstupních hran je stejný jako počet výstupních

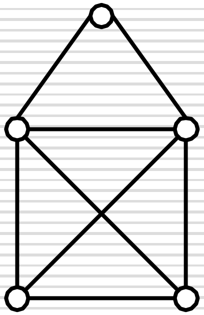
Otevřený:

- Neorientovaný – obsahuje právě dva vrcholy s lichým stupněm
- Orientovaný – stejně jako neor. + do jednoho vrcholu musí hrana vcházet, z druhého vycházet.

Eulerův tah

Sedm mostů v Königsbergu





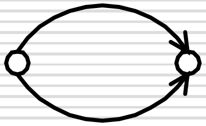
Musí se začít ve spodních vrcholech!

Nejkratší cesty

Úloha: najít nejkratší cestu

- z daného výchozího vrcholu do daného cílového vrcholu
- z daného výchozího vrcholu do každého vrcholu
- z každého vrcholu do daného cílového vrcholu
- mezi všemi uspořádanými dvojicemi

Lze vynechat smyčky a rovnoběžné hrany



MATICE DÉLEK

Charakterizuje délky hran mezi jednotlivými vrcholy. Definice:

$a_{ii} = 0$,

$a_{ij} =$ délka hrany mezi vrcholy i a j;

Pokud zde hrana nevede, pak značím nekonečno.

MATICE VZDÁLENOSTÍ

Charakterizuje vzdálenosti jednotlivých vrcholů. Definice:

$u_{ii} = 0$,

$u_{ij} =$ vzdálenost mezi vrcholy i a j;

Pokud do vrcholu j nevede cesta z i pak je u_{ij} rovno nekonečnu.

MATICE VZDÁLENOSTÍ

Matice vzdáleností je přímo maticí nejkratších cest. Pokud nás nezajímá kudy cesta vede, lze použít k jejímu výpočtu následující způsoby:

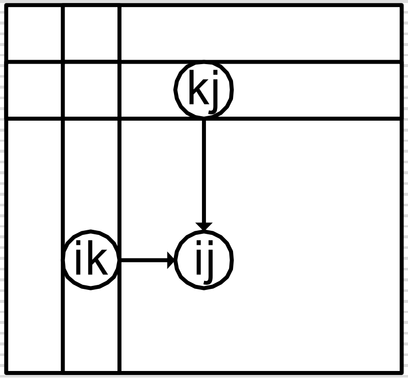
1. Upravené násobení matic
2. Floydův algoritmus

MATICE VZDÁLENOSTÍ

Floydův algoritmus:

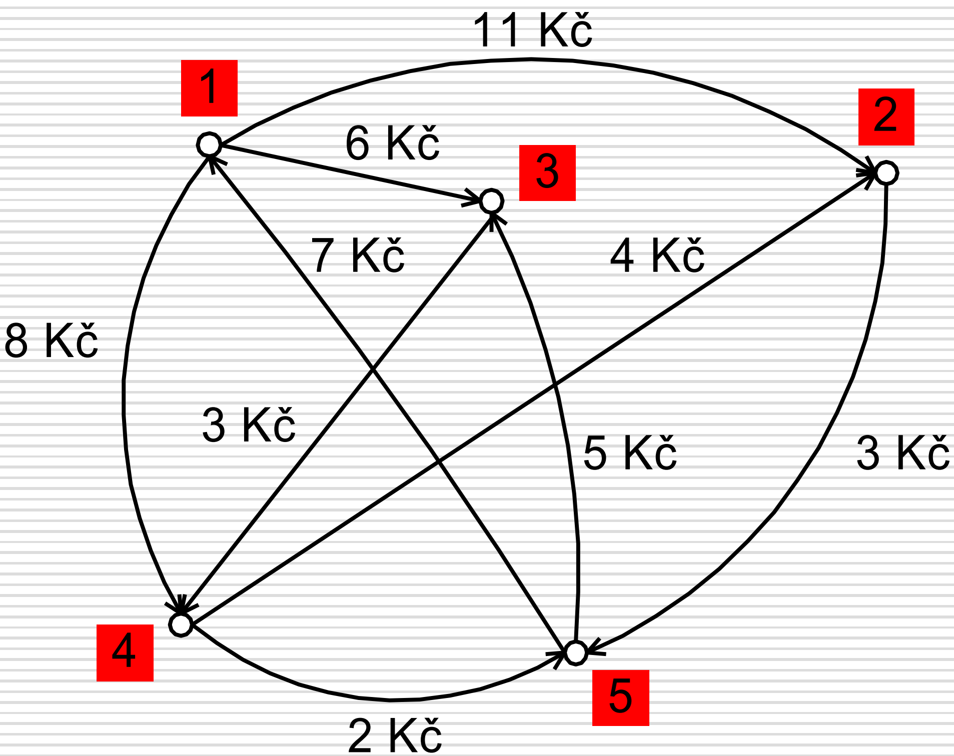
Podmínka:

