



SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTEMY



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz



X. SIGNÁLY DALŠÍ POJMY



ENERGIE

- ☑ okamžitá práce vykonaná na odporu R:

$$A(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- ☑ podle Ohmova zákona:

$$U = R \cdot I,$$

a tedy můžeme po dosazení psát

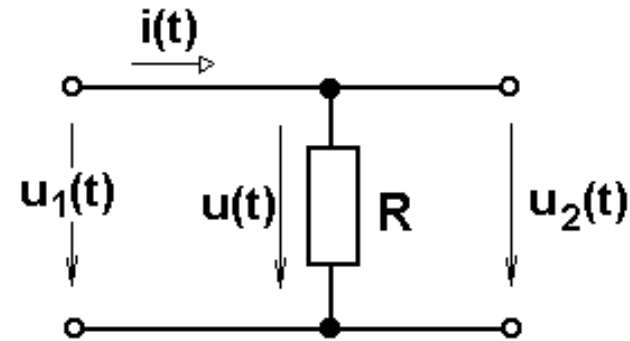
$$A(t) = R \cdot i(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = u(t) \cdot u(t)/R = u^2(t)/R.$$

Když je $R = 1 \Omega$ je

$$A(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

a celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T i^2(t) dt = \int_T u^2(t) dt$$



ENERGIE

- ☑ z té úvahy energie spojitého signálu $s(t)$

$$E_s = \int_T s^2(t) dt$$

- ☑ energie diskrétního signálu

$$E_d = \sum_n^N s^2(nT)$$

VÝKON

- ✓ výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt \quad P = I \quad P_{s_\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt$$

$$P_d = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s^2(nT) \quad P_{dn} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s^2(n)$$

$$P_{dn_\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s^2(n)$$

KORELAČNÍ FUNKCE

- ✓ vzájemná či křížová korelační funkce (cross-correlation function) dvou periodických signálů (funkcí) o téže periodě T je definována

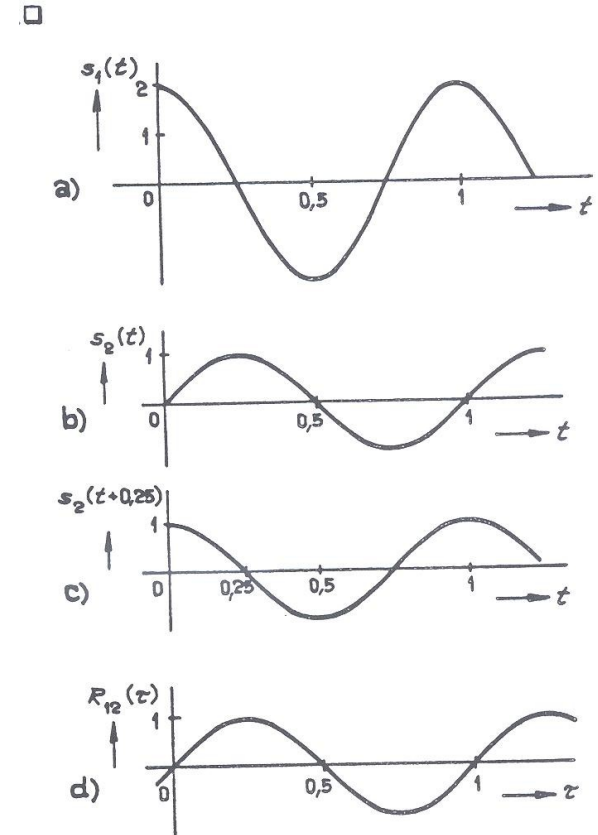
$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) s_2(t + \tau) dt$$

- ✓ popisuje podobnost průběhů obou signálů v závislosti na jejich posunutí
- ✓ je periodická s periodou T

