

# **I. Kmity**

## **1. Harmonický oscilátor – jeden stupeň volnosti**

- 1.1. Kinematika volného, harmonického netlumeného kmitu**
- 1.2. Dynamika**
- 1.3. Energie harmonického oscilátoru**
- 1.4. Základní typy oscilátorů**
- 1.5. Další typy oscilátorů**
- 1.6. Podélné a příčné kmity**
- 1.7. Princip superpozice**

## **2. Volné kmity – dva stupně volnosti**

- 2.1. Obecné řešení**
- 2.2. Sférické kyvadlo**
- 2.3. Podélné kmity dvou vázaných těles.**
- 2.4. Příčné kmity dvou vázaných těles**
- 2.5. Skládání dvou rovnoběžných kmitů**
- 2.6. Skládání kmitů na sebe kolmých.**

## **3. Volné kmity – mnoho stupňů volnosti.**

- 3.1. Příčné módy spojitě struny.**
- 3.2. Stojaté vlny**
- 3.3. Disperzní vztah.**
- 3.4. Kmity systému s N stupni volnosti.**

## **4. Kmity v 3d m prostoru**

- 4.1. Stojaté vlny v dutině**
- 4.2. Počet stojatých vln**

## **5. Reálný oscilátor**

- 5.1. Tlumený oscilátor, vynucené kmity**
- 5.2. Energie slabě tlumeného oscilátoru**
- 5.3. Slabě tlumený oscilátor s vnější silou**
- 5.4 Výkon tlumeného oscilátoru**
- 5.5. Rezonance**
- 5.6. Tlumený systém se dvěma stupni volnosti.**
- 5.7. Anharmonické kmity**
- 5.8. Počáteční podmínky, chaos**

## I. Kmity

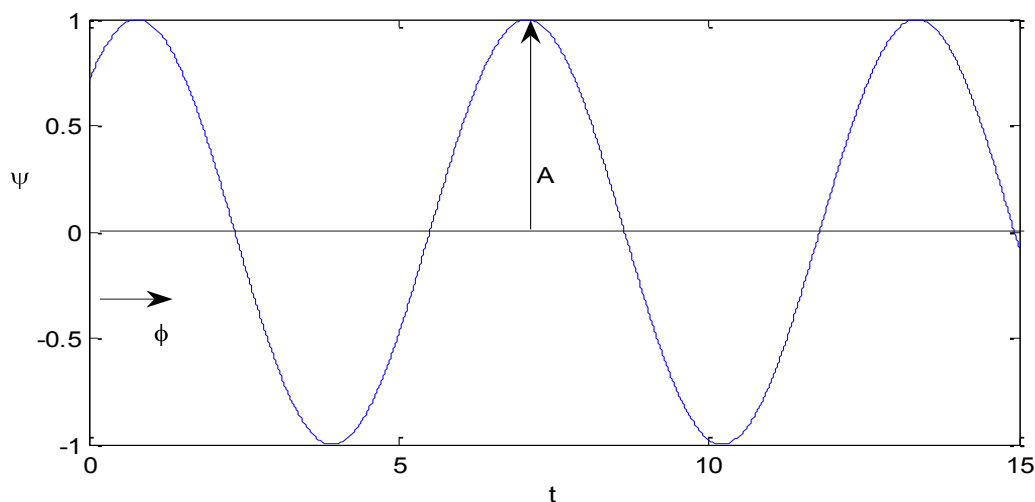
Do této kapitoly o kmitech řadíme obvykle periodický pohyb bodu nebo tělesa, případně soustavy bodů a těles, kolem rovnovážné polohy. Sledujeme především časovou závislost výchylky z této rovnovážné polohy. Kmity jsou tedy na rozdíl od vln prostorově ohraničené. Aplikace – kyvadlo, kmitající těleso na pružině, struna, hudební nástroje, hodiny, srdce atd. Charakteristika kmitů – harmonické, tlumené, volné, vynucené, složené, nelineární atd.

### 1. Harmonický oscilátor – jeden stupeň volnosti

#### 1.1. Kinematika volného, harmonického netlumeného kmitu

Volné kmity, respektive vlastní kmity – po uvedení soustavy do kmitavého pohybu nepůsobí na ni žádné vnější síly, samozřejmě mimo ty, které způsobují kmitavý pohyb (gravitace, tuhost pružiny...). Uvažujeme jeden stupeň volnosti, stačí tedy k popisu jedna souřadnice. Pro harmonický, netlumený (zanedbáme tření) použijeme zápis

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (1.1.1)$$



Obr. 1.1.1. Harmonický kmit.

Kde  $\psi$  je výchylka (zpravidla mechanická),  $t$  je čas,  $A$  je amplituda (maximální výchylka),  $\omega$  je úhlová frekvence a  $\phi$  je fázové posunutí – viz obr. 1.1.1. Dále platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega = 2\pi\nu \quad \nu = \frac{1}{T} \quad (1.1.2)$$

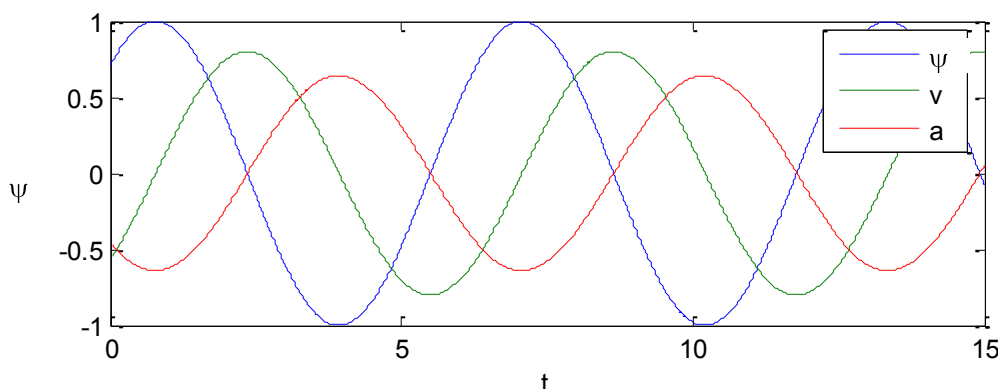
Kde  $T$  je časová perioda a  $\nu$  je frekvence. Snadno dostaneme rychlost  $v$  a zrychlení  $a$ , viz obr.

$$v = \frac{d\psi}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.1.3)$$

$$a = \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \psi \quad (1.1.4)$$

Pro úplný popis potřebujeme znát počáteční podmínky, např. pro  $t=0$  je  $\psi_0, v_0$  a platí

$$\psi_0 = A \cos \varphi \quad v_0 = -\omega A \sin \varphi \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0}{\omega \psi_0}, \quad A^2 = \psi_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \quad (1.1.5)$$

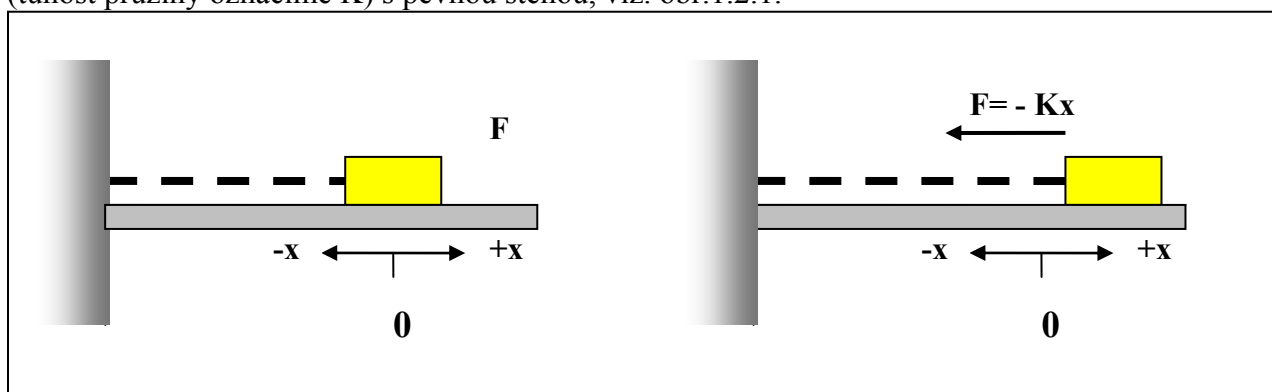


Obr. 1.1.2. Výchylka, její rychlost a zrychlení harmonického kmitu.

## 1.2. Dynamika

Využijeme druhý Newtonův zákon, ale musíme znát konkrétní příčinu, respektive sílu tzv. vratnou sílu, která kmitavý pohyb způsobí.

Předpokládáme těleso o hmotnosti  $m$  na vodorovné podložce (bez tření) spojené pružinou (tuhost pružiny označíme  $K$ ) s pevnou stěnou, viz. obr.1.2.1.



Obr. 1.2.1. Kmitající těleso na vodorovné podložce bez tření.

Pro malé výchylky  $\psi$  ve směru  $x$  ( $\psi = x$ ) platí Hookův zákon

$$F = -\zeta x \quad (1.2.1)$$

Znaménko  $-$  vystihuje skutečnost, že síla vrací těleso do rovnovážné polohy, působí tedy v opačném směru než měříme výchylku. Pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{x} = -\zeta x \quad (1.2.2)$$

Řešení předpokládáme ve tvaru harmonického pohybu (1.1.1), po dosazení dostaneme důležitý vztah pro vlastní frekvenci

$$\omega = \frac{K}{m} \quad (1.2.3)$$

Vlastní frekvence je určena jen volbou hmotnosti a tuhosti pružiny. Pohybovou rovnici můžeme napsat ve tvaru

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.2.4)$$

### **1.3. Energie harmonického oscilátoru**

Pro potenciální energii  $E_p$  v případě síly (1.2.1) dostaneme

$$E_p = -\int F d\psi = \int K\psi d\psi = \frac{1}{2}K\psi^2 \quad (1.3.1)$$

a po dosazení z (1.1.1)

$$E_p = \frac{1}{2}KA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (1.3.2)$$

Pro kinetickou energii  $E_k$  platí

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (1.3.3)$$

Vztahy (1.3.2, 1.3.3) přepíšeme do tvaru

$$E_p = E_{p \max} \cos^2(\omega t + \varphi), \quad E_k = E_{k \max} \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (1.3.4)$$

a pro vlastní frekvenci (1.2.1)

$$E_{p \max} = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad E_{k \max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (1.3.5)$$

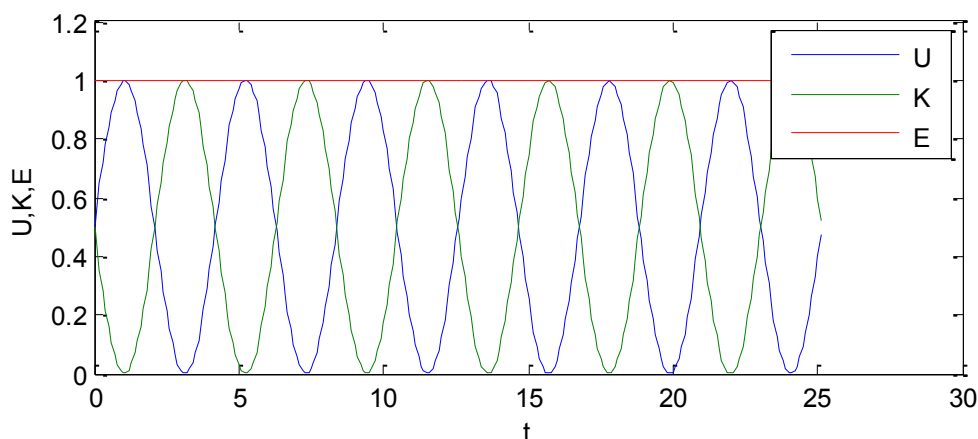
Tedy maximální hodnoty energií jsou stejné

$$E_{p \max} = E_{k \max} \quad (1.3.6)$$

Pak celková energie  $E$

$$E = E_k + E_p = E_{k \max} \sin^2(\omega t + \varphi) + E_{p \max} \cos^2(\omega t + \varphi) = E_{k \max} = \text{konst} \quad (1.3.7)$$

Podle očekávání jsme potvrdili, že celková energie oscilátoru je konstantní. Z grafu 1.3.1. je zřejmé jak se v čase přelévá jedna forma energie do druhé.

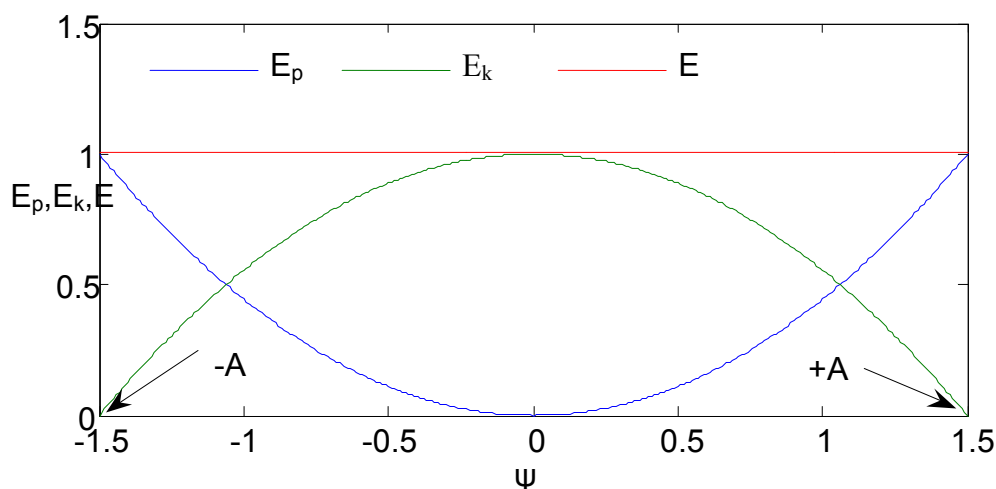


Obr. 1.3.1. Energie (v rel. jednotkách) harmonického oscilátoru v závislosti na čase.

Užitečné je rovněž sledovat závislost energií na výchylce – viz obr. 1.3.2. Pro potenciální energii máme (1.3.1) a pro kinetickou energii

$$E_k = E - E_p = \frac{1}{2}K(A^2 - \psi^2) \quad (1.3.8)$$

A podobně pro potenciální energii.



Obr. 1.3.2. Závislost energií harmonického oscilátoru na výchylce.

## 1.4. Základní typy oscilátorů

### Těleso na pružině

Těleso o hmotnosti  $m$  je zavěšeno na pružině s tuhostí  $K$ , viz obr.1. 4.1. Původně nezatížená pružina se protáhne o  $l$ . V rovnováze je celková síla, která se skládá z tíhové  $F_g$  a pružné  $F_k$ , nulová

$$F_g + F_k = mg - Kl = 0 \quad (1.4.1)$$

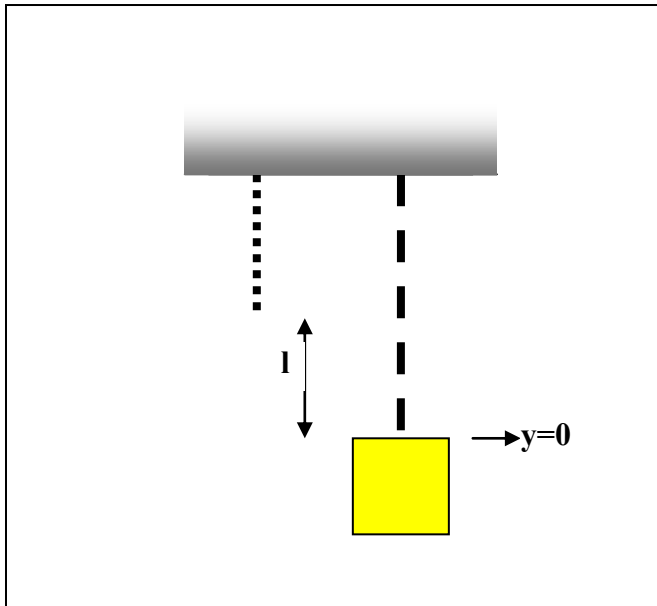
Odtud můžeme určit protažení pružiny, které určí rovněž rovnovážnou polohu tělesa ( $y=0$ )

$$l = \frac{mg}{K} \quad (1.4.2)$$

Pak při výchylce tělesa z rovnovážné polohy o  $y$  působí na něj síla

$$F = F_k + mg = -\zeta\left(y + \frac{mg}{K}\right) + mg = -\zeta y \quad (1.4.3)$$

Tedy výsledná vratná síla má stejný tvar jako v předcházejícím případě a rovněž stejné je řešení.



