SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

V.
DISKRÉTNÍ SIGNÁL
FREKVENČNÍ OBLAST

MU
IBA

ROZKLAD DISKRÉTNÍHO PERIODICKÉHO SIGNÁLU

- ☑ spojitý signál – opakování

Fourierova řada (v komplexním tvaru)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \qquad \Omega = 2\pi / T$$

kde c_n jsou komplexní Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

Ω – úhlový kmitočet základní harmonické složky (základní harmonická);

FOURIEROVA ŘADA PRO DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- nechť x(kT) je periodický signál s periodou NT; pak x(kT) lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nk}{N}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(kT) \exp\left(-\frac{j2\pi nk}{N}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

FOURIEROVA ŘADA
DŮKAZ

- změňme index sumace ve vztahu pro výpočet koeficientu c_n

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT)\exp\left[-j2\pi mn/N\right]$$

$$x(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp\left[j2\pi nk/N\right] = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT)\exp\left[-j2\pi mn/N\right]\right)\exp\left[j2\pi nk/N\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT)\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left[j2\pi n(k-m)/N\right]$$

FOURIEROVA ŘADA
DŮKAZ

potom

pro $k = l$ je $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} = N$

pro $k \neq l$ je $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} = \frac{1-\exp[j2\pi(k-l)]}{1-\exp[j2\pi(k-l)/N]} = 0$

(součet N členů geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$)

$$\boxed{x(kT)} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x(lT) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} =$$

$$= \frac{1}{N} x(kT) N = \boxed{x(kT) \qquad \text{cbd}}$$

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD

x(kT) = A.cos(2πk/N) je periodická funkce s periodou N

$$A\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{A}{2}\left[\exp\left(j\frac{2\pi k}{N}\right) + \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}\right)\right]$$

Nyní, protože

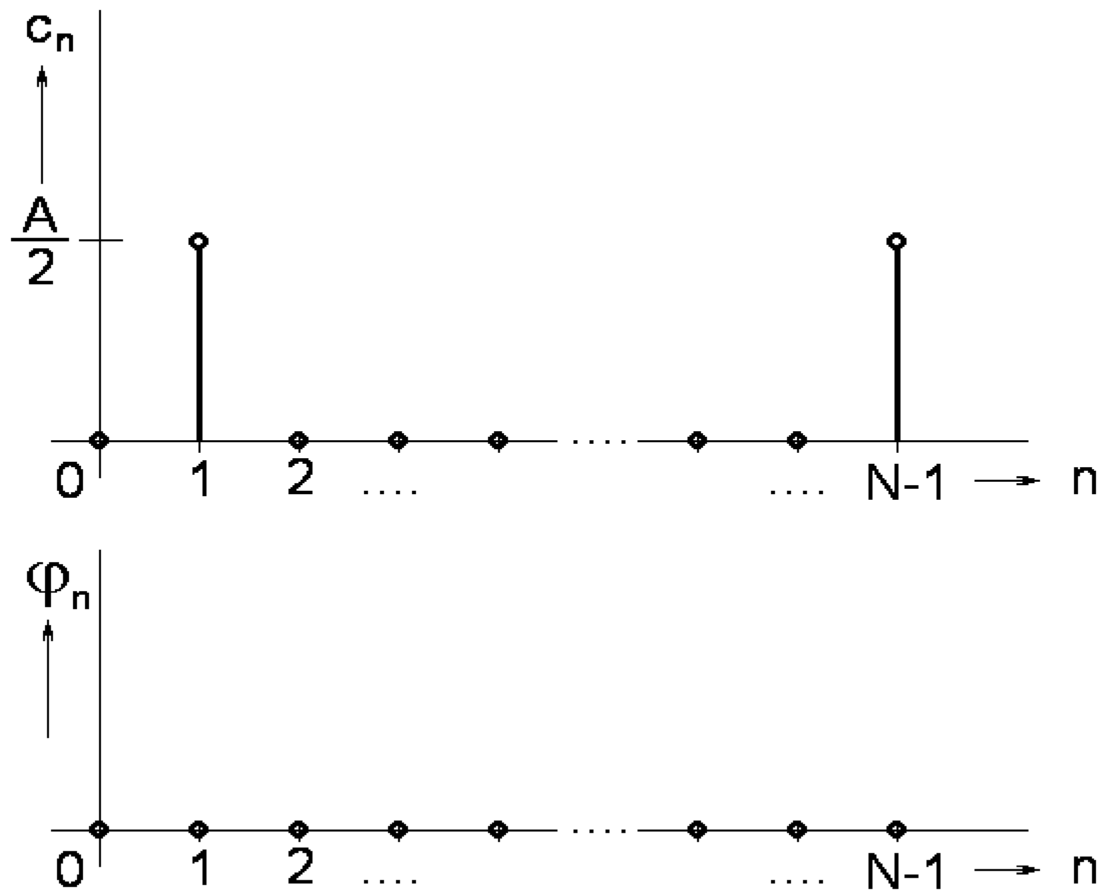
$$\exp\left(j\frac{2\pi k(N-1)}{N}\right) = \exp(j2\pi k).\exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}\right) = \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}\right)$$

