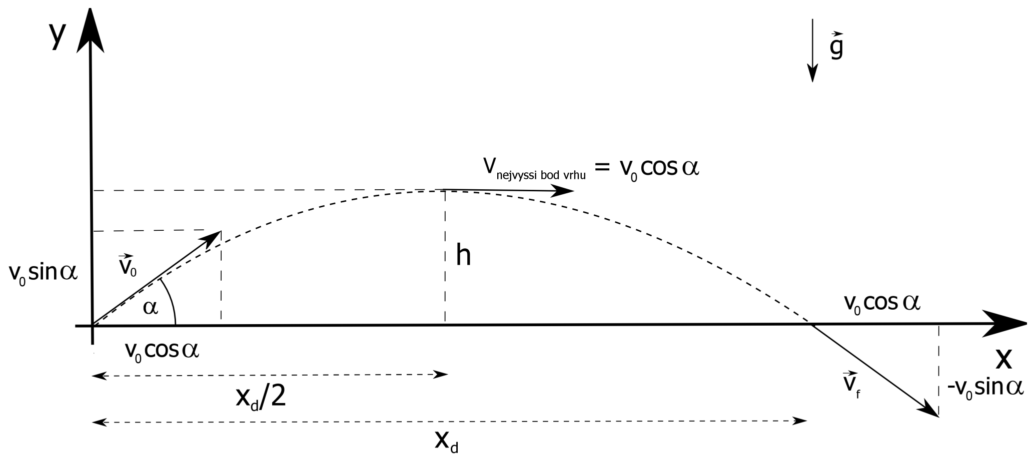
(Velmi) podrobný návod pro kinematický popis šikmého vrhu



Na šikmý vrh lze pohlížet jako na součet dvou přímočarých pohybů, a to rovnoměrného přímočarého pohybu podél přímky kolmé na směr tíhového zrychlení $\vec{g}$ (na obr. osa x) a svislého vrhu vzhůru podél přímky rovnoběžné se směrem tíhového zrychlení $\vec{g}$ (na obr. osa y). O tom, že tomu tak skutečně je, mohou přesvědčit následující simulace šikmého vrhu a vodorovného vrhu z internetu.

Při popisu tohoto pohybu vystačíme se znalostí závislosti dráhy na čase $s(t)$ a rychlosti na čase $v(t)$ pro rovnoměrný zrychlený pohyb

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad (1)$$
$$v(t) = v_0 + a \cdot t, \quad (2)$$

kde s_0 je počáteční dráha, v_0 je počáteční rychlost a a je zrychlení, které je konstantní.

Abychom šikmý vrh správně popsali, je třeba nejprve zapsat průněty počáteční rychlosti $\vec{v}_0$ a tíhového zrychlení $\vec{g}$ do souřadných os x a y námi zvolené vztažné soustavy. Předpokládejme, že počáteční rychlost svírá s osou x úhel α. Rozklad do souřadných os je následující

	x-ová souřadnice	y-ová souřadnice
$\vec{v}_0$	$v_0 \cdot \cos\alpha$	$v_0 \cdot \sin\alpha$
$\vec{g}$	0	-g

Rychlost $\vec{v}_0$ jsme rozložili pomocí goniometrických funkcí z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku výše. Tíhové zrychlení má nenulovou souřadnici pouze v ose y, neboť jsme tak si osu y tak zvolili, a zápornou hodnotu, protože vektor tíhového zrychlení směřuje v opačném směru než osa y. V předešlé tabulce značí v_0 velikost vektoru rychlosti $\vec{v}_0$ a g velikost vektoru tíhového zrychlení $\vec{g}$.

Nyní tedy šikmý vrh popíšeme, jako dva nezávislé pohyby podél os x a y. Postup bude takový, že budeme pouze dosazovat za s_0, v_0 a a do soustavy rovnic (1) a (2).

Osa x

V ose x máme po dosazení x-ových souřadnic z tabulky výše za s_0, v_0 a a následující hodnoty:

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ v_0 &= v_0 \cdot \cos\alpha, \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnic (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} s(t) &= 0 + v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2, \\ v(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot t. \end{aligned}$$

Po označení $s(t)$ a $v(t)$ jako $x(t)$ a $v_x(t)$, které značí x-ovou souřadnici dráhy a rychlosti a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t, && (3) \\ v_x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha, && (4) \end{aligned}$$

což jsou rovnice popisující dráhu a rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu.