Obr. 1.4.1 Těleso na pružině

### Matematické kyvadlo

Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod (hmotnost  $m$ ) zavěšený na nehmotném závěsu o délce  $l$  - viz obr. 1.4.2. Hmotný bod se pohybuje po kruhové dráze  $l\psi$ , s rychlostí  $l\dot{\psi}$  a zrychlením  $l\ddot{\psi}$ . Vratná síla  $F$  je výslednicí gravitační síly a síly vlákna  $F_v$

$$F = -mg \sin(\psi) \quad (1.4.1)$$

Po dosazení do 2. Newtonova zákona

$$ml\ddot{\psi} = -mg \sin(\psi) \quad (1.4.2)$$

Pro řešení této pohybové rovnice je velkou nepříjemností funkce  $\sin$ , pro kterou platí

$$\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots \quad (1.4.3)$$

Pro malé výchylky, asi do  $5^\circ$  platí

$$\sin(\psi) \approx \psi \quad (1.4.4)$$

A tedy pohybová rovnice dostane jednoduchý tvar

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l}\psi \quad (1.4.5)$$

Předpokládáme-li harmonické řešení

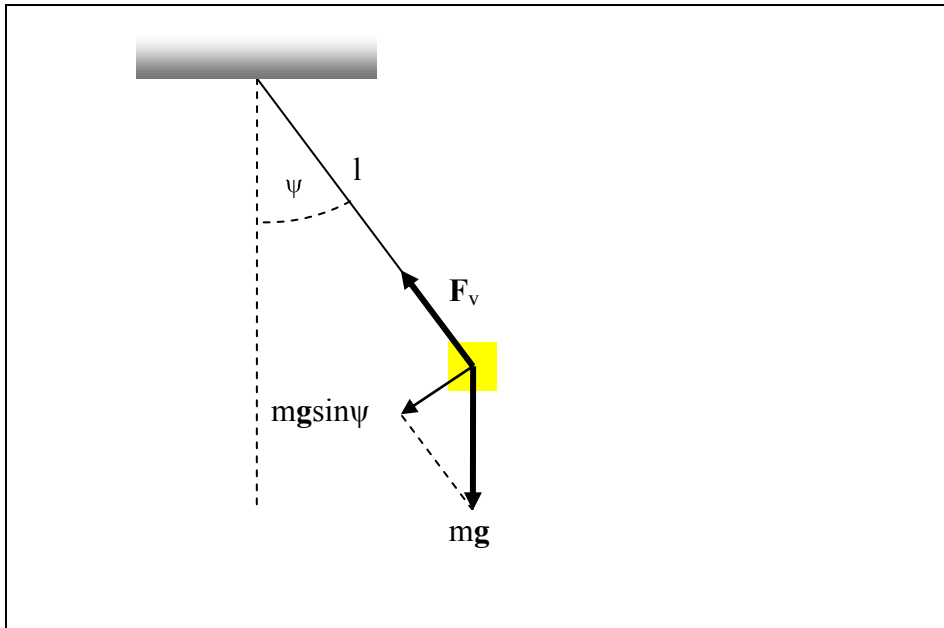
$$\psi = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.4.6)$$

Dostaneme pro vlastní frekvenci matematického kyvadla

$$\omega = \frac{g}{l} \quad (1.4.7)$$

Nebo pro dobu kmitu

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \quad (1.4.8)$$



Obr.1.4.2. Matematické kyvadlo

### Fyzikální kyvadlo

Fyzikálním kyvadlem se rozumí zavěšené reálné těleso libovolného tvaru. Závěs je nad těžištěm. Vzdálenost závěsu od těžiště T označíme  $L$  – viz obr. 1.4.3. Vratný moment síly  $M$  je

$$M = -mgL \sin(\psi) \quad (1.4.9)$$

A ze stejných důvodů jako u matematického kyvadla se omezí na výchylky do  $5^\circ$ , pak platí

$$M = -mgL \psi \quad (1.4.10)$$

Pohybová rovnice má tvar

$$-mgL \psi = I\ddot{\psi} \quad (1.4.11)$$

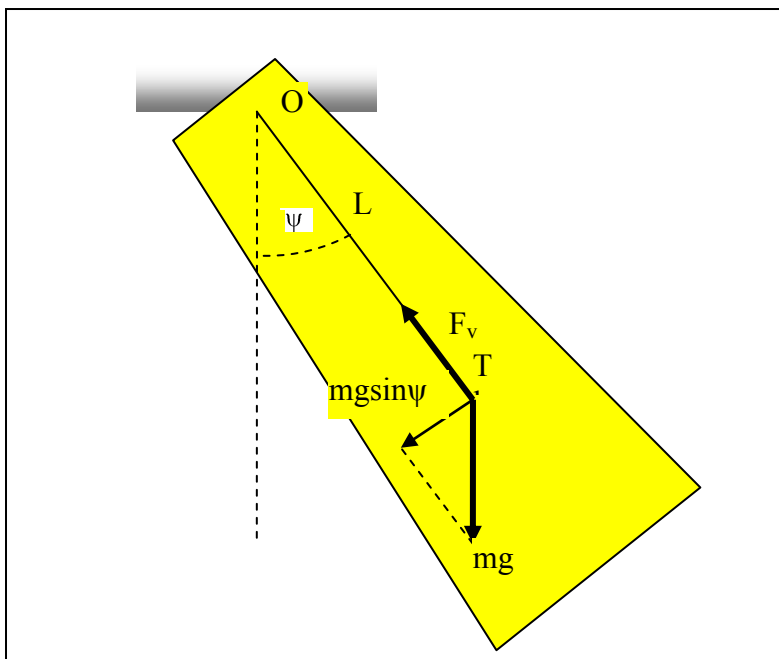
Kde  $I$  je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose, která prochází závěsem. Pak při předpokládaném řešení ve tvaru (1.4.6) dostaneme stejným postupem pro vlastní frekvenci

$$\omega = \frac{mgL}{I} \quad (1.4.12)$$

Připomeneme, že pro matematické kyvadlo platí

$$I = mL^2 \quad (1.4.13)$$

A po dosazení do dostaneme vztah (1.4.7).



Obr. 1.4.3. Fyzikální kyvadlo

### Torzní kmity

Zejména pro aplikace je zajímavá varianta oscilátoru – viz obr. 1.4.4. , kdy vratným působením je kroucení (torze), drátu. Pro malé výchylky má vratný moment tvar

$$M = - \kappa \psi \quad (1.4.14)$$

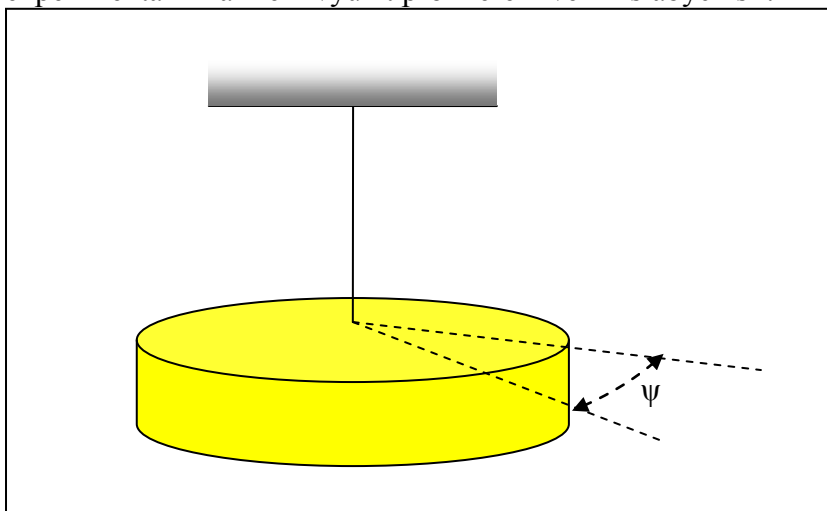
Kde  $\kappa$  je torzní tuhost. Pak pohybová rovnice má tvar

$$- \kappa \psi = I \ddot{\psi} \quad (1.4.15)$$

Kde  $I$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení. Předpokládáme harmonické řešení ve tvaru (1.4.6) a obvyklým postupem dostaneme vztah pro vlastní frekvenci torzních kmitů

$$\omega = \frac{\kappa}{I} \quad (1.4.16)$$

Vzhledem k možnosti volby velmi tenkého drátu s malou torzní tuhostí lze toto experimentální zařízení využít pro měření velmi slabých sil.



Obr. 1.4.4. Torzní kyvadlo



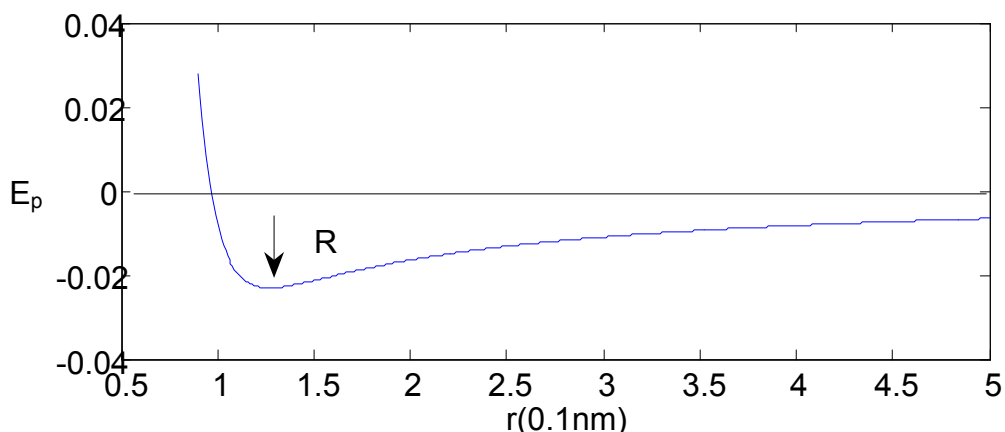
## 1.5. Další typy oscilátorů

Existuje celá řada kmitajících soustav, příklady se najdou v akustice, elektřině, atomové a molekulární fyzice atd. Postup řešení je velmi často podobný uvedeným jednoduchým příkladům.

### Kmity dvouatomové molekuly

Jako zástupce oscilátoru z mikrosvěta uvedeme kmity molekuly typu AB s iontovou vazbou, např. HCl.

Průběh potenciální energie je na obr. 1.5.1.



Obr. 1.5.1. Průběh potenciální energie ( $E_p$  v rel. jednotkách) molekuly HCl na vzdálenosti atomů.

Pak kolem rovnovážné polohy má potenciální energie tvar

$$E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\beta}{r^9} \quad (1.5.1)$$

První člen je výsledkem přitahování dvou různě nabitých iontů s nábojem  $e$ , druhý člen vyjadřuje odpuzování obou iontů při překryvu jejich elektronových obalů (skutečný tvar je složitější, ale tato aproximace je vyhovující). Konstantu  $\beta$  vypočítáme z podmínky rovnovážné polohy a pro  $r=R$

$$\frac{dE_p}{dr} = 0 \quad (1.5.2)$$

$$\beta = \frac{e^2 R^8}{36\pi\epsilon_0} \quad (1.5.3)$$

Tuhost vazby  $K$  určíme z druhé derivace  $U$  a ze vztahu pro tuhost (1.3.1)

$$E_p = \frac{1}{2}Kr^2 \rightarrow \frac{d^2E_p}{dr^2} = K \rightarrow \zeta = \frac{2e^2}{\pi\epsilon_0 R^3} \quad (1.5.4)$$

Tuhost závisí pouze na rovnovážné poloze  $R$  (pro HCl  $R=0.13\text{nm}$ ), po dosazení standardních konstant dostaneme  $K = 340 \text{ Nm}^{-1}$  (což odpovídá pružině, která se protáhne o 12mm se závažím 1kg). Vzhledem k tomu, že Cl má asi 35 krát větší hmotnost proti H, můžeme si

molekulu představit jako kmitající atom H kolem pevného centra Cl ( $m_H = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ).  
Vlastní frekvence oscilátoru

$$\omega = \sqrt{K/m_H} \quad (1.5.5)$$

Je po dosazení  $\omega = 7.1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , respektive  $\nu = 1.1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , ve skutečnosti lze naměřit z optických vlastností  $\nu = 3.9 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$  což je vzhledem k primitivnosti našeho modelu velmi dobrý souhlas.

### Kmity netlumeného elektrického obvodu

Pro jednoduchý obvod složený z kondenzátoru s kapacitou C a cívky s indukčností L platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$U_L + U_C = 0 \quad (1.5.6)$$

Kde  $U_L$  je napětí na cívce a  $U_C$  na kondenzátoru. Platí

$$U_L = -L \frac{dj}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2} \quad U_C = \frac{q}{C} \quad (1.5.7)$$

Kde j je hustota proudu a q náboj. Po dosazení do (1.5.6)

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (1.5.8)$$

a tedy obvod bude kmitat s vlastní frekvencí  $\omega$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.5.9)$$

### Kmity plazmatu

Plazmou se rozumí soubor nabitých částic, např. silně ionizovaný plyn, kde předpokládáme stejný počet + a - nábojů. Obvykle se jedná o soubor elektronů a kladných iontů. Ve shodě s obr. 1.5.2. si představíme neutrální plyn v nádobě. Po osvětlení uv zářením (např. pomocí válcové čočky) vznikne ionizovaná, poměrně ohraničená vrstva plazmatu. Po přiložení krátkého napěťového pulzu se elektrony posunou o malou výchylku z k anodě, kladné ionty, protože jsou značně hmotnější, zůstanou prakticky na místě. Tím vznikne nekompensovaný plošný náboj na jednotku plochy

$$\rho = ne z \quad (1.5.10)$$

Kde n je hustota náboje. Intenzita elektrického pole E (používáme, bohužel, ale ve shodě se zvyklostí stejné písmeno jako pro celkovou energii) podle Gaussovy věty bude

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.5.11)$$

a vratná síla

$$F = -eE \quad (1.5.12)$$

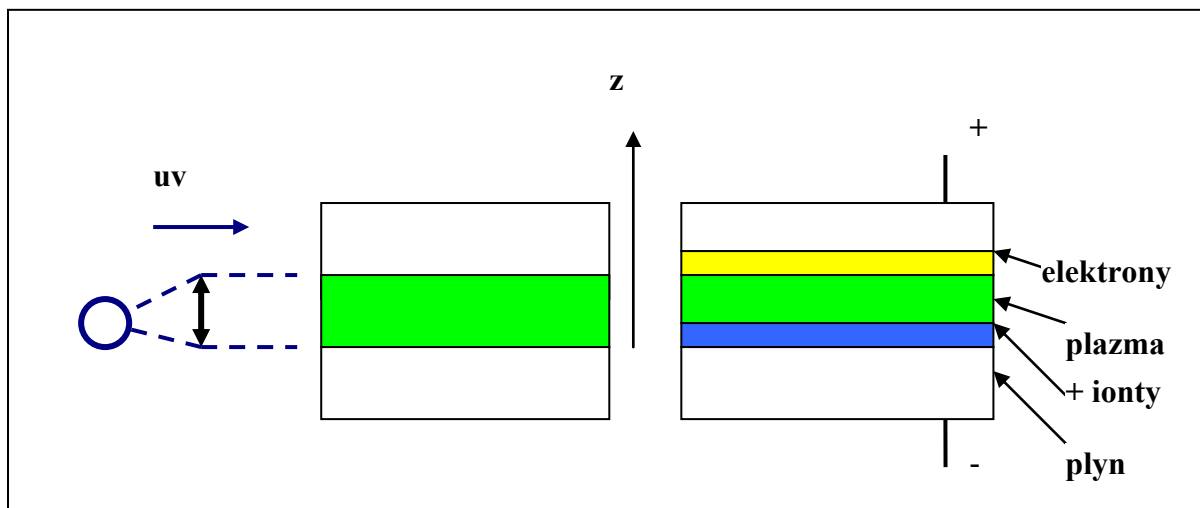
Pak pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{z} + \frac{ne^2}{\epsilon_0}z = 0 \quad (1.5.13)$$

kde m je hmotnost elektronu. Řešením jsou netlumené kmity plazmatu s vlastní frekvencí

$$\omega = \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \quad (1.5.14)$$

Po dosazení standardních hodnot konstant a pro Cu, kde  $n = 8.4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  získáme  $\omega \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ .



Obr. 1.5.2. Nádoba s plynem,  $uv$  ionizace a vznik plazmatu

### 1.6. Podélné a příčné kmity

Uvažujme těleso mezi dvěma stejnými pružinami (zanedbáváme tíži) – viz obr.1.6.1., které mají tuhost  $K$  a délku  $a$ . Pak vratná síla ve směru  $x$ , respektive ve směru pružiny, vyvolá podélné kmity a je rovna

$$F_x = -\zeta(a + x) + K(a - x) = -\cdot Kx \quad (1.6.1)$$

Síla tedy nezáleží na délce  $a$ , postup řešení je standardní a pro vlastní frekvenci podélných kmitů dostaneme

$$\omega_{\text{pod}} = \frac{2K}{m} \quad (1.6.2)$$

Rozkmitáme-li soustavu ve směru  $z$ , tzv. příčné kmity, je ve shodě s obr. 1.6.1. vratná síla

$$F_z = -\cdot Kl \sin(\varphi_z) \quad (1.6.3)$$

Kde

$$\sin(\varphi_z) = \frac{z}{l} \rightarrow \tau_z = -\cdot Kz \quad (1.6.4)$$

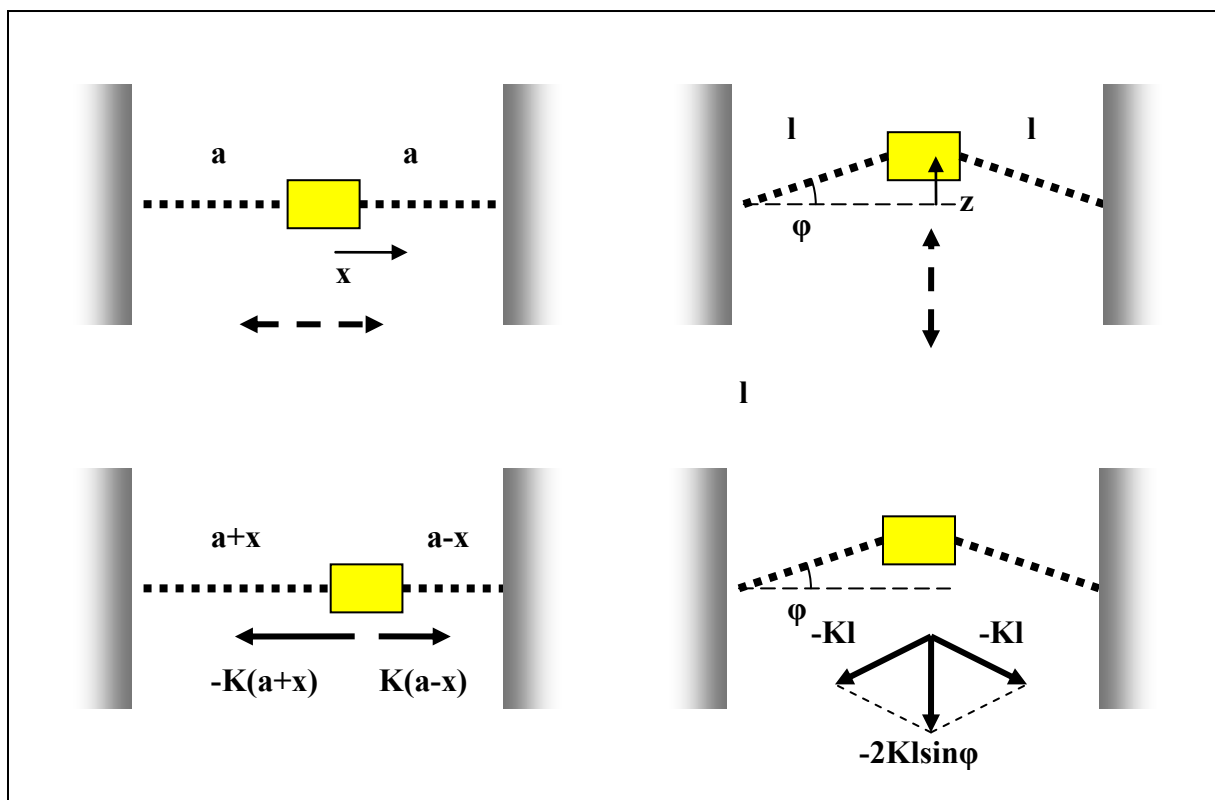
Pohybová rovnice

$$m\ddot{z} = -\cdot Kz \quad (1.6.5)$$

Dává vlastní frekvenci příčných kmitů

$$\omega_{\text{př}} = \frac{2K}{m} \quad (1.6.6)$$

V tomto případě jsou frekvence podélných a příčných kmitů stejné.



Obr. 1.6.1. Podélné a příčné kmity

V případě, že pružina má v nenataženém stavu délku  $a_0$  pak pro podélné kmity nahradíme výraz  $a$  výrazem  $(a - a_0)$  Platí

$$F_x = -K(a - a_0 + x) + K(a - a_0 - x) = -Kx \quad (1.6.7)$$

Řešení je stejné jako v předešlém případě a opět platí

$$\omega_{\text{pod}} = \frac{2K}{m} \quad (1.6.8)$$

V případě příčných kmitů  $l$  nahradíme  $(l - a_0)$

$$F_z = -K(l - a_0) \sin(\varphi) \approx -K(l - a_0) \frac{z}{l} = 2Kz \left(1 - \frac{a_0}{l}\right) \approx 2Kz \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (1.6.9)$$

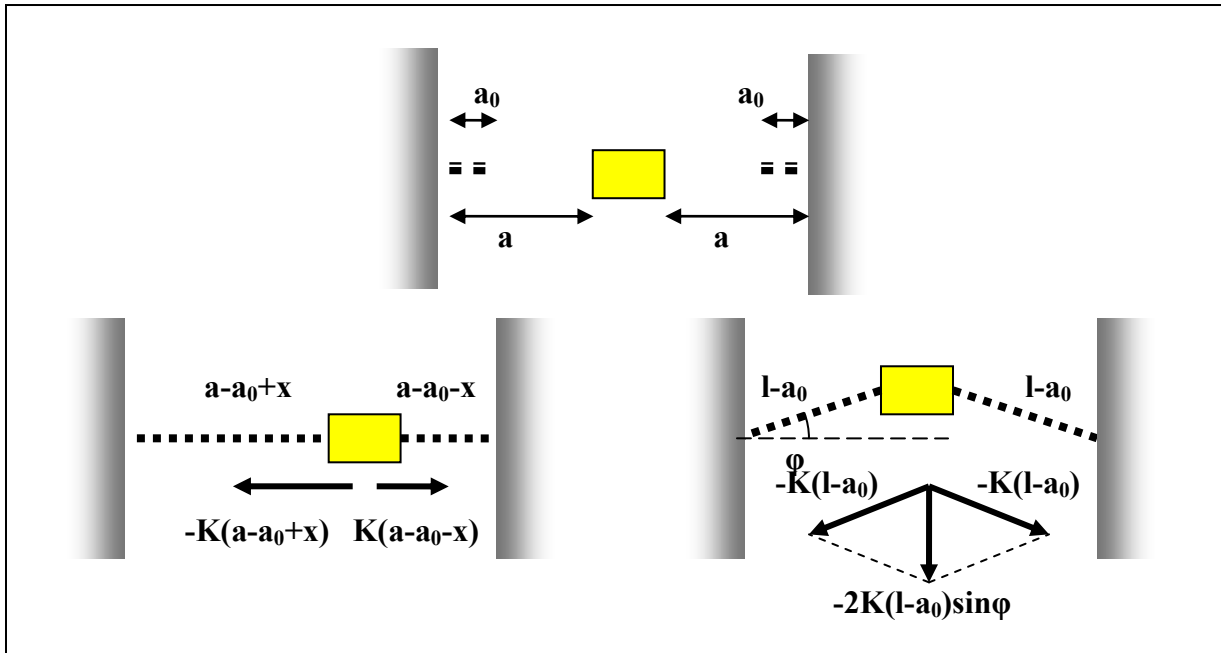
Kde využíváme možnosti  $l \approx a$ . Pak pro frekvenci příčných kmitů dostaneme

$$\omega_{\text{př}} = \frac{2K}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (1.6.10)$$

Pro poměr obou frekvencí

$$\frac{\omega_{\text{př}}}{\omega_{\text{pod}}} = \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \rightarrow \omega_{\text{př}} \leq \omega_{\text{pod}} \quad (1.6.11)$$

Příčná frekvence je menší než podélná v závislosti na délce pružiny v klidu.



Obr. 1.6.2. Podélné a příčné kmity (konečná délka nenatažené pružiny).

### 1.7. Princip superpozice

Dosud všechny pohybové rovnice kmitajících soustav, s výjimkou (1.4.2), byly lineární homogenní diferenciální rovnice. Lineární ve smyslu, že obsahují pouze první mocniny výchylky a jejich derivací ( $\psi, \partial \psi / \partial t, \partial^2 \psi / \partial t^2 \dots$ ) a homogenní ve smyslu, že neobsahují člen nezávislý na  $\psi$ . Takové rovnice mají důležitou vlastnost, že jejím řešením je i funkce  $\psi$ , která je součtem jejich řešení  $\psi_1$  a  $\psi_2$ , respektive jejich lineární kombinací. Platí

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) \quad (1.7.1)$$

Tímto rozumíme princip superpozice. Tento princip budeme uplatňovat v celé následující přednášce. V případě nelineárních rovnic tento princip neplatí. Důkazy jsou snadné.

## 2. Volné kmity – dva stupně volnosti

### 2.1. Obecné řešení

Počet nezávislých souřadnic  $n$ , které potřebujeme pro popis kmitající soustavy určuje počet stupňů volnosti.

Příklady pro dva stupně volnosti jsou na obr. 2.1.1. Obecné řešení bude v tomto případě superpozice dvou nezávislých ( $n=2$ ) harmonických pohybů. Tyto nejjednodušší harmonické pohyby nazýváme módy. Základní vlastnosti takového módu je, že obě kmitající části mají stejnou frekvenci a fázi.

Vyjděme z posledního příkladu soustavy na obr.2.1.1, kde máme tělesa  $a$ ,  $b$  spojené spirálou. Pak pro

$$1. \text{ mód: } \psi_{a1}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \rho_1) \quad \psi_{o1}(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \rho_1) = \frac{B_1}{A_1} \psi_{a1}(t) \quad (2.1.1)$$

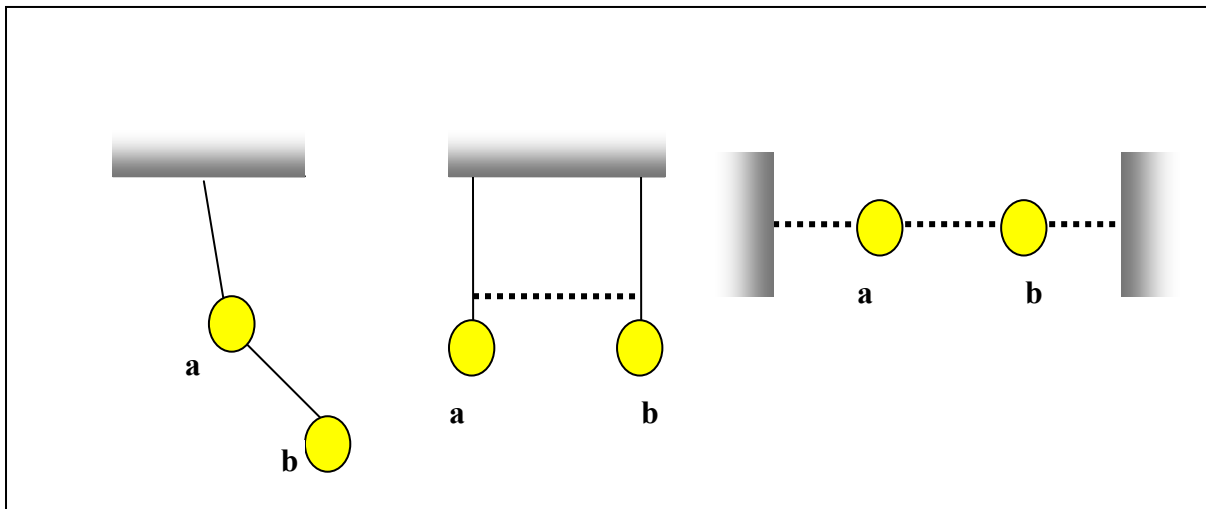
$$2. \text{ mód: } \psi_{a2}(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \rho_2) \quad \psi_{o2}(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \rho_2) = \frac{B_2}{A_2} \psi_{a2}(t) \quad (2.1.2)$$

1. mód si můžeme představit jako synchronní pohyb obou těles amplitudami ve stejném směru a 2. mód jako obdobný, ale s amplitudami s opačnými znaménky (proti sobě).

Obecné řešení pro jednotlivá tělesa má tvar

$$\psi_a(t) = \psi_{a1}(t) + \psi_{a2}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \rho_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \rho_2) \quad (2.1.3)$$

$$\psi_o(t) = \psi_{o1}(t) + \psi_{o2}(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \rho_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \rho_2) \quad (2.1.4)$$



Obr.2.1.1. Příklady soustav se dvěma stupni volnosti.

### 2.2. Sférické kyvadlo

Předpokládáme matematické kyvadlo, které se může pohybovat ve směru  $x$  a  $y$ . Pak

$$1. \text{ mód: } x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t + \rho_1) \quad (2.2.1)$$

$$2. \text{ mód: } y(t) = y_0 \cos(\omega_2 t + \rho_2) \quad (2.2.2)$$

V tomto případě, protože máme pouze jedno těleso a stejnou vratnou gravitační sílu, platí

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{g/l} \quad (2.2.3)$$

Obě frekvence jsou stejné, tzv. degenerovaný případ, a výsledný kmit je superpozice obou módů. Těleso se pohybuje obecně po elipse.

### 2.3. Podélné kmity dvou vázaných těles.

Předpokládáme uspořádání (obr.2.3.1.) dvou stejných těles a,b o hmotnosti m mezi třemi stejnými pružinami.

Pohybové rovnice pro těleso a s výchylkou  $\psi_a$  a pro těleso b s výchylkou  $\psi_b$

$$m\ddot{\psi}_a = -\zeta(a + \psi_a) + K(a - \psi_a + \psi_o) = -\zeta\psi_a + K\psi_o \quad (2.3.1)$$

$$m\ddot{\psi}_o = K(a - \psi_o) - K(a - \psi_a + \psi_o) = -K\psi_o + K\psi_a \quad (2.3.2)$$

Obě rovnice sečteme a odečteme

$$m(\ddot{\psi}_a + \ddot{\psi}_o) = -\zeta(\psi_a + \psi_o) \quad (2.3.3)$$

$$m(\ddot{\psi}_a - \ddot{\psi}_o) = -K(\psi_a - \psi_o) \quad (2.3.4)$$

To jsou dvě pohybové rovnice pro jednoduchý oscilátor, respektive pro dva módy s výchylkami  $\psi_1$  a  $\psi_2$ , tyto výchylky se nazývají rovněž souřadnice módů nebo normální souřadnice

$$\psi_1 = \psi_a + \psi_o = A_1 \cos(\omega_1 t + \rho_1) \rightarrow \nu_1 = \frac{K}{m} \quad (2.3.5)$$

$$\psi_2 = \psi_a - \psi_o = A_2 \cos(\omega_2 t + \rho_2) \rightarrow \nu_2 = \frac{3K}{m} \quad (2.3.6)$$

V 1. módu platí  $A_2=0$  a tedy  $\psi_a = \psi_o$ , tělesa kmitají na jednu stranu jako celek s frekvencí  $\omega_1$ .

Ve 2. módu platí  $A_1=0$  a tedy  $\psi_a = -\psi_o$ , tělesa kmitají na opačné strany s frekvencí  $\omega_2$ .