proto

$$A\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{A}{2}\left[\exp\left(j\frac{2\pi k}{N}\right) + \exp\left(j\frac{2\pi k(N-1)}{N}\right)\right]$$

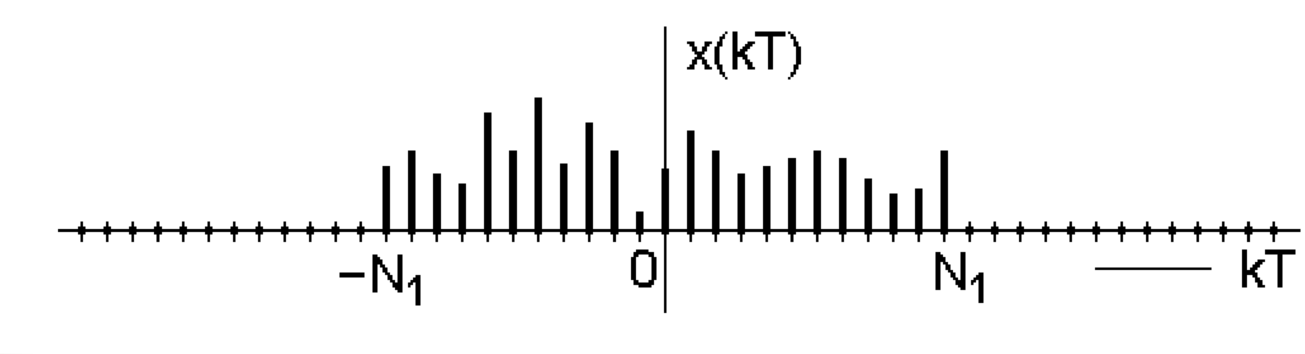
$a_1 = \frac{A}{2}$; $a_{N-1} = \frac{A}{2}$; $a_n = 0$ pro všechna jiná n

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD



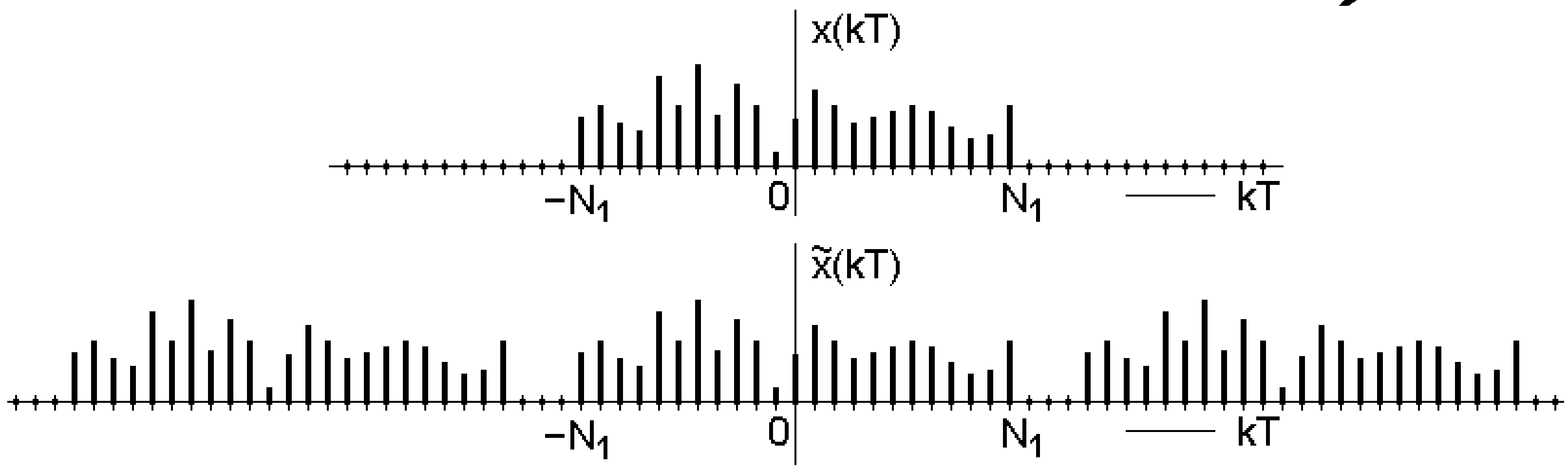
FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- nechť x(kT) je časově omezený signál s diskrétním časem s x(kT)=0 pro všechna celá $k>N_1$ a $k<-N_1$, kde N_1 je celočíselná konstanta.