KORELAČNÍ FUNKCE

- ☑ Vypočtete vzájemnou korelační funkci signálů $s_1(t) = 2\cos 2\pi t$ a $s_2(t) = \sin 2\pi t$. Oba signály mají tutéž periodu $T=1$, takže

$$\begin{aligned}
 R_{12}(\tau) &= \int_0^1 s_1(t) s_2(t + \tau) dt \\
 &= \int_0^1 2 \cos 2\pi t \sin 2\pi(t + \tau) dt \\
 &= \int_0^1 2 \cos 2\pi t \sin(2\pi t + 2\pi\tau) dt \\
 &= \int_0^1 2 \cos 2\pi t [\sin 2\pi t \cos 2\pi\tau + \cos 2\pi t \sin 2\pi\tau] dt \\
 &= 2 \cos 2\pi\tau \int_0^1 \cos^2 2\pi t \sin 2\pi t dt + 2 \sin 2\pi\tau \int_0^1 \cos 2\pi t \cos 2\pi t dt \\
 &= 2 \cos 2\pi\tau \left[-\frac{\cos^3 2\pi t}{3} \right]_0^1 + 2 \sin 2\pi\tau \left[\frac{\sin 2\pi t}{2\pi} \right]_0^1 \\
 &= 2 \cos 2\pi\tau \left(-\frac{\cos^3 2\pi}{3} + \frac{\cos^3 0}{3} \right) + 2 \sin 2\pi\tau \left(\frac{\sin 2\pi}{2\pi} - \frac{\sin 0}{2\pi} \right) \\
 &= 2 \cos 2\pi\tau \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + 2 \sin 2\pi\tau \left(\frac{0}{2\pi} - \frac{0}{2\pi} \right) \\
 &= 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$



Obr. 1-34. Korelační funkce.
 a) Signál $s_1(t)$,
 b) signál $s_2(t)$,
 c) signál $s_2(t + 0,25)$,
 d) korelační funkce $R_{12}(\tau)$.

KORELAČNÍ FUNKCE

- ✓ výpočet korelační funkce má smysl i v případě, že jsou oba signály totožné – autokorelační funkce

$$R_{\tau} = \frac{1}{T} \int_{\tau} s(t)s(t+\tau) dt$$

- ✓ Vypočtěte autokorelační funkci signálu $s(t) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$$\begin{aligned} R_{\tau} &= \frac{1}{T} \int_0^T C \cos(\omega t + \varphi) C \cos(\omega(t + \tau) + \varphi) dt \\ &= \frac{C^2}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \omega \tau + \varphi) dt \\ &= \frac{C^2}{2T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) [\cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \omega \tau + \varphi)] dt \\ &= \frac{C^2}{2T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt + \frac{C^2}{2T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \omega \tau + \varphi) dt \\ &= \frac{C^2}{2T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt + \frac{C^2}{2T} \int_0^T \frac{\cos(\omega \tau) + \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)}{2} dt \\ &= \frac{C^2}{4T} \int_0^T (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi) + \cos(\omega \tau) + \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)) dt \\ &= \frac{C^2}{4T} \left[t + \frac{\sin(2\omega t + 2\varphi)}{2\omega} + \cos(\omega \tau) t + \frac{\sin(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)}{2\omega} \right]_0^T \\ &= \frac{C^2}{4} \left[\frac{T}{T} + \frac{\sin(2\omega T + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{2\omega T} + \cos(\omega \tau) \frac{T}{T} + \frac{\sin(2\omega T + \omega \tau + 2\varphi) - \sin(\omega \tau + 2\varphi)}{2\omega T} \right] \\ &= \frac{C^2}{4} \left[1 + \cos(\omega \tau) + \frac{\sin(2\omega T + 2\varphi) - \sin(2\varphi) + \sin(2\omega T + \omega \tau + 2\varphi) - \sin(\omega \tau + 2\varphi)}{2\omega T} \right] \end{aligned}$$

KORELAČNÍ FUNKCE

- ☑ vypočtená korelační funkce je:
 - sudá;
 - periodická s periodou T ;
 - $R(0)$ je rovno kvadrátu efektivní hodnoty signálu;
 - $\forall \tau \in \mathbb{R}: R(0) \geq R(\tau)$.
- ☑ tyto čtyři vlastnosti mají autokorelační funkce všech periodických signálů.

KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ✓ **korelační funkce** $R(t_1, t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_1 a hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_2 .
Může být spočítána pomocí vztahu

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- ✓ **kovarianční funkce** (covariance function) $K(t_1, t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_1 od $m(t_1)$ a odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_2 od $m(t_2)$. Může být spočítána pomocí vztahu

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m(t_1)) (x_2 - m(t_2)) p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ tyto poměrně obecné vztahy se mohou zjednodušit, pokud se zjednoduší vlastnosti náhodných procesů



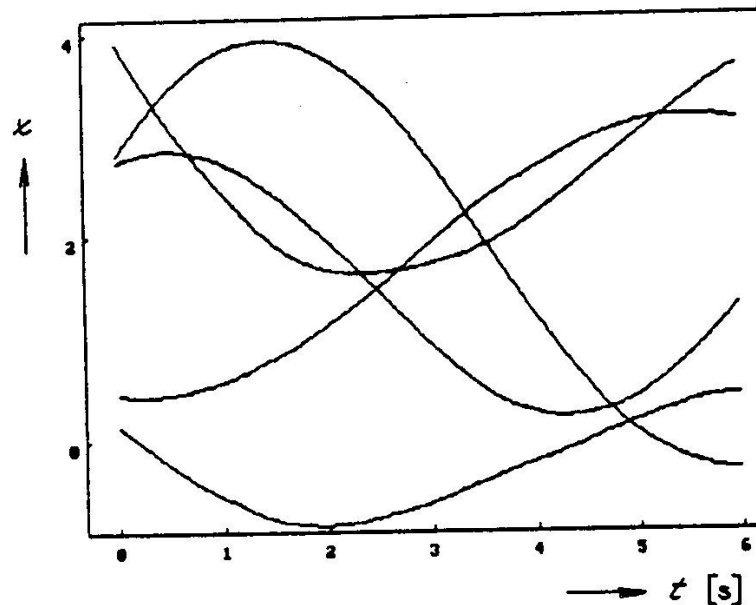
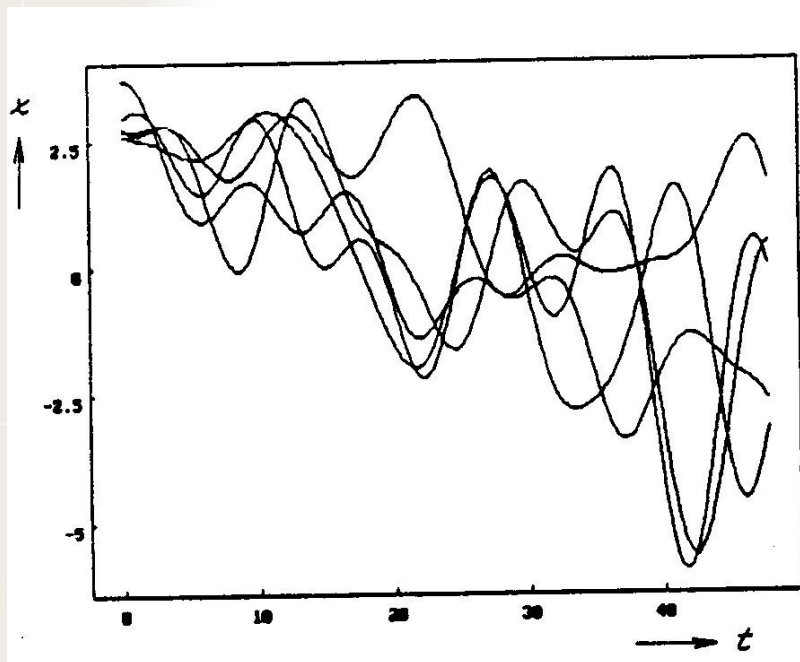
stacionarita

ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (stationary random process) je proces se stálým chováním



STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

v tom případě, tj. s $\tau = t_2 - t_1$, můžeme funkce $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$, $R(t_1, t_2)$ a $K(t_1, t_2)$ nahradit funkcemi $p(x_1, x_2, \tau)$, $R(\tau)$ a $K(\tau)$

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (ergodic random process) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejně chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace

☑ aritmetický průměr

$$\hat{m} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x(t_i)$$

nebo

$$\hat{m} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Odhad bude tím věrohodnější, čím bude úsek T delší.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

- ✓ disperze

$$\hat{D} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt$$

- ✓ autokorelační funkce

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau) dt$$

- ✓ křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy $\xi(t)$ a $\eta(t)$ s realizacemi $x(t)$ a $y(t)$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt = \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau) dt \right)$$

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

- ✓ křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy $\xi(t)$ a $\eta(t)$ s realizacemi $x(t)$ a $y(t)$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt = \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau) dt \right)$$

- ✓ pro diskrétní případ

$$\hat{R}_{xy}(nT) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1-n} x(mT)y(mT+nT) = \left(\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1-n} x(mT)y(mT-nT) \right)$$

SOUHLASNÝ FILTR

zopakujeme (třeba pro diskrétní signál):

- ☑ konvoluce

$$s_1(nT) * s_2(nT) \stackrel{n}{=} s_2(nT) \approx \hat{S}_1(z) S_2(z)$$

- ☑ výstup lineárního systému $y(nT)$ pomocí konvoluce vstupní posloupnosti $x(nT)$ s impulsní charakteristikou $h(nT)$

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{M1} h(nT - mT) x(mT) = \sum_{m=0}^{M1} x(mT) h(nT - mT)$$

SOUHLASNÝ FILTR

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{M-1} x(mT)h(nT - mT)$$

- ☑ korelační funkce

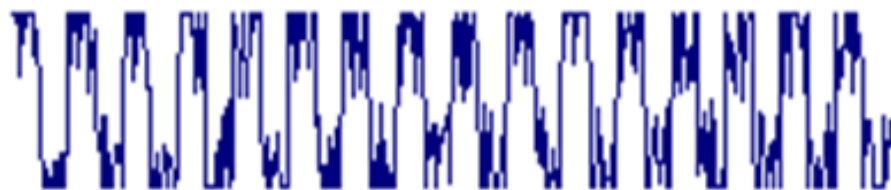
$$\hat{R}_{xz}(nT) = \sum_{m=0}^{M-1} x(mT)z(nT - mT) = \sum_{m=0}^{M-1} x(mT)h(nT - mT)$$

- ☑ kdyby se signál $z(kT) = h(-kT)$, tj. byl roven časově inverznímu průběhu impulsní odezvy filtru, pak konvoluční výpočet odezvy filtru představuje korelaci vstupního signálu s časově inverzním průběhem impulsní odezvy

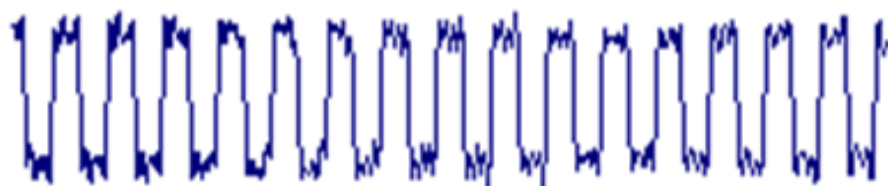
SOUHLASNÝ FILTR

- ☑ **souhlasný** (přizpůsobený) **filtr** (matched filter) je představován vzájemnou korelací známého průběhu signálu (šablony – template) se signálem ve kterém chceme detekovat přítomnost šablony. To je ekvivalentní konvoluci neznámého signálu s časově inverzním průběhem šablony
- ☑ souhlasný filtr je **optimální lineární filtr**, který maximalizuje poměr signál/šum (SNR – signal to noise ratio).
- ☑ použití:
 - radarová technika
 - detekce vln např. v signálu EKG nebo EEG;
 - zpracování obrazů (RTG, snímky očního pozadí, ...)