Sečtením, respektive odečtením rovnic (2.3.5, 2.3.6) dostaneme řešení pro jednotlivá tělesa a,b

$$2\psi_a = \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \rho_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \rho_2) \quad (2.3.7)$$

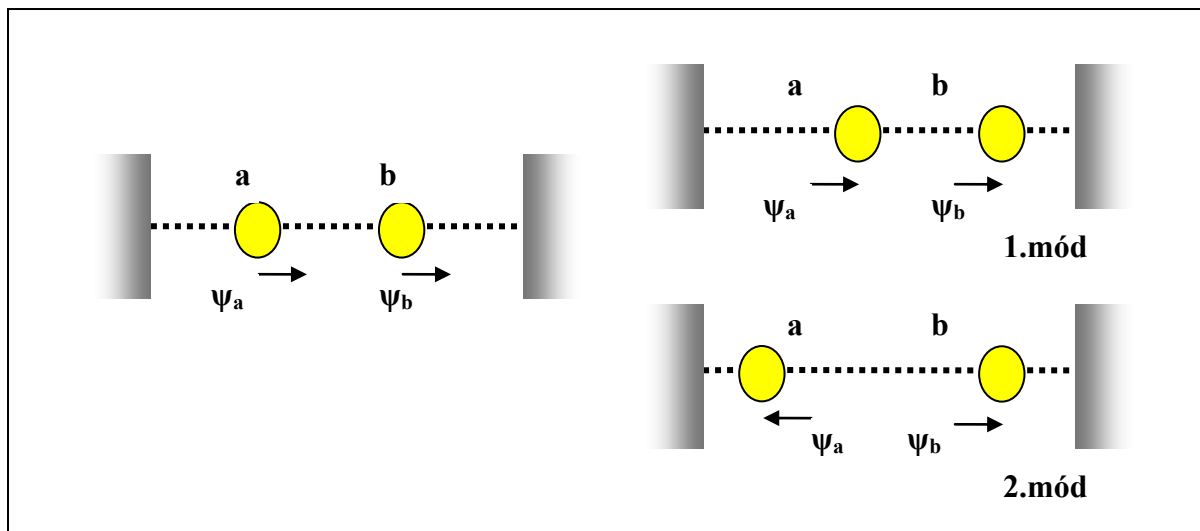
$$2\psi_o = \psi_1 - \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \rho_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \rho_2) \quad (2.3.8)$$

Vlastní frekvence  $\omega_1$  a  $\omega_2$  můžeme odvodit rovněž touto úvahou. V prvním módu platí  $\psi_a = \psi_o$ , soustava kmitá jako by tam prostřední pružina nebyla, pak je to případ jednoho tělesa o hmotnosti m, které je vraceno pouze jednou pružinou a tedy

$$\omega_1 = \frac{K}{m} \quad (2.3.9)$$

Ve 2. módu platí  $\psi_a = -\psi_o$ , z jedné strany působí na těleso síla  $-\zeta\psi_a$  a z druhé strany  $-2k\psi_a$  (střední pružina je dvojnásobně napjatá nebo stlačená) a tedy

$$\omega_2 = \frac{3K}{m} \quad (2.3.10)$$



Obr. 2.3.1. Podélné kmity, dva stupně volnosti.

Pro uvedení soustavy do stavu, kdy celá kmitá v 1. módu zvolíme počáteční podmínky pro  $t=0$  ve tvaru

$$\psi_a(0) = A_0 \quad \psi_b(0) = A_0 \quad \dot{\psi}_a(0) = 0 \quad \dot{\psi}_b(0) = 0 \quad (2.3.11)$$

Po dosazení do (2.3.7) a (2.3.8) a jejich derivací podle času dostaneme pro módy

$$\psi_1(0) = A_1 = 2A_0 \quad \psi_2(0) = 0 \quad \dot{\psi}_1(0) = 0 \quad \dot{\psi}_2(0) = 0 \quad (2.3.12)$$

Dosazením do (2.3.5) dostaneme pro tento mód

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) = 2A_0 \cos(\omega_1 t) \quad (2.3.13)$$

Současně z (2.3.7) a (2.3.8) pro jednotlivá tělesa

$$\psi_a = A_0 \cos(\omega_1 t) \quad \psi_b = A_0 \cos(\omega_1 t) \quad (2.3.14)$$

To je případ, kdy obě tělesa kmitají ve stejném směru se stejnými výchylkami, se stejnými fázemi. Střední pružina není deformovaná a nemá vliv na kmitavý pohyb.

Analogicky pro uvedení soustavy do kmitů ve 2. módu zvolíme počáteční podmínky v  $t=0$  takto

$$\psi_a(0) = -A_0 \quad \psi_b(0) = A_0 \quad \dot{\psi}_a(0) = 0 \quad \dot{\psi}_b(0) = 0 \quad (2.3.15)$$

Stejným postupem dostaneme

$$\psi_1(0) = 0 \quad \psi_2(0) = -A_0 \quad \dot{\psi}_1(0) = 0 \quad \dot{\psi}_2(0) = 0 \quad (2.3.16)$$

Pro mód platí

$$\psi_2 = 2A_0 \cos(\omega_2 t + \pi) = -2A_0 \cos(\omega_2 t) \quad (2.3.17)$$

To odpovídá kmitům jednotlivých těles

$$\psi_a = A_0 \cos(\omega_2 t) \quad \psi_b = A_0 \cos(\omega_2 t + \pi) = -A_0 \cos(\omega_2 t) \quad (2.3.18)$$

Tedy obě tělesa kmitají se stejnou amplitudou v opačných směrech. Střední pružina je dvojnásobně deformovaná proti krajním.

## 2.4. Příčné kmity dvou vázaných těles

Uspořádání a tvar kmitů v obou módech je na obr. 2.4.1.



V prvním módu platí i pro příčné výchylky  $\psi_a = \psi_b$ , tedy střední pružina nemá na kmitání vliv a podobně jako pro podélné kmity

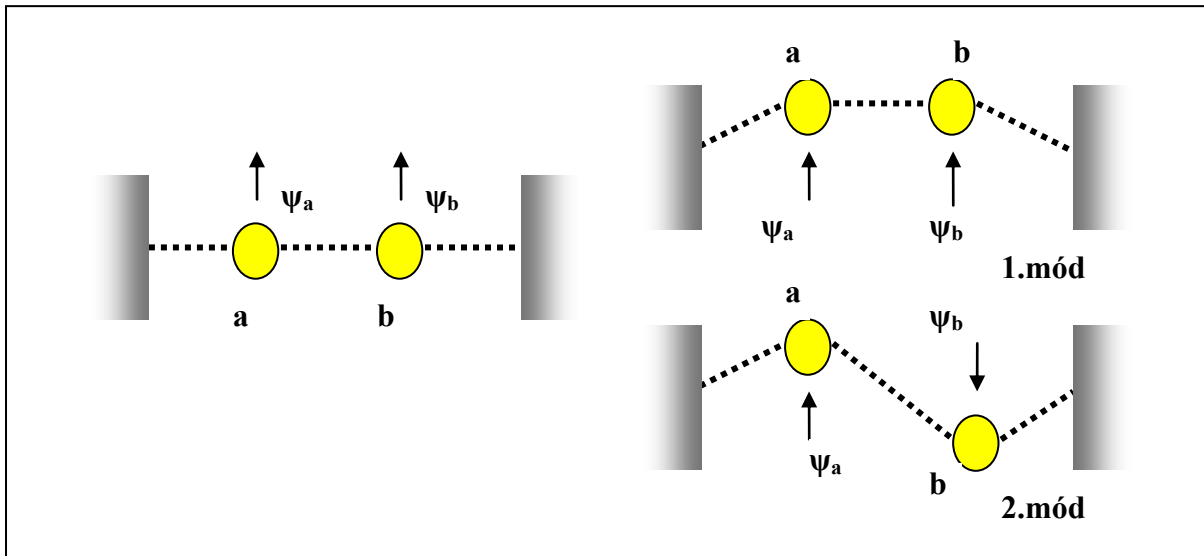
$$\omega_1 = \frac{K(a - l_0)}{ma} = \frac{T_0}{ma} \quad (2.4.1)$$

Kde  $T_0$  je tzv. napětí.

Ve 2. módu platí  $\psi_a = -\psi_b$ , střední pružina je dvojnásobně napjatá a tedy

$$\omega_2 = \frac{T_0}{ma} + \frac{2T_0}{ma} = \frac{3T_0}{ma} \quad (2.4.2)$$

Pro  $a_0 \rightarrow 0$  jsou frekvence pro podélné a příčné módy stejné.

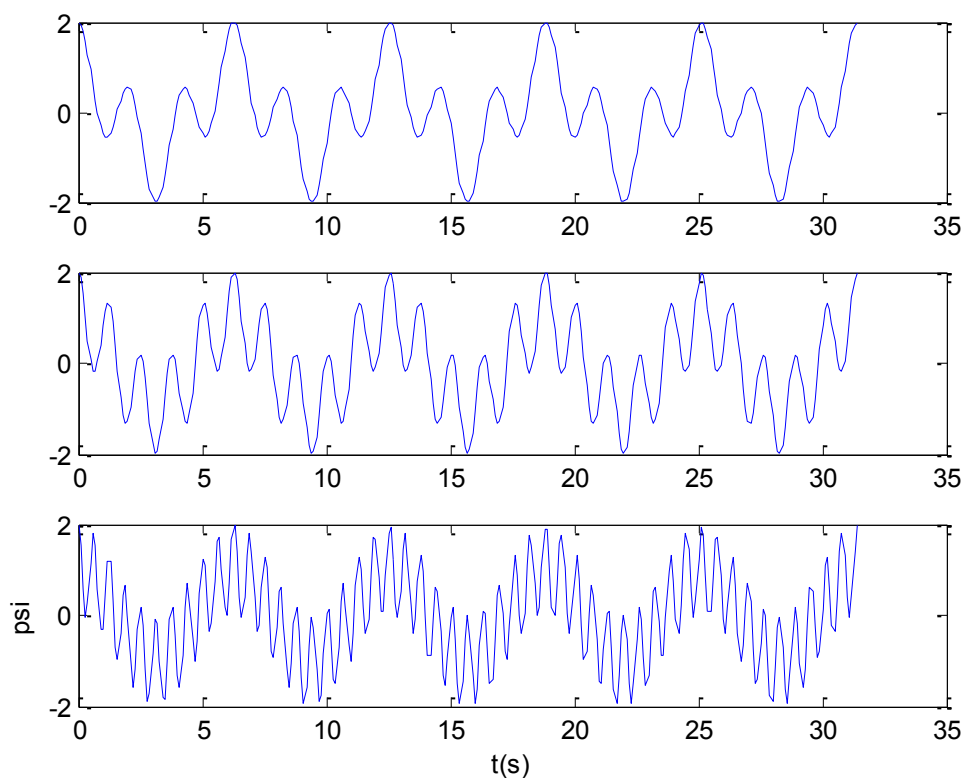


Obr. 2.4.1. Příčné kmity – dva stupně volnosti.

## 2.5. Skládání dvou rovnoběžných kmitů

Velmi často můžeme pozorovat skládání (interferenci) dvou kmitů s různými frekvencemi  $\omega_1$  a  $\omega_2$ . Pro rovnoběžné kmity platí (pro jednoduchost volíme stejné amplitudy a zanedbáváme fázi)

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (2.5.1)$$



Obr. 2.5.1. Skládání kmitů o stejných amplitudách a různých frekvencích  $\omega_1 = 1\text{s}^{-1}$ , postupně  $\omega_2 = 3\text{s}^{-1}, 5\text{s}^{-1}, 10\text{s}^{-1}$ .

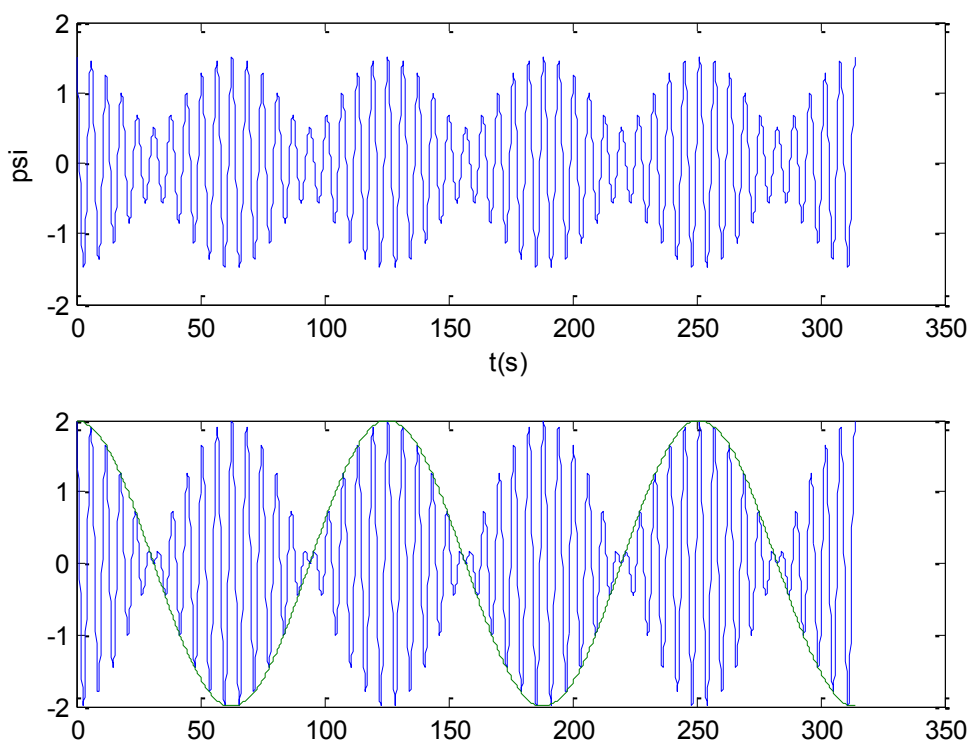
Což lze napsat ve tvaru

$$\psi = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{st}} t) = A_{\text{mod}}(t) \cos(\omega_{\text{st}} t) \quad (2.5.2)$$

Kde

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \omega_{\text{st}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad A_{\text{mod}}(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \quad (2.5.3)$$

V případě dvou velmi blízkých frekvencí se jedná o kmit s téměř původní frekvencí ( $\omega_{\text{st}} \approx \omega$ ) a s pomalu se měnící amplitudou s frekvencí  $\omega_{\text{mod}} = \Delta \omega$ . Tomuto jevu říkáme „rázy“ – viz obr. 2.5.2. S tímto jevem se setkáme v akustice.



Obr.2.5.2. Rázy - skládání kmitů s blízkými frekvencemi ( $\omega_1 = 1\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 1.1\text{s}^{-1}$ ), v horním okně jsou amplitudy  $A_1=1$  a  $A_2=0.5$ , v dolním okně  $A_1=A_2$ , obálka je vyznačena zeleně.

Pro uspořádání dvou stejných matematických kyvadel spojených slabou pružinou, viz druhý příklad na obr.2.1.1., platí pro první mód (pružina nemá vliv na pohyb tělesa)

$$1. \text{ mód: } \psi_a = \psi_o \quad \omega_1 = \frac{g}{l} \quad (2.5.4)$$

a pro druhý mód (mimo působení tíhy je pohyb tělesa o hmotnosti  $m$  ovlivněn dvojnásobnou deformací pružiny)

$$2. \text{ mód: } \psi_a = -\psi_o \quad \omega_2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m} \quad (2.5.5)$$

Pro kmity jednotlivých těles platí

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (2.5.6)$$

$$\psi_o = \psi_1 - \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (2.5.7)$$

Pro jednoduchost zanedbáme fáze a předpokládáme stejné amplitudy

$$\psi_a = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) \quad (2.5.8)$$

$$\psi_o = A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t) \quad (2.5.9)$$

nebo

$$\psi_a = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{st}} t) = A_{\text{mod}}(t) \cos(\omega_{\text{st}} t) \quad (2.5.10)$$

$$\psi_o = 2A \sin(\omega_{\text{mod}} t) \sin(\omega_{\text{st}} t) = B_{\text{mod}}(t) \sin(\omega_{\text{st}} t) \quad (2.5.11)$$

Pokud se jedná o slabou vazbu ( $2k/m \ll g/l$ ) pak obě frekvence jsou si blízké a můžeme pozorovat rázy. Rychlé kmity se od sebe liší fázovým posunem o  $\pi/2$  podobně je tomu pro modulační amplitudy.