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- dále, nechť pro kladné sudé celé číslo $N>2N_1$ označíme $\tilde{x}_N(kT)$ periodický signál s periodou NT, který je x(kT) pro k = -N/2, -(N/2)+1, …, -1, 0, 1, …, (N/2)-1.
- z definice $\tilde{x}_N(kT)$ máme $x(kT) = \lim_{N \to \infty} \tilde{x}_N(kT)$



FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD

- protože $\tilde{x}_N(kT)$ je periodická funkce s periodou NT, má Fourierovu řadu

$$\tilde{x}_N(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp\left(j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_N(kT)\exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD

- Z definice $\tilde{x}_N(kT)$ vyplývá, že lze poslední uvedenou rovnici přepsat do tvaru

$$c_n = \frac{1}{\dots} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dots \exp\left(-\frac{2\pi j \dots T}{N \dots}\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

apot...

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dots \exp\left[-\dots \omega \dots / NT\right]$$

kde ω je pro N→∞ spojitá (nediskrétní) veličina.

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE - DFT

- aby bylo možné počítat s frekvenčním spektrem na počítači, je třeba spektrální funkci diskretizovat;
- předpokládejme, že diskrétní signál x(nT)=0 pro

  n < 0 a n ≥ N-1, pak DFT je definována vztahem

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\frac{2\pi}{NT}nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

ZPĚTNÁ DISKRÉTNÍ FT – DFT^{-1}

$$x(nT) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega)\, e^{inTk\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega)\, e^{i2\pi kn/N}$$