$$U(i,j) > U(i,k) + U(k,j) \Rightarrow U(i,j) = U(i,k) + U(k,j)$$



MATICE VZDÁLENOSTÍ

Příklad: Minimální náklady na dopravu zboží



	1	2	3	4	5
1	0	11	6	8	∞
2	∞	0	∞	∞	3
3	∞	∞	0	3	∞
4	∞	4	∞	0	2
5	7	∞	5	∞	0

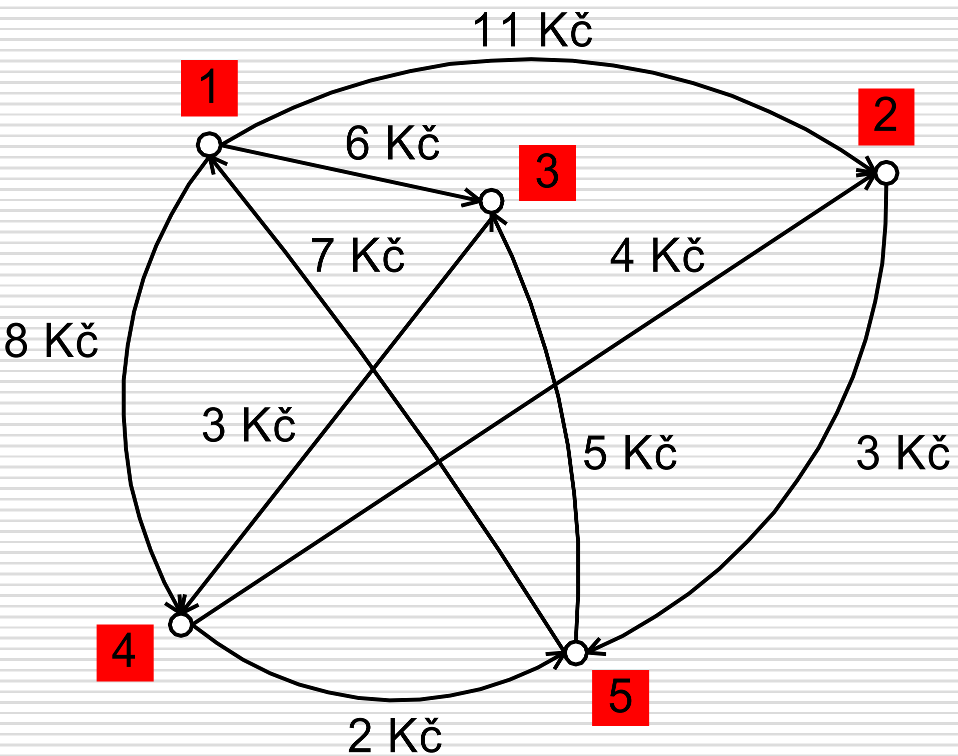
	1	2	3	4	5
1	0	11	6	8	∞
2	∞	0	∞	∞	3
3	∞	∞	0	3	∞
4	∞	4	∞	0	2
5	7	∞	5	∞	0

	1	2	3	4	5
1	0	11	6	8	∞
2	∞	0	∞	∞	3
3	∞	∞	0	3	∞
4	∞	4	∞	0	2
5	7	18	5	15	0

	1	2	3	4	5
1	0	11	6	8	14
2	∞	0	∞	∞	3
3	∞	∞	0	3	∞
4	∞	4	∞	0	2
5	7	18	5	15	0

MATICE VZDÁLENOSTÍ

Příklad: Minimální náklady na dopravu zboží



	1	2	3	4	5
1	0	11	6	8	14
2	∞	0	∞	∞	3
3	∞	∞	0	3	∞
4	∞	4	∞	0	2
5	7	18	5	8	0

	1	2	3	4	5
1	0	11	6	8	10
2	∞	0	∞	∞	3
3	∞	7	0	3	5
4	∞	4	∞	0	2
5	7	18	5	8	0

	1	2	3	4	5
1	0	11	6	8	10
2	10	0	8	11	3
3	12	7	0	3	5
4	9	4	7	0	2
5	7	18	5	8	0

Součty
35 Kč
32 Kč
27 Kč
22 Kč
38 Kč

Závěrem

- Použití grafů je názornou pomůckou při řešení složitých problémů.
- Složitá řešení se zpravidla již neobejdou bez použití výpočetní techniky.
- Byl to jen letmý úvod, grafy se dále zabývají toky, hledání cyklů, nejlevnějších tahů, úlohami o párování…