Podobně je tomu s energií jednotlivých těles. Předpokládejme že, během jednoho rychlého kmitu se amplituda prakticky nemění, pak pro kinetickou energii lze psát

$$E_{k_a} = \frac{1}{2} m \omega_{st}^2 A_{mod}^2 = 2m A^2 \omega_{st}^2 \cos^2(\omega_{mod} t) \quad (2.5.11)$$

$$E_{k_b} = \frac{1}{2} m \omega_{st}^2 B_{mod}^2 = 2m A^2 \omega_{st}^2 \sin^2(\omega_{mod} t) \quad (2.5.12)$$

Po sečtení a odečtení

$$E_k = E_{k_a} + E_{k_b} = 2m A^2 \omega_{st}^2 \quad (2.5.13)$$

$$E_{k_a} - E_{k_b} = K(\cos^2(\omega_{mod} t) - \sin^2(\omega_{mod} t)) = K \cos(2\omega_{mod} t) = K \cos(\omega_1 - \omega_2)t \quad (2.5.14)$$

Rovněž sečtením a odečtením dostaneme kinetickou energii jednotlivých kyvadel

$$E_{k_a} = \frac{1}{2} K \left[ 1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \right] \quad (2.5.15)$$

$$E_{k_b} = \frac{1}{2} K \left[ 1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \right] \quad (2.5.16)$$

Viditelně se kinetická energie přelévá z jednoho kyvadla do druhého s frekvencí

$$\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$$

## **2.6. Skládání kmitů na sebe kolmých.**

Opět častým případem je skládání kmitů kolmých navzájem, např. sférické kyvadlo.

V takovém případě jsou frekvence ve směrech x, y stejné a platí

$$\psi_x = \psi_{x0} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (2.6.1)$$

$$\psi_y = \psi_{y0} \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (2.6.2)$$

Ustálenou výslednou křivku, po které se bude kyvadlo pohybovat, dostaneme vyloučením

času t z obou rovnic, např. pro fázový rozdíl  $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = n\pi$  platí

$$\psi_x = \psi_{x0} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (2.6.3)$$

$$\psi_y = \psi_{y0} \cos(\omega t + \varphi_1 + 1\pi) = \mp \psi_{y0} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (2.6.4)$$

V podílu (pro názornost používáme i běžné označení os x,y)

$$\frac{x}{y} = \frac{\psi_x}{\psi_y} = \mp \frac{\psi_{x0}}{\psi_{y0}} = \text{konst} \quad (2.6.5)$$

Což je rovnice přímky. Podobně pro  $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi/2$  dostaneme pro stejné amplitudy

$$\psi_x = \psi_{x0} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (2.6.6)$$

$$\psi_y = \mp \psi_{x0} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (2.6.7)$$

Po umocnění a sečtení

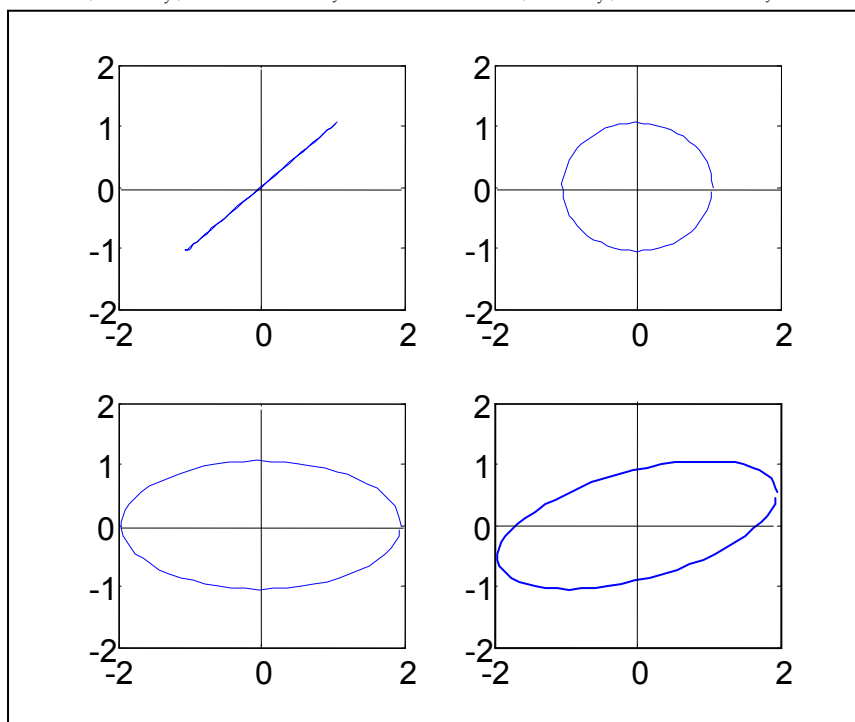
$$x^2 + y^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2 = \psi_{x0}^2 \quad (2.6.8)$$

Což je rovnice kružnice. Pro různé amplitudy dostaneme stejným postupem

$$\frac{x^2}{\psi_{x0}^2} + \frac{y^2}{\psi_{y0}^2} = \frac{\psi_x^2}{\psi_{x0}^2} + \frac{\psi_y^2}{\psi_{y0}^2} = 1 \quad (2.6.9)$$

Což je rovnice elipsy s poloosami ve směrech x, y. V obecném případě vyjdeme z rovnic (2.6.1, 2.6.2) a poněkud zdlouhavějším, ale jednoduchým postupem dostaneme

$$\frac{x^2}{\psi_{x0}^2} + \frac{y^2}{\psi_{y0}^2} - 2 \frac{x}{\psi_{x0}} \frac{y}{\psi_{y0}} \cos \Delta = \frac{\psi_x^2}{\psi_{x0}^2} + \frac{\psi_y^2}{\psi_{y0}^2} - 2 \frac{\psi_x}{\psi_{x0}} \frac{\psi_y}{\psi_{y0}} \cos(\Delta) = \sin^2(\Delta) \quad (2.6.10)$$

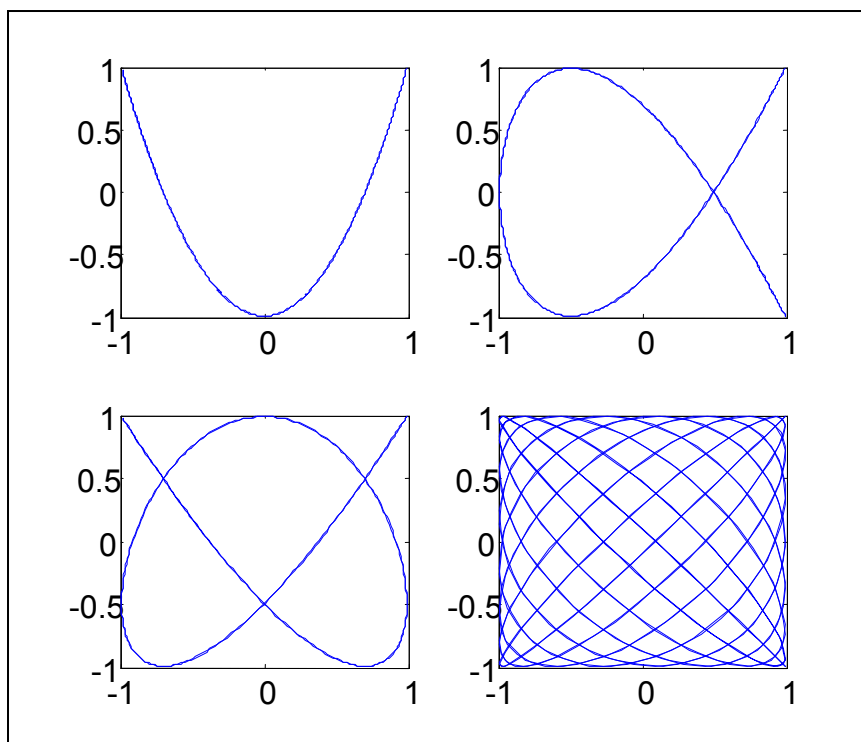


Obr. 2.6.1. Skládání na sebe kolmých kmitů postupně pro 1)  $\psi_{x0} = \psi_{y0} = 1, \Delta = 0$   
 2)  $\psi_{x0} = \psi_{y0} = 1, \Delta = \pi/2$ , 3)  $\psi_{x0} = 2, \psi_{y0} = 1, \Delta = \pi/2$ , 4)  $\psi_{x0} = 2, \psi_{y0} = 1, \Delta = \pi/3$ .

Při skládání kmitů na sebe kolmých a s různými frekvencemi

$$x = x_0 \cos(\omega_x t + \varphi_x) \quad y = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi_y) \quad (2.6.11)$$

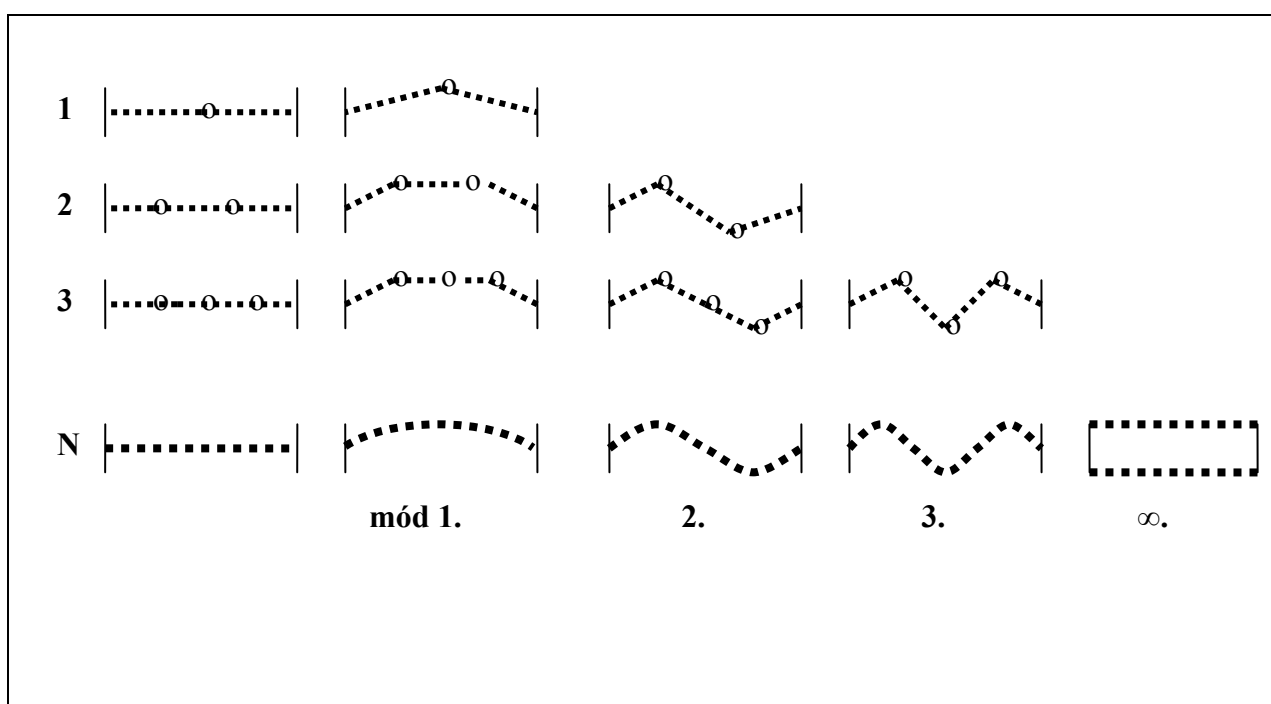
dostaneme mnohem složitější křivky. Ve speciálním případě, kdy poměr frekvencí je racionální číslo jsou křivky uzavřené (v obdélníku  $2x_0, 2y_0$ ) – tzv. Lissajousovy křivky, viz obr. 2.6.2.



Obr.2.6.2. Skládání kolmých kmitů o různých frekvencích, stejných amplitudách a fázích, postupně 1)  $\omega_x = 1, \omega_y = 2$ , 2)  $\omega_x = 2, \omega_y = 3$ , 3)  $\omega_x = 3, \omega_y = 4$ , 4)  $\omega_x = 16, \omega_y = 17$ .

### 3. Volné kmity – mnoho stupňů volnosti.

Pro větší počet stupňů volnosti můžeme postupovat analogicky. Zajímavé výsledky dostaneme zejména pro velký počet, respektive pro nekonečný počet, což je spojité prostředí. Předpokládejme  $N$  počet stupňů volnosti, současně máme  $N$  módů,  $N$  frekvencí a  $N$  fází a amplitudy v poměru  $A_1: A_2: A_3: \dots$ . V případě  $N \rightarrow \infty$  se jedná o spojité prostředí, který popisujeme funkcí  $\Psi(x, y, z, t)$  a místo kmitů můžeme mluvit o stojatých vlnách. I v tomto případě máme nekonečný počet módů, frekvencí a fází. (V reálném prostředí je tzv. nekonečno omezeno diskrétní povahou látky (např. počet atomů v pevné látce je asi  $10^{23} \text{ cm}^{-3}$ ). Je obvyklé číslovat módy od nejnižší frekvence. V obecném případě se jedná vždy o superpozici módů, která je určena počátečními podmínkami. Příklad rostoucího počtu módů v jednoduchém řetězci kmitajících tělísek je na obr.3.1.0 .



Obr.3.1.0. Módy – mnoho stupňů volnosti.

#### 3.1. Příčné módy spojitě struny.

Konečný, ale velký počet stupňů volnosti probereme později. Přednost dáme příkladu spojitěho prostředí – struně. To je kmitající drát upevněný na obou koncích.

Pro obecné 3dm těleso lze psát

$$\Psi(x, y, z, t) = \mathbf{i}\Psi_x(x, y, z, t) + \mathbf{j}\Psi_y(x, y, z, t) + \mathbf{k}\Psi_z(x, y, z, t) \quad (3.1.1)$$

Protože se jedná o 1dm strunu nataženou ve směru osy  $z$

$$\Psi(z, t) = \mathbf{i}\Psi_x(z, t) + \mathbf{j}\Psi_y(z, t) + \mathbf{k}\Psi_z(z, t) \quad (3.1.2)$$

Funkce  $\Psi_z(z, t)$  popisuje podélné kmity, které nebudeme studovat. Pak pro příčné kmity platí

$$\Psi(z, t) = \mathbf{i}\Psi_x(z, t) + \mathbf{j}\Psi_y(z, t) \quad (3.1.3)$$

Rozechvějeme-li strunu pouze ve směru x, pak stačí

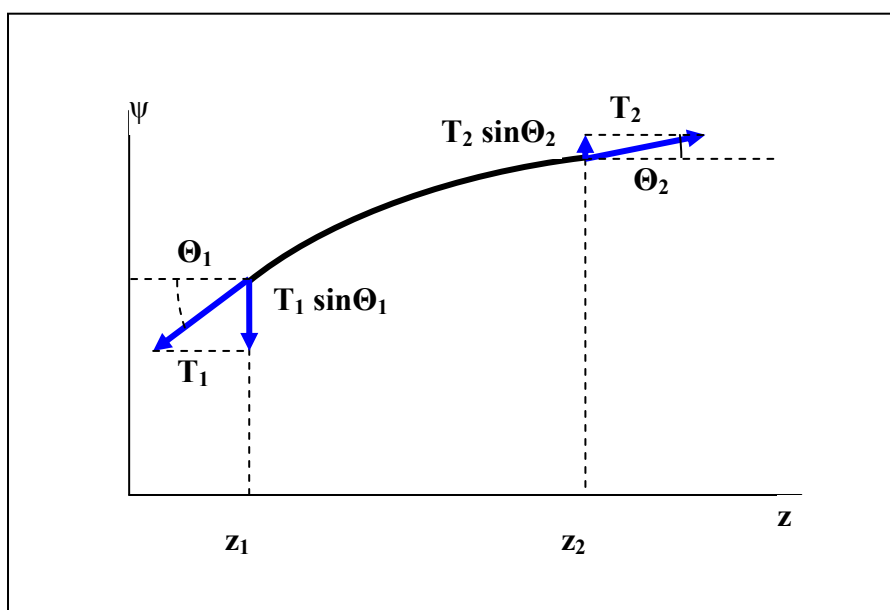
$$\Psi(z, t) = i\Psi_x(z, t) \quad (3.1.4)$$

Zvolíme hmotnost elementu struny ve tvaru

$$\Delta l = \rho_0 \Delta z \quad (3.1.5)$$

kde  $\Delta z = z_2 - z_1$ ,  $\rho_0$  je konstantní (struna je homogenní) lineární měrná hmotnost, natažení, resp. napětí struny je

$$T = (a - a_0)K \quad (3.1.6)$$



Obr. 3.1.1. Element struny.