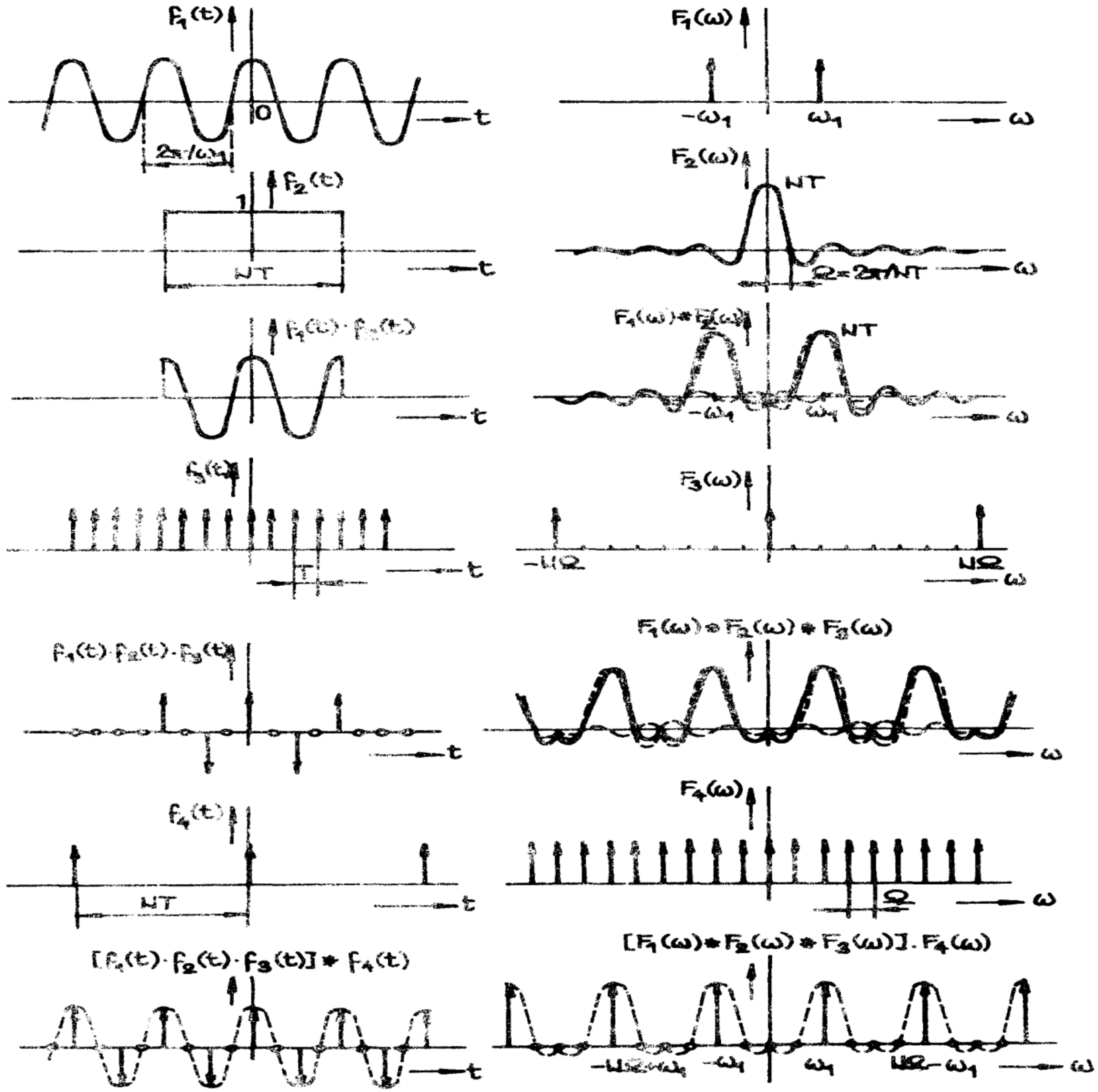
$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{i2\pi kn/N}$$