SOUHLASNÝ FILTR



a noisy square wave...

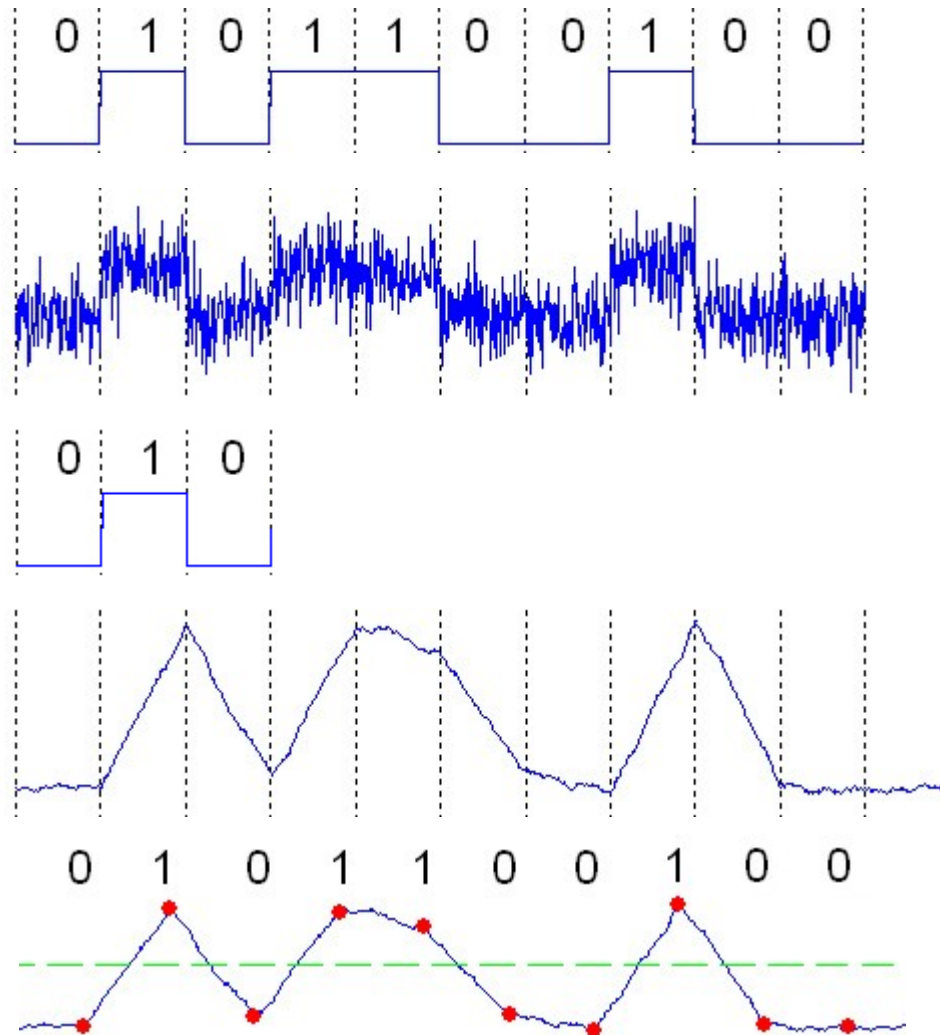


... is improved by filtering
with a single band pass filter...