Osa y

Nyní dosadíme y-ové souřadnice z tabulky výše za s_0, v_0 a a

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ v_0 &= v_0 \cdot \sin\alpha, \\ a &= -g. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnic (1) a (2)

$$
\begin{aligned}
s(t) &= 0 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2, \\
v(t) &= v_0 \cdot \sin\alpha + (-g) \cdot t,
\end{aligned}
$$

a po úpravě a zápisu $s(t)$ a $v(t)$ jako $y(t)$ a $v_y(t)$, tj. y-ovou souřadnici dráhy a rychlosti máme

$$
\begin{aligned}
y(t) &= v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, && (5) \\
v_y(t) &= v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t, && (6)
\end{aligned}
$$

což jsou rovnice pro svislý vrh vzhůru.

Rovnice (3), (4), (5) a (6) zcela popisují šikmý vrh. Říkají, jak se v čase mění x-ová a y-ová souřadnice polohy a rychlosti pohybujícího se tělesa.

Pokud chceme spočítat x-ovou a y-ovou souřadnici polohy a rychlosti tělesa v určitém konkréním bodě jeho pohybu, je třeba tento bod specifikovat nějakou podmínkou. Např. pokud nás zajímá vzdálenost, jakou těleso uletělo, označme ji x_d, je touto podmínkou, že těleso prostě narazí do země, neboli $y = 0$. Tuto hodnotu dosadíme do rovnice (5) a pro celou soustavu dostaneme

$$
\begin{aligned}
x_d &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_d, \\
v_{fx} &= v_0 \cdot \cos\alpha, \\
0 &= v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_d - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_d^2, \\
v_{fy} &= v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t_d.
\end{aligned}
$$

Tyto rovnice už nepopisují, jak se mění dráha a rychlost v čase, ale pouze jeden konkrétní bod trajektorie o souřadnicích $(x_d,0)$ v čase t_d, kde má těleso rychlost se souřadnicemi (v_{fx},v_{fy}).

Při řešení této soustavy nejprve vyjdeme z třetí z rovnic, kde vytkneme t_d

$$
t_d \cdot \left(v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_d \right) = 0.
$$

Tato rovnice má dvě řešení, a to

$$
\begin{aligned}
t_d &= 0, \\
t_d &= \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}.
\end{aligned}
$$

Obě řešení jsou fyzikální. První odpovídá počátku pohybu, kdy je těleso na zemi, a tedy pro něj platí $y = 0$, a druhé dopadu tělesa ve vzdálenosti x_d. Druhou z rovnic dosadíme do rovnice pro x_d v předešlé soustavě a dostaneme

$$x_d = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{g}.$$

V poslední úpravě jsme použili goniometrický vzorec $\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Po dosazení času t_d do vztahu pro y-ovou složku rychlosti dostaneme

$$v_{fy} = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = -v_0 \cdot \sin\alpha.$$

y-ová složka dopadové rychlosti je tedy záporně vzatá y-ová složka počáteční rychlosti. x-ová složka rychlosti je po celou dobu pohybu konstantní, a tedy $v_{fx} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Není těžké se přesvědčit, že velikost dopadové rychlosti $\vec{v}_f$ je stejná jako velikost počáteční rychlosti $\vec{v}_0$.

Druhým zajímavým bodem trajektorie šikmo vrženého tělesa je nejvyšší bod jeho dráhy. Podmínka pro tento bod, $v_y = 0$, popisuje bod obratu svislého vrhu vzhůru, kdy se nahoru vržené těleso na okamžik zastaví, a pak začne padat dolů (dobře je to vidět např. v první animaci šikmého vrhu). Opět, toto nastane jen v určitém čase t_h, poloze (x_h, h) a těleso má rychlost (v_{hx}, v_{hy}). Opět dosadíme do rovnic (3), (4), (5) a (6) a dostaneme

$$\begin{aligned} x_h &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_h, \\ v_{hx} &= v_0 \cdot \cos\alpha, \\ h &= v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_h^2, \\ 0 &= v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t_h. \end{aligned}$$

Pokud z poslední rovnice vyjádříme t_h

$$t_h = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g},$$

a dosadíme do rovnice předposlední, dostaneme výšku výstupu tělesa h

$$h = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g}.$$

y-ová složka rychlosti v tomto bodě je nulová (podmínka) a x-ová je stejně jako ve všech bodech pohybu $v_{hx} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Velikost okamžité rychlosti tělesa od výstřelu až po dopad dosahuje v tomto bodě minima.