INVERZIBILITA DFT

$$DFT^{-1}\{DFT(x)\} =$$

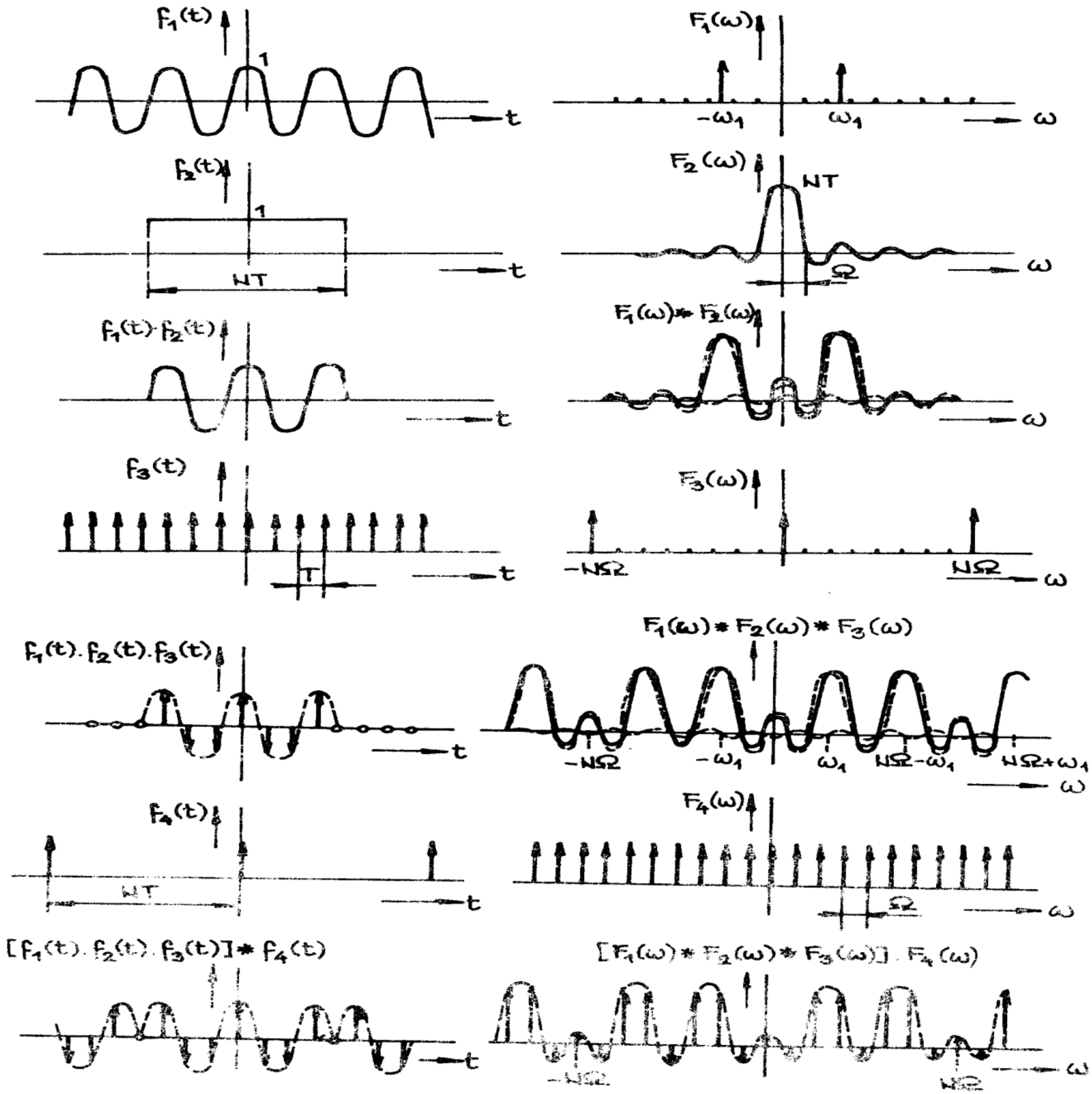
DFT

$\Omega_1 = 2\Omega$
$= 4\pi/NT$



DFT

$\Omega_1 = 2{,}5\Omega$
$= 5\pi/NT$

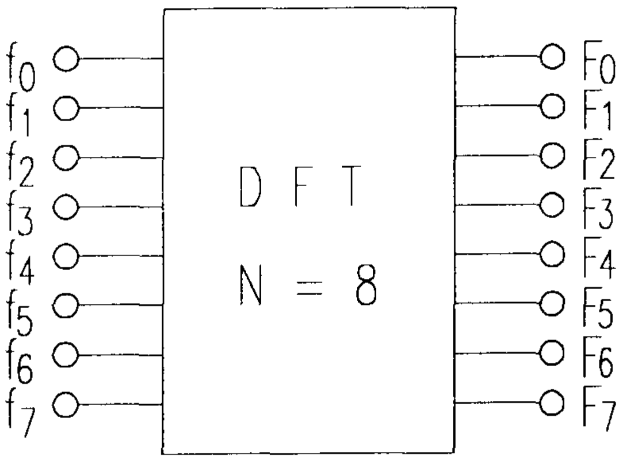


RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

$$X(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega n}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos(k\Omega n)-j\sin(k\Omega n)\right]$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos(2\pi kn/N)-j\sin(2\pi kn/N)\right]$$

- hodnoty funkcí cos a sin se používají z tabulek pro čtvrtinu periody;
- zrychlení výpočetního algoritmu se dosáhne využitím dříve vypočítaných mezivýsledků, resp. vynecháním zbytečných výpočtů – např. násobení nulou;



RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

FFT – (Cooley, Tukey – 1965, ale před nimi již i mnozí další od 1903)

- rozklad v časové oblasti;
- rozklad ve frekvenční oblasti

jednotka pracnosti P – jedno komplexní násobení a sečítání

pracnost výpočtu jednoho vzorku spektra – N.P

pracnost celé transformace – $N.N.P = N^2.P$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