... but the best signal to noise
comes from a matched filter

SOUHLASNÝ FILTR





XI. VÝKONOVÉ SPEKTRUM



SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA

- ☑ opakování
 - periodický signál

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA

☑ opakování

- periodický signál
- neperiodický signál
 - ☐ s konečnou energií

Fourierova řada

$$E = \int_a^{\infty} x_a^2(t) dt$$

SPOJITÝ SIGNÁL

- ✓ Fourierova transformace

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \exp(j2\pi ft) dt$$

Parsevalova věta

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_a^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f)^2 df$$

spektrální hustota energie $S_{xx}(f)$

SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA ENERGIE

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)x_a(t+\tau) dt$$

autokorelační funkce signálu $x_a(t)$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

obě funkce tvoří

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) \exp(j2\pi f\tau) df$$

Fourierovský pár

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

$$X(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(2jfnT) \quad x(nT) = \int_{-F/2}^{F/2} X(f) \exp(2jfnT) df$$

Fourierova transformace s diskrétním časem

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - kF) \quad \text{spektrální periodicitata}$$

$$T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(nT) = \int_{-F/2}^{F/2} X(f)^2 df \quad \text{Rayleighova věta}$$

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

☑ Wiener-Khinchinova věta:

$$R_{xx}(mT) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(nT + \tau) x(nT) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau$$

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(-j2\pi f nT) \right|^2$$

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

☑ z toho plyne, že spektrální hustotu energie neperiodického signálu s konečnou energií lze spočítat dvěma způsoby:

→ přímá metoda:

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = |T \cdot \sum x(nT) \cdot \exp(-2\pi jfnT)|^2$$

→ nepřímá metoda:

$$1) R_{xx}(mT) = T \cdot \sum x(nT) \cdot x(nT+mT);$$

$$2) S_{xx}(f) = \sum R_{xx}(mT) \cdot \exp(-2\pi jfmT)$$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

(je to vůbec možné ?!?!?)

SPOJITÝ SIGNÁL:

není konečná energie \Rightarrow není definována
F.T. \Rightarrow není F. spektrum

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

VÝKONOVÝ EXKURZ:

střední výkon periodického signálu:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_a^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_a^2(t) dt = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x_a^2(t) dt$$

neperiodický signál je takový periodický signál, jehož perioda $T_0 \rightarrow \infty$

střední výkon neperiodického signálu

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_a^2(t) dt = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} E$$

je-li $E < \infty$, pak $P \rightarrow 0$ (nezajímavé);

$E > \infty$, pak $P = \lim \infty / \infty = K \in \langle 0, \infty \rangle$!

$= \rightarrow \infty$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- spektrální hustota výkonu:

$$G_{xx}(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{S}_{xx}(f)|^2}{2T_0}$$

- Wiener-Khinchinovy vztahy:

$$G_{xx}(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} R_{xx}(\tau) \exp(j2\pi f \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xx}(\tau) \exp(j2\pi f \tau) d\tau$$

kde

$$g_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x_a(t) x_a(t + \tau) dt$$

AKF náhodných stacionárních ergodických procesů

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ☑ odhad pouze z konečného intervalu

$$\tilde{g}_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x_a(t) x_a(t + \tau) dt$$

- ☑ odhad spektrální hustoty výkonu ze signálu v konečném intervalu

$$G_{xx}(f) = \frac{1}{T_0} \left| \int_{-T_0}^{T_0} x_a(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2$$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

☑ **DISKRÉTNÍ SIGNÁL**

→ vzorkováním signálu $x_a(t)$ vzorkovací frekvencí

$$F > 2f_{\max};$$

→ výsledná posloupnost x_{nT} má N hodnot

$$(0 \leq n \leq N-1)$$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- odhad spektrální hustoty výkonu z konečné posloupnosti (nepřímá metoda)

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-N_1}^{N_1} \tilde{r}_{xx}(mT) \exp(j2\pi f m T)$$

- odhady AK posloupnosti:

$$\tilde{r}_{xx1}(mT) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(nT) x(nT+mT), \quad m=0, \dots, N-1$$

$$\tilde{r}_{xx2}(mT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(nT) x(nT+mT), \quad m=0, \dots, N-1$$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ✓ periodogram (Schuster 1898) (přímá metoda)

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{T} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n T) \right|^2$$

NEPARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

- ☑ nekladou žádné požadavky na znalosti vlastností signálu;
- ☑ všechny uvedené metody vycházejí z konečné posloupnosti vzorků signálu \Rightarrow frekvenční rozlišovací schopnost je při nejlepším určena spektrální šířkou obdélníkového okna
(všechny metody však snižují frekvenční rozlišení díky snaze o snížení rozptylu spektrálního odhadu)

BARTLETOVA METODA

- ✓ rozdělení posloupnosti N vzorků na K nepřekrývajících se segmentů, každý o délce M
 $x_i(nT) = x(nT+iMT)$, $i=0, 1, \dots, K-1$; $n=0, 1, \dots, M-1$
- ✓ pro každý segment se spočítá periodogram

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(nT) \exp(-j2\pi f nT) \right|^2, \quad i=0, \dots, K-1$$

- ✓ zprůměrněním periodogramů ze všech K segmentů dostaneme odhad výkonového spektra

$$P_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f)$$

WELCHOVA METODA

dvě modifikace Bartletovy metody

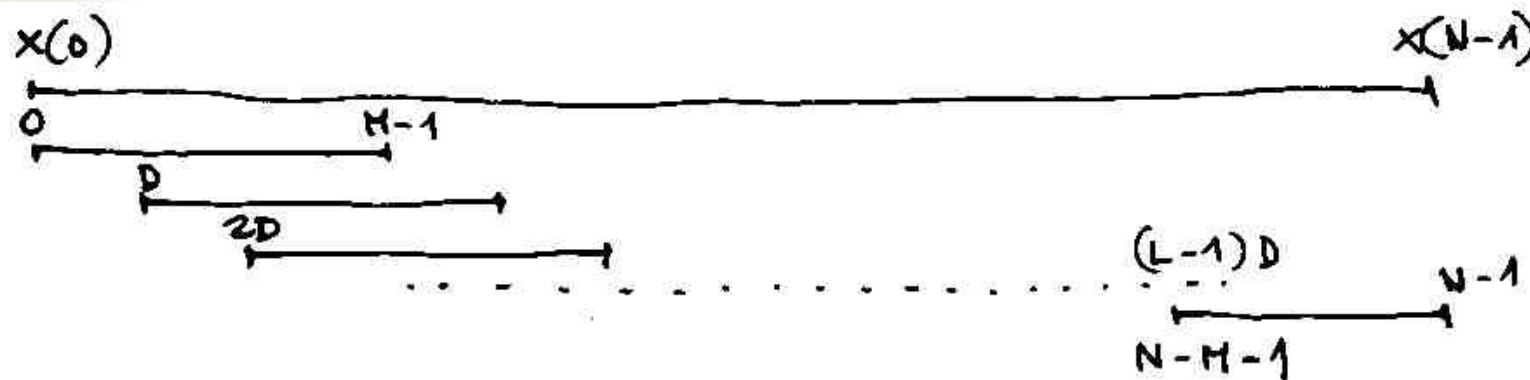
☑ překrývání segmentů

$$x_i(nT) = x(nT+iDT),$$

$i=0, 1, \dots, K-1$ (počet vzorků v segmentu);

$n=0, 1, \dots, M-1$ (počet segmentů)

pro $D=M$ se segmenty nepřekrývají (dělení odpovídá B.m.)



WELCHOVA METODA

- ✓ váhování vzorků v každém segmentu oknem před výpočtem periodogramů

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{U} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(nT) x(nT) \exp(-j2\pi f nT) \right|^2, \quad f = 0, \dots, \frac{1}{L}$$