Ve shodě s obr.3.1.1.- je vratná síla působící na element ve směru x

$$\Delta F_x(t) = T_2 \sin(\Theta_2) - T_1 \sin(\Theta_1) \quad (3.1.7)$$

Pro malé úhly lze psát

$$\cos(\Theta) \rightarrow T \cos(\Theta) = T_0 \quad (3.1.8)$$

Pak vztah (3.1.7) má tvar

$$\Delta F_x(t) = T_2 \cos(\Theta_2) \text{tg}(\Theta_2) - T_1 \cos(\Theta_1) \text{tg}(\Theta_1) = T_0 \text{tg}(\Theta_2) - T_0 \text{tg}(\Theta_1) \quad (3.1.9)$$

Respektive

$$\Delta F_x(t) = T_0 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_2 - T_0 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_1 = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} \quad (3.1.10)$$

Z 2. Newtonova zákona

$$\Delta F_x(t) = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} \quad (3.1.11)$$

Po úpravě

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} \quad (3.1.12)$$

To je velmi důležitá vlnová rovnice příčných kmitů struny, respektive stojatých vln. Poznamenejme, že člen  $T_0/\rho_0$  má rozměr  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ , tedy kvadrátu rychlosti.

### 3.2. Stojaté vlny



Hledáme módy, tedy stavy kdy všechny části struny kmitají se stejnou frekvencí a fází.  
Obecný tvar takového módu, stojaté vlny je

$$\Psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2.1)$$

Druhé derivace podle času (zrychlení) a souřadnice

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2.3)$$

Po dosazení do vlnové rovnice (3.1.12)

$$\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} = -\omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} A(z) \quad (3.2.4)$$

Tato rovnice, která má stejný tvar jako harmonický oscilátor, určuje geometrický tvar módu  $A(z)$ . Souřadnice  $t$  je zaměněna za  $z$  a místo časové frekvence  $\omega = 2\pi/T$  dostaneme prostorovou frekvenci (nebo vlnové číslo)  $k = 2\pi/\lambda$ , kde  $\lambda$  je vlnová délka. Obecné řešení pro amplitudu má tvar

$$A(z) = A \sin(kz) + B \cos(kz) \quad (3.2.5)$$

Po druhé derivaci

$$\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} = -k^2 A(z) \quad (3.2.6)$$

Srovnáme s (3.2.4) a dostaneme

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\rho_0} k^2 \quad (3.2.7)$$

Což je důležitý, tzv. disperzní vztah ( $\omega = f(k)$ ). Jinou úpravou dostaneme

$$\lambda v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = v_0 \quad (3.2.8)$$

Kde  $v_0$  má formální význam fázové rychlosti.

Obecné řešení dostaneme dosazením (3.2.5) do (3.2.1)

$$\Psi(z, t) = (A \sin(kz) + B \cos(kz)) \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2.9)$$

Okrajové podmínky jsou určeny tím, že struna je upevněna v bodech  $z=0$  a  $z=L$ , kde  $\Psi = 0$ :

$$z=0 \quad \Psi(0, t) = (0 + B) \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0 \quad (3.2.10)$$

Pak

$$\Psi(z, t) = A \sin(kz) \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2.11)$$

Pro

$$z=L \quad \text{pro } A \neq 0 \quad \rightarrow \quad \sin kL = 0 \quad (3.2.12)$$

Tedy

$$kL = n\pi \quad (3.2.13)$$

Nebo lépe ( $n$  je celé číslo)

$$k_n L = n\pi \quad (3.2.14)$$

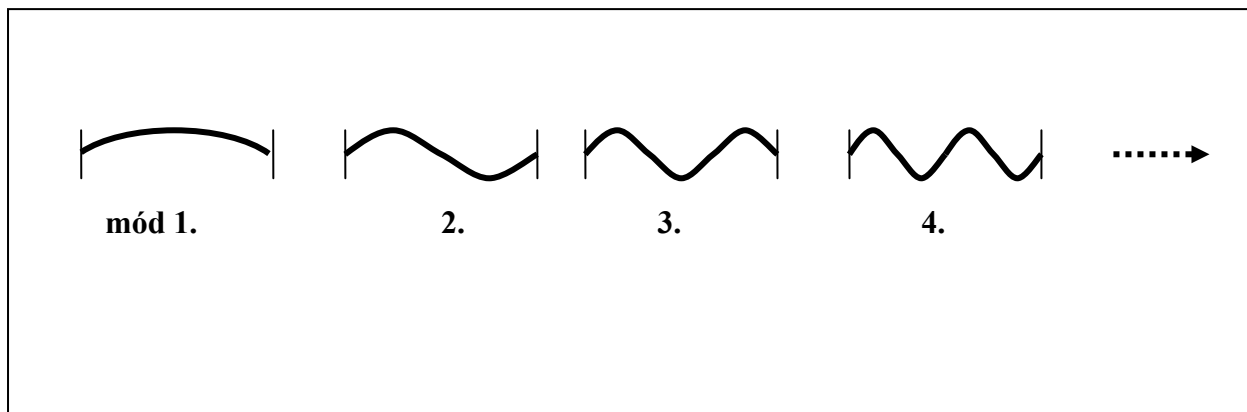
Nebo

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \lambda_1 = 2L \quad \rightarrow \quad \nu_n = \lambda_1 \frac{1}{n} \quad (3.2.15)$$

Nebo s využitím (3.2.8)

$$v_n = \frac{v_0}{\lambda_n}, \quad v_1 = \frac{v_0}{\lambda_1} \quad \rightarrow \quad v_n = v_1 n \quad (3.2.16)$$

Důležitý závěr je, že důsledkem okrajových podmínek dochází k tomu, že určující parametry mají diskrétní hodnoty (v kvantové fyzice je analogií kvantování). Např. frekvence módů jsou násobkem základní frekvence (harmonické frekvence), vlnová délka je zlomkem základní vlnové délky, viz. obr.3.2.1. V případě nehomogenních strun ( $\rho_0 \neq \text{konst}$ ) je situace mnohem složitější a harmonické frekvence jsou jiné.



Obr. 3.2.1. Módy struny.

### **3.3. Disperzní vztah.**

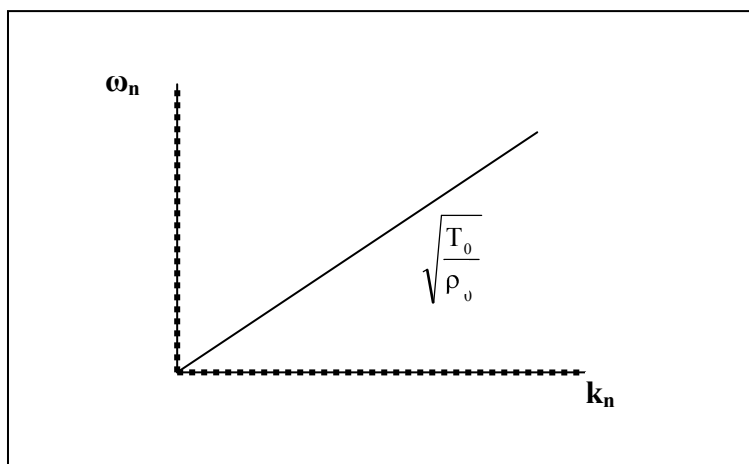
Tímto vztahem rozumíme vztah mezi frekvencí a vlnovým číslem nebo obyčejnou frekvencí a vlnovou délkou. Pro strunu jsme odvodili

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k_n \quad \text{nebo} \quad v_n = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \frac{1}{\lambda_n} \quad (3.3.1)$$

To je jednoduchý lineární tvar (obr. 3.3.1), velmi často je to mnohem složitější funkce, např. u částečně nehomogenní struny

$$\omega = \frac{T_0}{\rho_0} k^2 + \alpha \zeta^4 \quad (3.3.2)$$

Proto harmonické frekvence nejsou násobkem základní.

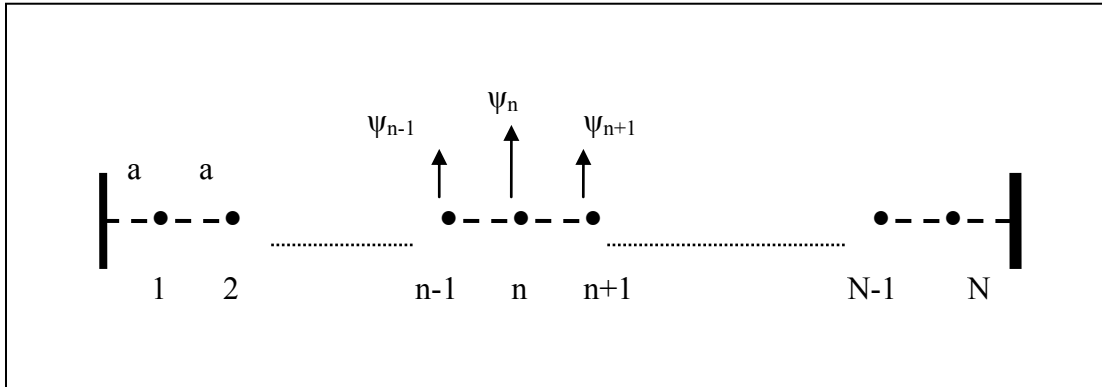


Obr. 3.3.1. Disperzní vztah pro ideální strunu.

### 3.4. Kmity systému s N stupni volnosti.

#### Konečný řetězec - jednočásticový- příčné kmity

Představíme si N tělísek spojených stejnými pružinami (strunu nahradíme diskretními prvky), viz. obr.3.4.1.



Obr.3.4.1. Příčné kmity – N stupňů volnosti.

Pro malé příčné kmity pro n-tý element platí pohybová rovnice

$$m\ddot{\psi}_n(t) = -\frac{T_0}{a}(\psi_n - \psi_{n+1}) - \frac{T_0}{a}(\psi_n - \psi_{n-1}) = \frac{T_0}{a}(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) \quad (3.4.1)$$

V příslušném módu bude každé tělísko kmitat se stejnou frekvencí a fází, ale různou amplitudou a řešení předpokládáme ve tvaru

$$\psi_n(t) = A_n \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4.2)$$

Druhou derivaci podle času

$$\ddot{\psi}_n(t) = -\omega^2 \psi_n(t) \quad (3.4.3)$$

dosadíme do (3.4.1)

$$-n\omega^2 A_n = \frac{T_0}{a}(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}) \quad (3.4.4)$$

nebo

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n \left(2 - \frac{ma}{T_0} \omega^2\right) \quad (3.4.5)$$

Tj. rovnice, která dává závislost amplitudy (tvaru módu) na frekvenci.

Pro spojitě prostředí, za stejných okrajových podmínek, jsme měli (3.2.11)

$$A(z) = A \sin(kz) \quad (3.4.6)$$

Předpokládejme, že pro velké N se soustava bude chovat obdobně a položíme  $z=na$ , pak můžeme očekávat

$$A_n = A \sin(kna) \quad (3.4.7)$$

Podobně

$$A_{n+1} = A \sin(k(n+1)a) = A \sin(kna) \cos(ka) + A \cos(kna) \sin(ka) \quad (3.4.8)$$

$$A_{n-1} = A \sin(k(n-1)a) = A \sin(kna) \cos(ka) - A \cos(kna) \sin(ka) \quad (3.4.9)$$

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A \sin(kna) \cos(ka) = 2A_n \cos(ka) \quad (3.4.10)$$

Dosadíme do (3.4.5) a řešíme rovnici

$$2A_n \cos(ka) = A_n \left(2 - \frac{ma}{T_0} \omega\right) \quad (3.4.11)$$

Pro  $A_n \neq 0$  dostaneme důležitý disperzní vztah

$$\omega = \frac{2T_0}{ma} (1 - \cos(ka)) = \frac{4T_0}{ma} \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (3.4.12)$$

Poznamenejme, že pro malé a respektive  $ka/2$  s pomocí  $m = a\rho_0$  lze psát

$$\omega = \frac{4T_0}{ma} \sin^2 \left( \frac{ka}{2} \right) = \frac{4T_0}{ma} \left( \frac{ka}{2} \right)^2 = \frac{T_0}{\rho_0} k^2 \quad (3.4.13)$$

Dostali jsme podle očekávání vztah pro spojitou strunu.

Rovněž využijeme hraniční podmínky  $\psi = 0$  pro  $z=0$  ( $n=0$ ) a  $z=L$  ( $n=N+1$ ). Pro obecné řešení ve tvaru

$$A_n = A \sin(kna) + B \cos(kna) \quad (3.4.14)$$

$$z=0 \rightarrow A_n = 0 \rightarrow B = 0 \quad (3.4.15)$$

$$z=L \rightarrow A_{N+1} = A \sin(k(N+1)a) = A \sin(kL) = 0 \quad (3.4.16)$$

Pak pro  $A \neq 0$  dostaneme podobná výběrová pravidla

$$k_n L = n\pi \quad (3.4.17)$$

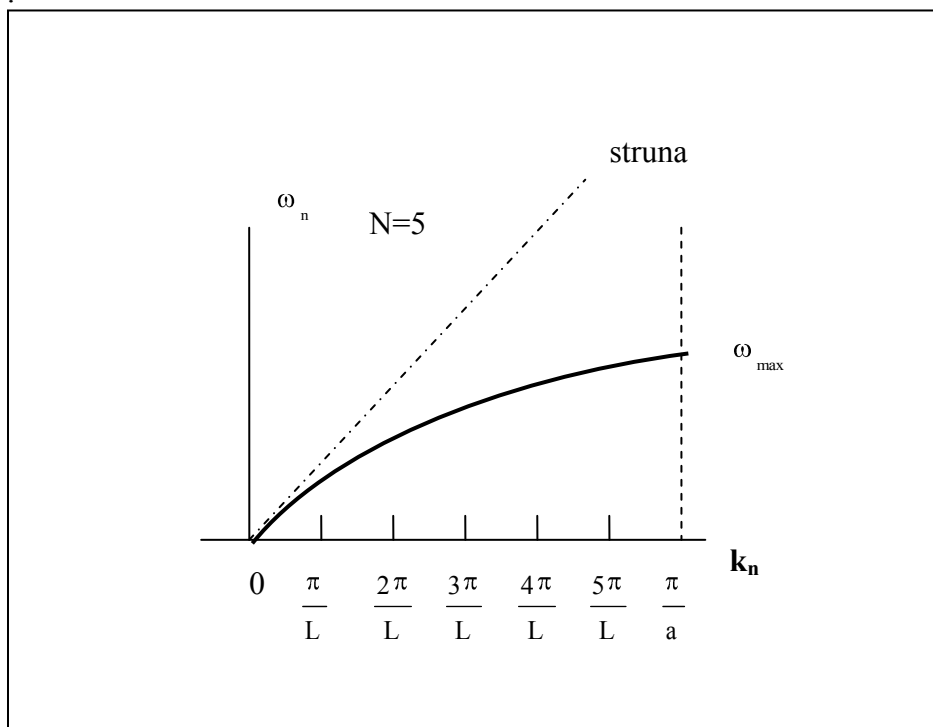
Disperzní vztah (3.4.13) má tvar

$$\omega_n = \frac{4T_0}{ma} \sin^2 \frac{k_n a}{2} \quad (3.4.18)$$

Ten dovolí vypočítat příslušné frekvence. Je na obr.3.4.2. Poznamenejme, že největší  $k$

$$k_{N+1} = \frac{(N+1)\pi}{L} = \frac{\pi}{a} \quad (3.4.19)$$

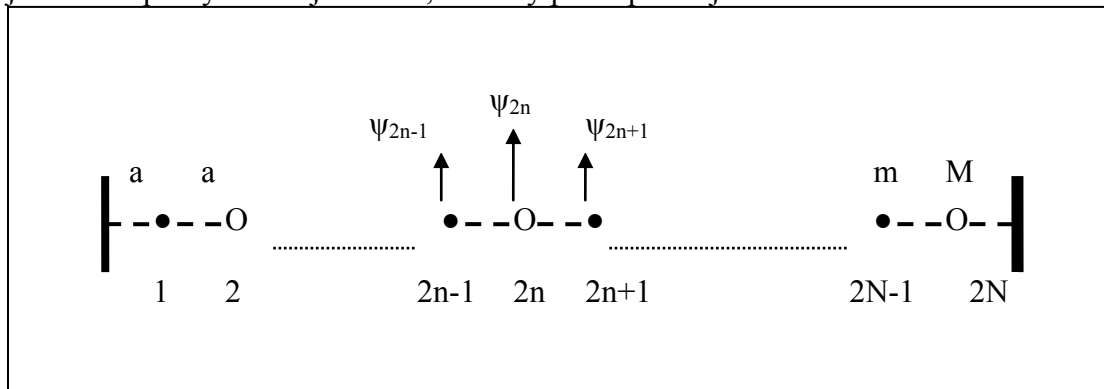
Tvar módů je na obr. 3.1.0., pro strunu na obr. 3.2.1.