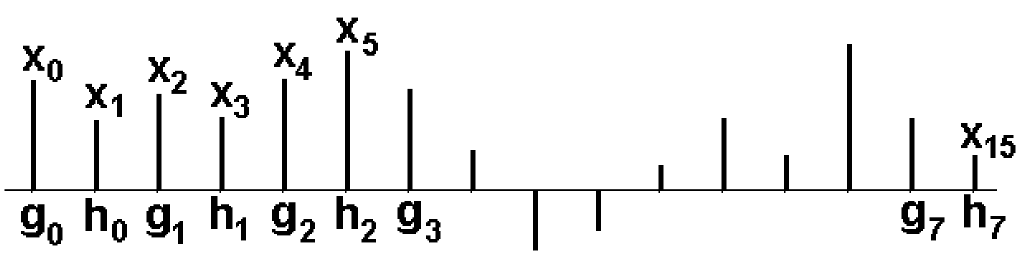
- ☑ vstupní posloupnost o sudém počtu vzorku rozdělíme na dvě dílčí posloupnosti

$\{g_i\} = \{x_{2i}\}$ - sudé prvky původní posloupnosti,

$\{h_i\} = \{x_{2i+1}\}$ - liché prvky původní posloupnosti,

i=0,1,…, N/2-1

předpokládáme, že každá z posloupností (původní i obě dílčí), mají svou DFT



FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$G(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)\, e^{-\frac{i2\pi nk}{N/2}}=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)\, e^{-\frac{i4\pi nk}{N}}$$

$$H(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)\, e^{-\frac{i2\pi nk}{N/2}}=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)\, e^{-\frac{i4\pi nk}{N}}$$

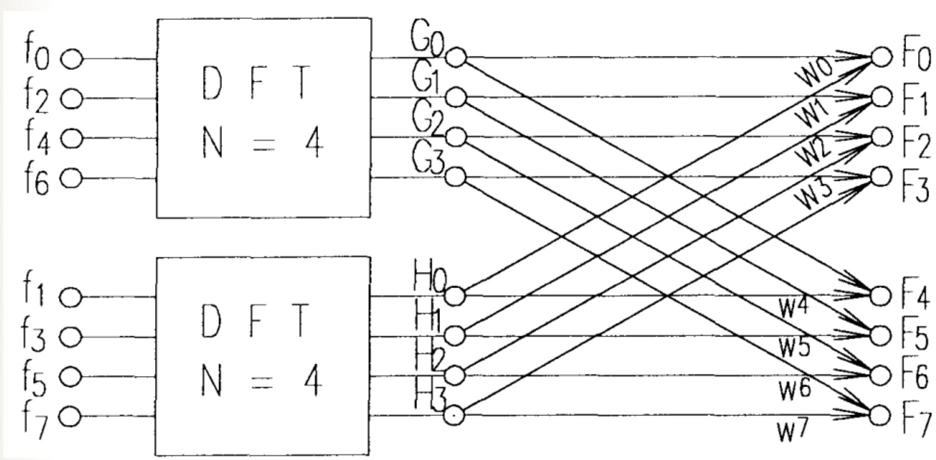
$$k\in\langle 0, N/2-1\rangle$$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} = x_0 e^{-i\frac{2\pi 0k}{N}} + x_1 e^{-i\frac{2\pi 1k}{N}} + x_2 e^{-i\frac{2\pi 2k}{N}} + \dots + x_{N-1} e^{-i\frac{2\pi (N-1)k}{N}} =$$

$$= \begin{matrix} g_0 = x_0 & g_1 = x_2 & g_2 = x_4 & \dots & g_7 = x_{14} \\ h_0 = x_1 & h_1 = x_3 & h_2 = x_5 & & h_7 = x_{15} \end{matrix} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(g_n e^{-i\frac{2\pi 2nk}{N}} + h_n e^{-i\frac{2\pi (2n+1)k}{N}} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(g_n e^{-i\frac{2\pi nk}{N/2}} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} h_n e^{-i\frac{2\pi nk}{N/2}} \right) = G(k) + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} H(k) \qquad k = k \bmod (N/2)$$



$$W^n = e^{-i\frac{2\pi n}{N}}$$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = Y(k') + e^{-j2\pi k/N} Z(k') \qquad k' = k \bmod (N/2)$$