- ✓ kde U je výkonový normalizační faktor okna daný vztahem $U = \sum w^2(nT)/M$
- ✓ Welchův odhad výkonového spektra

$$P_{xx}^W(f) = \frac{1}{L} \sum_{L_1}^{L-L_1+1} P_{xx}^{(i)}(f)$$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

nepřímá metoda – přes výpočet odhadu autokorelační funkce

- ✓ výpočet odhadu autokorelační funkce
- ✓ váhování odhadu autokorelační funkce oknem
 $w(mT) \neq 0$ pro $-M+1 \leq m \leq M-1$; $w(mT) = 0$ pro $|m| \geq M$
váhování autokorelační funkce oknem → vyhlazení periodogramu; sníží se rozptyl, omezí se frekvenční rozlišovací schopnost
- ✓ výpočet Fourierovy transformace váhovaného odhadu autokorelační funkce – váhování snižuje vliv odhadu autokorelační funkce počítaného pro malé hodnoty posunu $(N-m)T$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

Blackmanův-Tukeyův odhad

$$P_{xx}^{BT}(f) = T \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{xx}(m) w(m) \exp(2jfm)$$

$$P_{xx}^{BT}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m) w(m) \exp(2jfm)$$

ve frekvenční oblasti

$$P_{xx}^{BT}(f) = \int_{-F/2}^{F/2} P_{xx}(\alpha) W(f - \alpha) d\alpha, \text{ kde } P_{xx}(\alpha) \text{ je perioda}$$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

požadavky na okna:

- sudá funkce (symetrická kolem $m=0$) ... odhad výkonového spektra bude reálná funkce
- $W(f) \geq 0$ pro $|f| \leq F/2 \Rightarrow$ odhad výkonové spektrální funkce bude nezáporný pro $|f| \leq F/2$

NEPARAMETRICKÉ METODY

✓ **výhody:**

→ relativně jednoduché, srozumitelné, pomocí DFT (FFT) snadno spočitatelné

✓ **nevýhody:**

→ potřeba dlouhého záznamu pro dostatečnou frekvenční rozlišovací schopnost;

→ prosakování spekter díky použitým oknům (maskování slabých signálů);

→ omezení vyplývající z předpokladu, že $r_{xx}(mT)=0$ pro $|m| \geq N$

→ vnucená periodičita signálu definicí periodogramu

PARAMETRICKÉ METODY

- ☑ extrapolují hodnoty autokorelační funkce pro $m \geq N$ (k tomu je potřeba apriorní informace o analyzovaném signálu)



parametrický model vzniku signálu a z toho už cokoliv

tedy: netrábí nás okna, ani prosakování spekter \Rightarrow lepší rozlišovací schopnost i při krátkých záznamech \Rightarrow **analýza časově proměnných a přechodných dějů**

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$$

$$y(nT) = \sum_{k=1}^p a_k y(n-k)T + \sum_{k=0}^q b_k x(n-k)T$$

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ je-li posloupnost $x(nT)$, resp. $y(nT)$ realizací stacionárního náhodného procesu, platí pro jejich spektrální výkonové hustoty $\Gamma_{xx}(f)$, resp. $\Gamma_{yy}(f)$,

$$\Gamma_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot \Gamma_{xx}(f),$$

kde $|H(f)|$ je modul frekvenční charakteristiky použité lineární soustavy.

Algoritmy parametrického odhadu výkonového spektra posloupnosti $y(nT)$, $n \in \langle 0, N-1 \rangle$ obsahují:

- 1) odhad parametrů modelu přenosové soustavy;
- 2) výpočet spektrální hustoty výkonu $\Gamma_{yy}(f)$ z odhadnutých parametrů

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ podle charakteru modelu přenosové soustavy dělíme algoritmy na:
 - ARMA(p,q) – autoregressive-moving average řádu (p,q);
 - AR(p), q=0, $b_0=1$, $H(z)=1/X(z)$...
... autoregresivní
 - MA(q), $X(z) = 1 \Rightarrow H(z) = Y(z)$...
moving average

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ nejčastěji používaný AR model – proč?
 - vhodný pro vyjádření spektra s úzkými vrcholy (rezonance)
 - výpočet parametrů vede na jednoduchou soustavu lineárních rovnic

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ dekompoziční teorém (Wold 1938)
 - jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR modelem max. ∞ řádu;
 - jakýkoliv ARMA nebo AR proces lze reprezentovat MA modelem max. ∞ řádu;