Obr. 3.4.2. Disperzní vztah (3.4.18) pro soustavu s  $N=5$

### Konečný řetězec – dvoučásticový – příčné kmity.

Zajímavé výsledky dostaneme v analogickém případě, kdy se řetězec skládá ze střídajících se částic o různých hmotnostech  $m$  a  $M$  – viz obr. 3.4.3. ( $M > m$ ). Pro zjednodušení přečíslujeme jednotlivé prvky na dvojnásobek, celkový počet prvků je  $2N$ .



Obr. 3.4.3. Konečný řetězec s částicemi o hmotnosti  $m$  a  $M$ .

Dostaneme dvě pohybové rovnice

$$M\psi_{2n}(t) = \frac{T_0}{a}(\psi_{2n+} - 2\psi_{2n} + \psi_{2n-}) \quad (3.4.20)$$

$$m\psi_{2n+}(t) = \frac{T_0}{a}(\psi_{2n+} - 2\psi_{2n+} + \psi_{2n}) \quad (3.4.20)$$

Řešení předpokládáme ve shodě s předcházejícím případem ve tvaru (volba  $A$  a  $M$  platí pro hmotnější částici, pro méně hmotnou  $B$  a  $m$ )

$$\psi_{2n}(t) = A_{2n} \cos(\omega t + \varphi) = A \sin(k2na) \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4.21)$$

$$\psi_{2n+}(t) = B_{2n+} \cos(\omega t + \varphi) = B \sin(k(2n+1)a) \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4.22)$$

a stejným postupem dostaneme rovnice

$$(M\omega^2 - 2\frac{T_0}{a})A + 2B\frac{T_0}{a} \cos(ka) = 0 \quad (3.4.23)$$

$$(m\omega^2 - 2\frac{T_0}{a})B + 2A\frac{T_0}{a} \cos(ka) = 0 \quad (3.4.24)$$

Tato soustava rovnic musí mít determinant rovný nule, pak

$$\omega = \frac{T_0}{a} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm \frac{T_0}{a} \left[ \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(ka)}{Mm} \right]^{1/2} \quad (3.4.25)$$

Dostáváme dvě řešení pro  $\omega_+$  a  $\omega_-$  obr. 3.4.4.

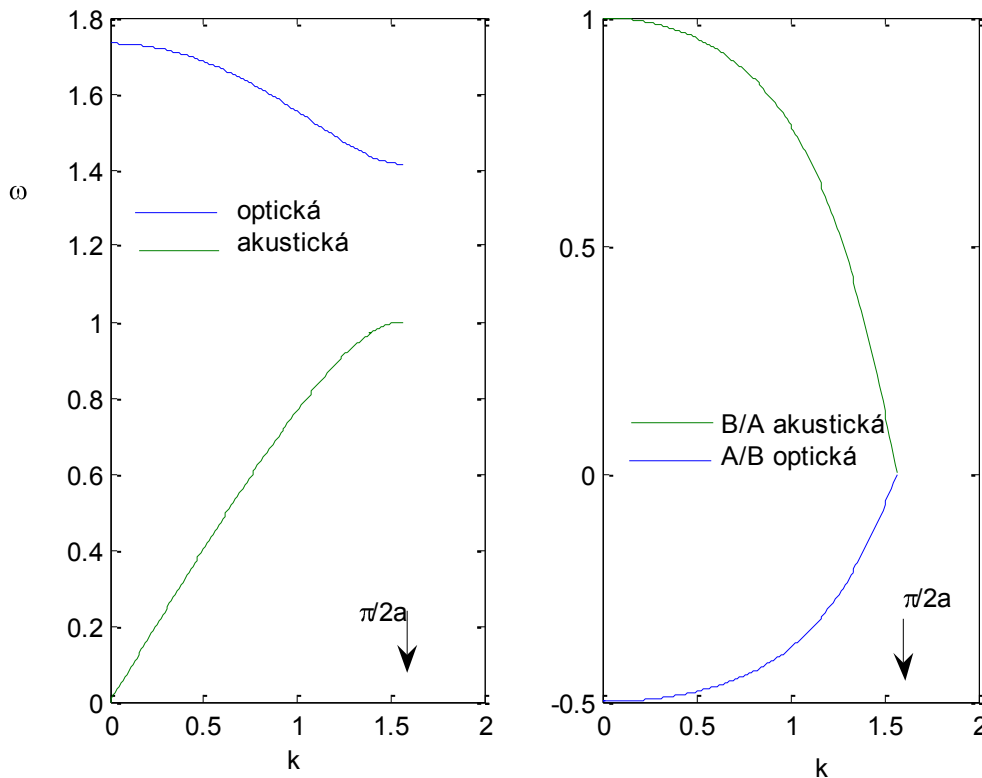
Větev pro  $\omega_+(k)$  je tzv. optická a pro  $\omega_-(k)$  je tzv. akustická. Důvodem k tomuto označení je velikost frekvencí. Mezera mezi oběma větvemi je oblast zakázaných frekvencí (někdy tzv. zakázaný pás), která roste s poměrem hmotností  $M/m$ . Je rovněž zajímavé vypočítat poměr amplitud  $A/B$ , respektive  $B/A$ . Frekvence ze vztahu (3.4.25) dosadíme do (3.4.23), výsledek je na obr. 3.4.4. Pro akustickou větev jsou obě amplitudy kladné (částice kmitají na stejnou stranu) a platí  $A \geq B$  (těžší částice kmitají více než ty lehčí). Pro optickou větev mají

amplitudy různá znaménka (částice kmitají v opačném směru) a platí  $|A| < |B|$  (lehké částice kmitají více než těžké).

Výběrové pravidlo pro  $k$  je stejné jako v případě jednočásticového řetězce (3.4.17)

$$k_n L = n\pi \quad (3.4.26)$$

s tím, že  $n=0,1,2,\dots,2N+1$  a současně platí  $L=a(2N+1)$ . Graf na obr. 3.4.4 by mohl být v intervalu  $(0, \pi/a)$ , ale je zřejmé, že je symetrický kolem hodnoty krajní hodnoty  $\pi/a$  a tedy všechna informace je už v grafu v intervalu  $(0, \pi/2a)$ . Někdy je zvykem tento graf uvádět v intervalu  $(-\pi/2a, \pi/2a)$ .



Obr. 3.4.4. Závislost frekvence na  $k$  pro dvoučásticový řetězec ( $m=1, M=2$ ) a jejich poměr amplitud.

Je vhodné explicitně uvést výpočet dovolených frekvencí pro  $k=0$  a  $k=\pi/2a$ , pak pro  $k=0$ :

$$\omega_+ = \frac{2T_0}{a} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \quad \omega_- = 0 \quad (3.4.27)$$

$k=\pi/2a$ :

$$\omega_+ = \frac{2T_0}{am} \quad \omega_- = \frac{2T_0}{aM} \quad \Delta = \omega_+ - \omega_- = \frac{2T_0}{a} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{M} \right) \quad (3.4.28)$$

kde  $\Delta\omega$  je šířka zakázaného intervalu (pásu) frekvencí.

### Konečný řetězec - jednočásticový- podélné kmity

V tomto případě studujeme podélné kmity řetězce, viz obr. 3.4.1., případně v detailu obr. 1.6.1. Značení zůstává stejné, jen  $\psi$  je podélná výchylka a písmenem  $K$  označíme tuhost pružin. Analogicky  $k$  (3.4.1) platí pohybová rovnice ve tvaru

$$m\ddot{\psi}_n(t) = -\zeta(\psi_n - \psi_{n+1}) - K(\psi_n - \psi_{n-1}) = K(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) \quad (3.4.29)$$

Je to prakticky stejná rovnice, jen veličina  $T_0/a$  je zaměněna za  $K$ . Postup je zcela podobný a proto můžeme hned psát výsledné vztahy. Disperzní vztah bude mít tvar

$$\omega = \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (3.4.30)$$

Pro výběrové pravidlo

$$k_n L = n\pi \quad (3.4.31)$$

je disperzní vztah

$$\omega_n = \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{k_n a}{2} \quad (3.4.32)$$

Jedna z možných aplikací jsou např. akustické vlny.

### Konečný řetězec – dvoučásticový – podélné kmity.

Celý proces analogického postupu je možné opakovat i v tomto komplikovanějším případě. Výsledky jsou prakticky stejné, jen je nutné opět výraz  $T_0/a$  nahradit tuhostí pružiny  $K$ .

### Řetězec vázaných kyvadel.

Studujme případ řetězce matematických kyvadel (délka závěsu  $l$ ), které jsou navzájem svázané slabými pružinami. Pohybová rovnice bude mít tvar

$$m \ddot{\psi}_n(t) = -n \frac{g}{l} \psi_n - K (\psi_n - \psi_{n+1}) - K (\psi_n - \psi_{n-1}) = -n \frac{g}{l} \psi_n + K (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) \quad (3.4.33)$$

Odvozování je obdobné jako v předešlých případech. Disperzní vztah dostaneme ve tvaru

$$\omega = \frac{g}{l} + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (3.4.34)$$

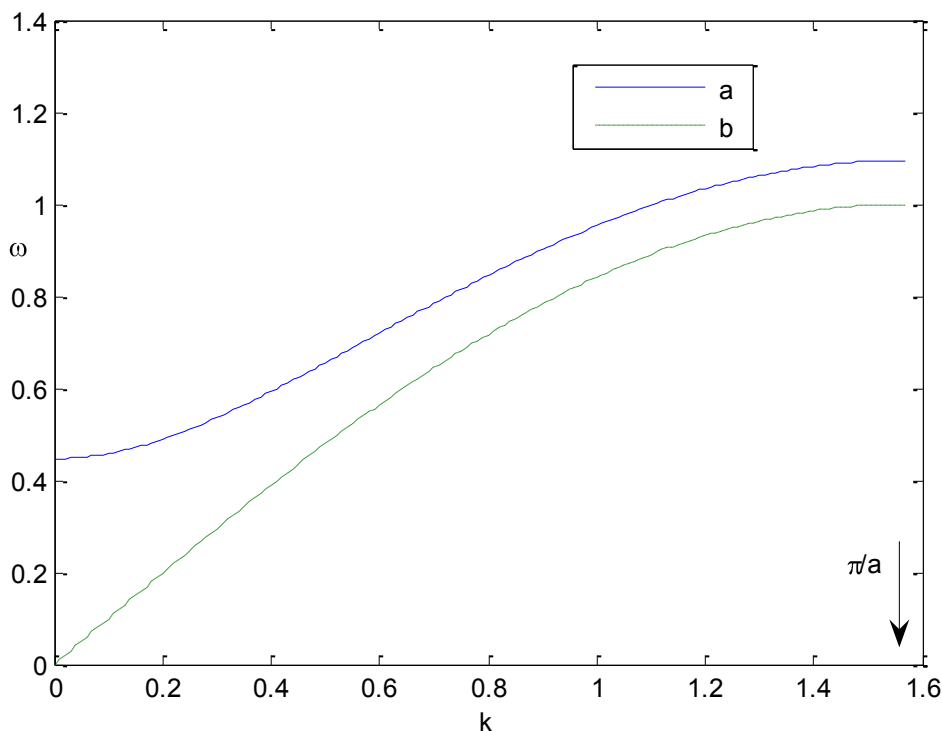
Pro okrajovou podmínku

$$k_n L = n\pi \quad (3.4.35)$$

získáme

$$\omega_n = \frac{g}{l} + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{k_n a}{2} \quad (3.4.36)$$

Disperzní vztah je na obr. 3.4.5.



Obr. 3.4.5. Disperzní vztah (a) (3.4.34) pro řetězec kyvadel, (b) vztah (3.4.30) pro podélné kmity jednočásticového řetězce.

Připomeňme si vztahy (1.4.7), kdy pro vlastní frekvenci matematického kyvadla platí

$$\omega_{v1} = \frac{g}{l} \quad (3.4.37)$$

a pro kmitající těleso na pružině (1.2.3)

$$\omega_{v2} = \frac{K}{m} \quad (3.4.38)$$

Pak

$$\omega = \omega_{v1} + 4\omega_{v2} \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (3.4.39)$$

a pro  $ka \ll 1$

$$\omega = \omega_{v1} + \omega_{v2} a^2 k^2 \quad (3.4.40)$$

což je častý tvar disperzní vztahu (analogii lze např. vidět v energii elektronů v kvantové mechanice).

Uvedené příklady řetězců jsou typické a lze dále podobnou cestou studovat komplikovanější případy, jako je střídání spirál s různou tuhostí, střídání hmotností u kyvadel atd.



## 4. Kmity v 3dm prostoru

### 4.1. Stojaté vlny v dutině

Zobecníme dosavadní úvahy na 3dm prostor. Zvolíme příklad chování vln v dutině tvaru kvádrů s hranami a,b,c a ve speciálním případě krychle o hraně L.

Pro 1dm platí vlnová rovnice ( 3.1.12 )

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial z^2} \quad (4.1.1)$$

Kterou ve třech dimenzích pro  $\psi(x, y, z, t)$  napíšeme ve tvaru

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = K \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4.1.2)$$

Kde K vystihuje objemové vlastnosti dutiny (současně  $K=v^{-2}$ , kde v je rychlost vlnění)  
Hledáme řešení ve tvaru

$$\psi(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos(\omega t + \phi) \quad (4.1.3)$$

Po dosazení druhých derivací dostaneme

$$\nabla^2 A = -\zeta \omega^2 A \quad (4.1.4)$$

Řešení hledáme pomocí separací proměnných a předpokládáme

$$A(x, y, z) = A_x(x)A_y(y)A_z(z) \quad (4.1.5)$$

Dosazením druhých derivací dostaneme

$$A_y A_z \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + A_x A_z \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + A_y A_x \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\zeta \omega^2 A_x A_y A_z \quad (4.1.6)$$

nebo

$$\frac{1}{A_x} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{1}{A_y} \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{1}{A_z} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\zeta \omega^2 = \text{konst} \quad (4.1.7)$$

Každý člen nalevo je funkcí pouze jedné souřadnice, napravo je konstanta, proto každý člen nalevo je rovněž roven konstantě, které jsou obecně různé.

$$\frac{1}{A_x} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = -k_x^2 \quad \frac{1}{A_y} \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} = -k_y^2 \quad \frac{1}{A_z} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -k_z^2 \quad (4.1.8)$$

Kde

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = K\omega^2 \quad (4.1.9)$$

Rovnice ( 4.1.8 ) jsou podobné rovnici oscilátoru, řešení hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} A_x &= A_{x0} \sin(k_x x) + B_{x0} \cos(k_x x) \\ A_y &= A_{y0} \sin(k_y y) + B_{y0} \cos(k_y y) \\ A_z &= A_{z0} \sin(k_z z) + B_{z0} \cos(k_z z) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Okrajové podmínky jsou obdobné jako dříve. Po řadě pro  $x,y,z=0$  a  $x,y,z=L$  musí být  $A_x, A_y, A_z=0$ , pak  $B_{x0}, B_{y0}, B_{z0}=0$  a konečně

$$\begin{aligned} k_x L &= n_x \pi & \text{nebo} & & k_x a &= n_x \pi \\ k_y L &= n_y \pi & \text{nebo} & & k_y b &= n_y \pi \\ k_z L &= n_z \pi & \text{nebo} & & k_z c &= n_z \pi \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Pak

$$A(x, y, z) = A_x(x)A_y(y)A_z(z) = A_{x0}A_{y0}A_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (4.1.12)$$

Kde každé  $k_x, k_y, k_z$  má svoje výběrové pravidlo (4.1.11).