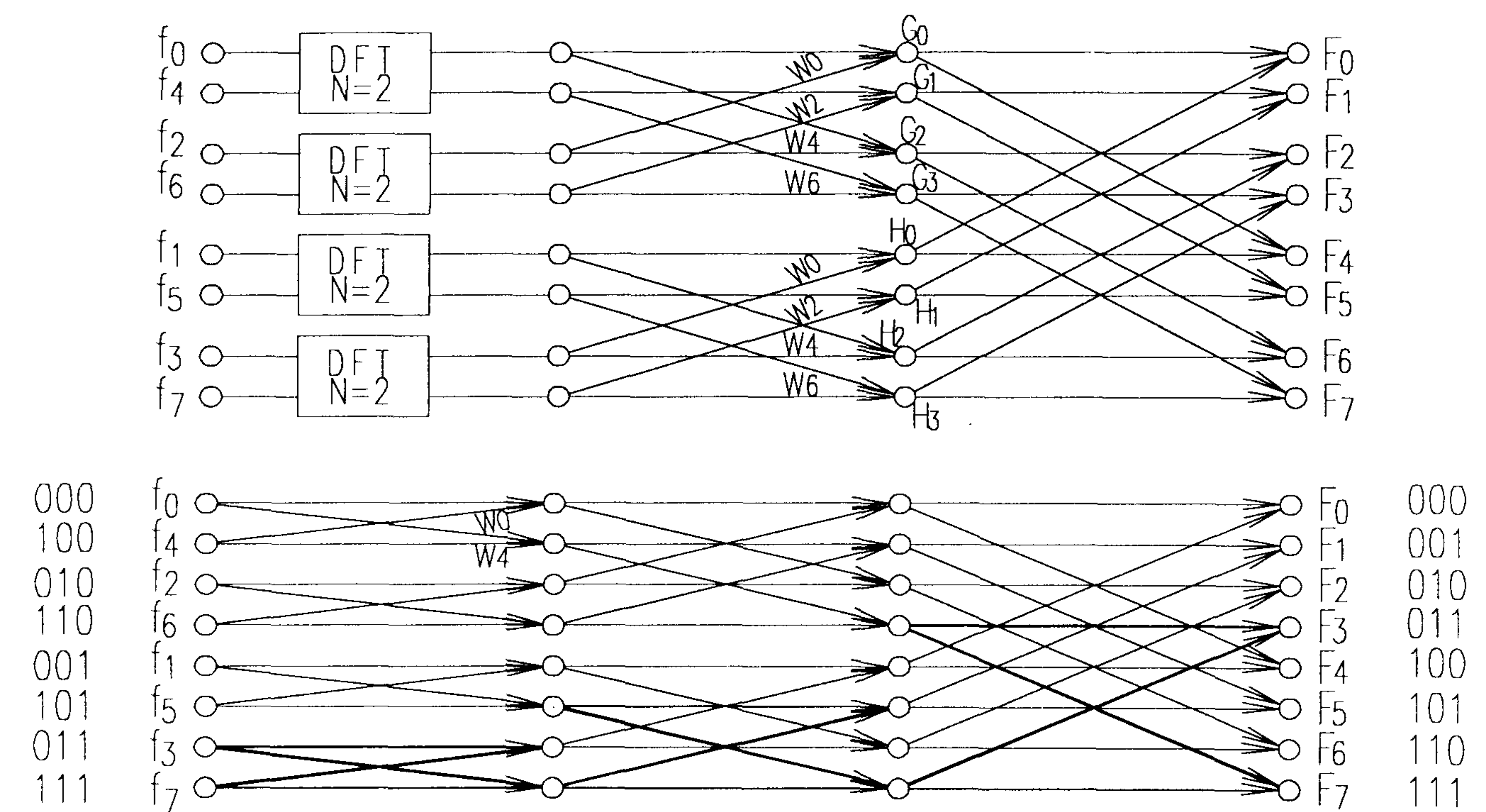
- výsledná pracnost bude součtem pracností výpočtu spekter obou posloupností

$$2.(N/2)^2.P+N.P$$

tzn. uspoření pracnosti téměř na polovinu;

- je-li N/2 opět sudé, může se v dělení pokračovat – celkově je výhodné, je-li $N = 2^m$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI



FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- každý uzel v grafu představuje jedno komplexní násobení a součet
- N uzlů ve vrstvě; celkem m vrstev $m=\log_2 N$
- celková pracnost:

$$P.N.m = P.N.\log_2 N$$

to představuje při N=8 úsporu 60%, při N=1024 již téměř 99% a při $N=131072=2^{17}$ dokonce 99,99%

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- výstup je uspořádán přirozeně; vstup je v bitově inverzním pořadí;
- opakující se struktury „motýlků“ obsahujících 4 uzly a 4 hrany