Pro fyzikální veličiny závislé na celkové hodnotě  $k$ , respektive  $k^2$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (4.1.13)$$

Např. energie elektronu v kvantové jámě – dutině je dána vztahem

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (4.1.14)$$

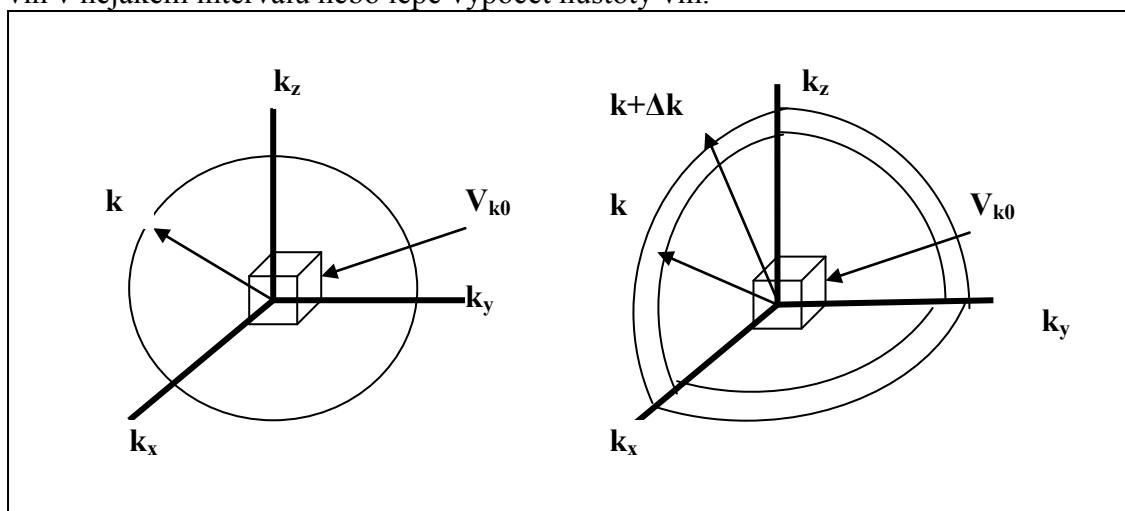
Jednotlivé hodnoty  $k^2$  nebo energie  $E$  dostaneme volbou kombinace celých čísel  $n_x, n_y, n_z$  – viz tab. 4.1.1.

$n_x$	$n_y$	$n_z$	$\sum n_i^2$	deg.
1	1	1	3	
1	1	2	6	3x
1	2	1	6	
2	1	1	6	
1	2	2	9	3x
2	1	2	9	
2	2	1	9	
1	1	3	11	3x
1	3	1	11	
3	1	1	11	
1	2	3	14	6x
...				

Tab. 4.1.1.

## 4.2. Počet stojatých vln

Uvedená výběrová pravidla umožňují výpočet řady diskretních veličin, které určují příslušné módy, respektive stojaté vlny. Zajímavým a důležitým problémem je určení celkového počtu vln v nějakém intervalu nebo lépe výpočet hustoty vln.



Obr. 4.2.1.  $k$  – prostor,  $1/8 k$  prostoru.

Předpokládáme opět krychli o hraně  $L$ . V  $k$  prostoru – viz obr.4.2.1., kde hodnoty  $k$  jsou samozřejmě diskretní, každý bod zaujme prostor  $V_{k0}$  (nejmenší možný,  $n_x = n_y = n_z = 1$ )

$$V_{k_0} = \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 \quad (4.2.1)$$

Pak počet bodů (stavů) v kouli o poloměru  $k$  (pouze pro kladná  $k_x, k_y, k_z$  a tedy v osmině koule) je

$$N(k) = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 \frac{1}{V_{k_0}} = \frac{L^3}{6\pi} k^3 = \frac{V}{6\pi} k^3 \quad (4.2.2)$$

Kde  $V$  je objem zvolené krychle. Pro počet bodů (stavů) v intervalu  $(k, k+dk)$  dostaneme

$$g(k)dk = \frac{dN}{dk} dk = \left( \frac{V}{2\pi} \right) k^2 dk \quad (4.2.3)$$

Kde  $g(k)$  je tzv. hustota stavů. Stejný vztah dostaneme známou úvahou, že je to počet bodů (stavů) mezi dvěma koulemi o poloměrech  $k$  a  $k+dk$

$$g(k)dk = \frac{1}{8} 4\pi \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 \frac{1}{V_{k_0}} dk = \left( \frac{V}{2\pi} \right) k^2 dk \quad (4.2.4)$$

Pro konkrétní výpočty je nutné znát závislost hledané veličiny na  $k$ , např. disperzní vztahy typu (3.2.7), (3.2.8) nebo již zmíněnou závislost energie elektronu na  $k$  (4.1.14)

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (4.2.5)$$

Pak

$$N(E) = \frac{V}{6\pi} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{3/2} \quad (4.2.6)$$

$$N(\omega) = \frac{V}{6\pi} \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{3/2} \omega^{-1/2} \quad (4.2.7)$$

$$g(E)dE = \frac{3}{2} \left( \frac{V}{6\pi} \right) \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE \quad (4.2.8)$$

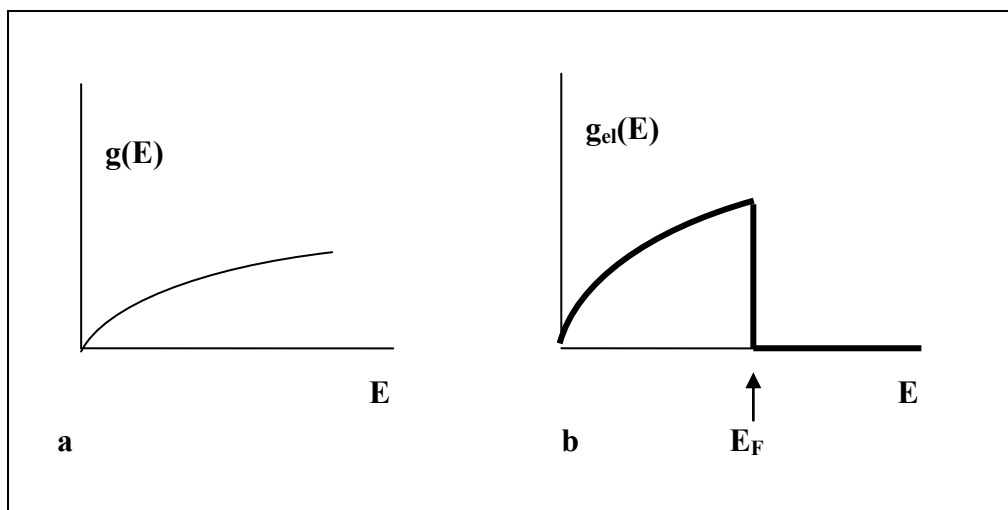
$$g(\omega)d\omega = \frac{3}{2} \left( \frac{V}{6\pi^2} \right) \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{3/2} \omega^{-1/2} d\omega \quad (4.2.9)$$

To jsou nepochybně důležité vztahy udávající počet stavů v intervalu  $d\omega$  nebo  $dE$ . Doplňme náš příklad o chování elektronů v krystalu. Tam všechny elektrony při teplotě absolutní nuly obsadí ty nejnižší stavy, ten poslední se jmenuje Fermiho mez  $E_F$ . Navíc podle Pauliho principu je každý stav obsazen dvěma elektrony (s různými spiny). Pak pro počet elektronů  $N_{el}$  v intervalu  $dE$  na energiových hladinách, respektive hustotu elektronů  $g_{el}$ , dostaneme

$$g_{el}(E)dE = 2 \frac{V}{4\pi} \left( \frac{2m_{el}}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE \quad E \leq E_F \quad (4.2.10)$$

$$g_{el}(E)dE = 0 \quad E > E_F$$

Funkce jsou na obr.4.2.2.



Obr. 4.2.2. a) hustota stavů v obecném případě, b) hustota stavů v případě kovu.

## 5. Reálný oscilátor

### 5.1. Tlumený oscilátor, vynucené kmity

Dosud jsme popisovali oscilátor bez vnitřního tření a bez působení dalších vnějších sil, ovšem s výjimkou vratné síly. V reálných případech tření nelze zanedbat, výsledkem jsou tlumené kmity nebo dokonce nepřítomnost kmitavého pohybu. Rovněž působení vnějších sil a tedy vznik vynucených kmitů je velmi časté.

Předpokládáme pro jednoduchost těleso o hmotnosti  $m$ , zavěšené na spirále s tuhostí  $K$  a kmitající ve směru  $x$ . Pohybová rovnice pro netlumený oscilátor s vlastní frekvencí  $\omega_0$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad \text{nebo} \quad m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0 \quad (5.1.1)$$

Pohybová rovnice v obecnějším případě má tvar

$$m\ddot{x} + m\Gamma \dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (5.1.2)$$

Kde nový člen  $m\Gamma \dot{x}$  je síla tření, ukazuje se v praxi, že je dobře úměrná rychlosti,  $\Gamma$  je koeficient tření,  $F(t)$  je obecná vnější síla.

Pro jednoduchost zvolme případ bez vnější síly, pak

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.1.3)$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (5.1.4)$$

Názorně můžeme rovnici řešit substitucí

$$x = ze^{-\gamma t/2} \quad (5.1.5)$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\ddot{z} = -\left(\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}\right)z \quad \text{nebo} \quad \ddot{z} = -\omega_1^2 z \quad (5.1.6)$$

Což je rovnice podobná netlumenému oscilátoru s frekvencí  $\omega_1$ . Po dosazení

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (5.1.7)$$

Máme tedy kmit s tlumenou amplitudou  $Ae^{-\gamma t/2}$  a s frekvencí

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{4\omega_0^2}} \quad (5.1.8)$$

Místo veličiny  $\Gamma$  se někdy používá  $\tau = 1/\Gamma$ , což je doba za kterou amplituda klesne  $e$  krát.

Rozlišme tři možné případy:

1. Slabě tlumený oscilátor :  $\Gamma, 2 \ll \omega_0$ , pak

$$\omega_1 = \omega_0 \quad x(t) = Ae^{-\Gamma t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.1.9)$$

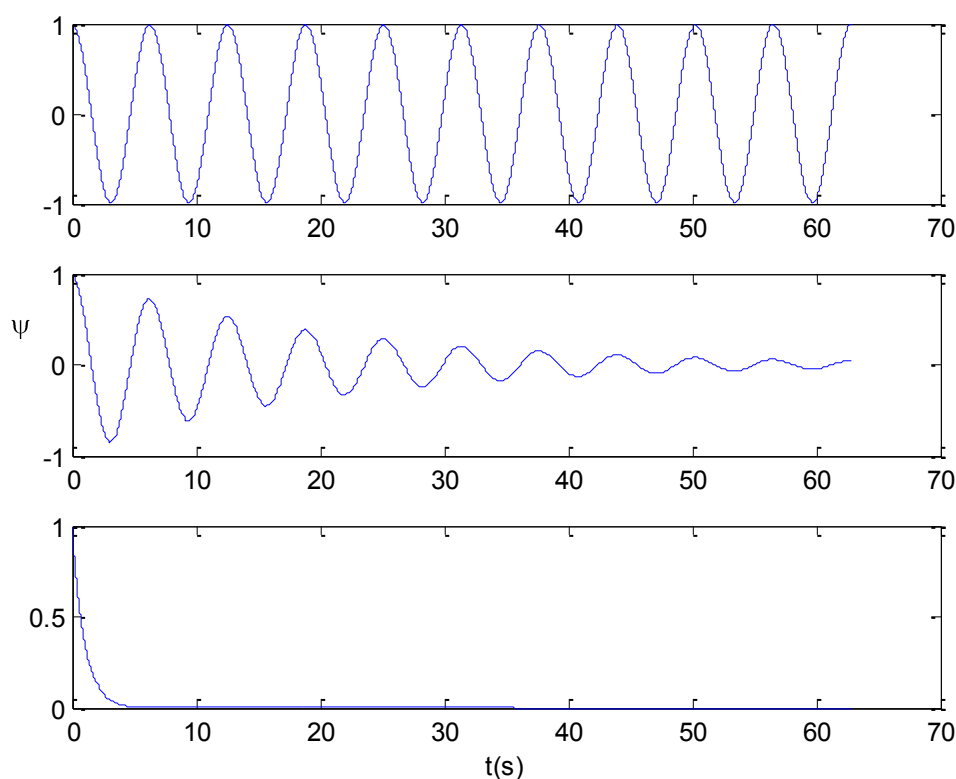
Jedná se o kmit se slabě klesající amplitudou s časem a kmitající s frekvencí netlumeného oscilátoru  $\omega_0$ , viz obr.5.1.1.

2. Kriticky tlumený oscilátor :  $\Gamma, 2 = \omega_0$ , pak

$$\omega_1 = 0 \quad x(t) = Ae^{-\Gamma t/2} \cos(\varphi_0) = Ae^{-\Gamma t/2} \cos(\varphi_0) \quad (5.1.10)$$

Pak oscilátor přestává kmitat a amplituda klesá k nule, jedná se o tzv. kritický kmit, viz obr. . Tyto podmínky mají dobrý smysl pro zastavení kmitající soustavy.

3. Silně tlumený oscilátor :  $\Gamma, 2 \gg \omega_0$ . Řešení je v oboru komplexních čísel, zřejmě se jedná o nekmitající případ se silně tlumenou amplitudou. Z pohledu studia kmitů je to ne příliš zajímavý případ.



Obr. 5.1.1. Oscilátor: netlumený  $\omega_0 = 1s^{-1}$ ,  $\Gamma = 0$ , slabě tlumený  $\Gamma = 0.1s$ , kriticky tlumený  $\Gamma = 2s$ .

### Kmity tlumeného elektrického obvodu

Pro jednoduchý sériový obvod složený z kondenzátoru s kapacitou C a cívky, indukčností L a odporem R platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$U_L + U_R + U_C = -L \frac{dj}{dt} + Rj + \frac{q}{C} = 0 \quad (5.1.11)$$

Analogicky ke vztahu (1.5.7) dostaneme

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (5.1.12)$$

a tedy obvod bude kmitat s vlastní frekvencí  $\omega$  podle (5.1.8), kde

$$\omega = \left( \frac{1}{LC} \right)^{1/2} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 \quad \omega_0 = \frac{1}{LC} \quad \Gamma = \frac{R}{L} \quad (5.1.13)$$

Pro slabě tlumený obvod musí platit  $R \ll L$  a pro kriticky tlumený  $R=2/C$ .

### Tlumené kmity plazmatu – srážky

V reálném případě vzniku plazmatu dochází ke srážkám především elektronů s ionty. Při takové srážce ztratí elektron část své rychlosti. Dobu mezi dvěma srážkami označíme  $\tau_c$ . Pak relativní rychlost poklesu aktivních elektronů bude

$$-\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = \frac{1}{\tau_c} = \Gamma \quad (5.1.14)$$

Výsledná pohybová rovnice je

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0 z = 0 \quad (5.1.15)$$

### 5.2. Energie slabě tlumeného oscilátoru

Předpokládáme, že člen  $e^{-\Gamma t/2}$  je téměř konstantní během jednoho cyklu a pak celková energie oscilátoru

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0 x^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0 e^{-\Gamma t} \quad (5.2.1)$$

Energie oscilátoru klesá s časem, zbytek energie se zpravidla mění třením v tepelnou energii. Pak pro relativní rychlost energetických ztrát dostaneme

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \Gamma \quad (5.2.2)$$

Pro charakterizaci tlumeného pohybu se zavádí činitel jakosti  $Q$  ( $2\pi$  násobek poměru celkové energie ke ztrátám za jednu periodu  $T$ )

$$Q = 2\pi \frac{E}{T dE/dt} = \frac{\omega_0}{\Gamma} \quad (5.2.3)$$

který je nepřímo úměrný koeficientu tření  $\Gamma$  a přímo úměrný frekvenci. Je výhodný v technické praxi.

### 5.3. Slabě tlumený oscilátor s vnější silou

V dosti obecném případě uvažujeme  $F(t)$  ve tvaru Fourierovy řady

$$F(t) = \sum_N (\omega_n) \cos(\omega_n t + \Phi_n) \quad (5.3.1)$$

V našem případě se spokojíme s řešením pro jednoduchou harmonicky se měnící sílu

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (5.3.2)$$

Pak pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{x} + m\Gamma \dot{x} + m\omega_0 x = F_0 \cos(\omega t) \quad (5.3.3)$$

Hledáme řešení ustálené po době  $t \gg 1/\Gamma$ . Vycházíme ze zkušenosti, že soustava bude kmitat s frekvencí vnější síly  $\omega$  a hledáme řešení ve tvaru

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (5.3.4)$$

Po dosazení do (5.3.3) a z podmínky, že řešení musí platit v libovolném čase (např.  $t=0$ ,  $\omega = \pi/2$ ) dostaneme

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2 \omega_0^2} = A_{\text{abs}} \quad (5.3.5)$$

$$B = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2 \omega_0^2} = A_{\text{disp}} \quad (5.3.6)$$

Smysl označení  $A=A_{\text{abs}}$  (absorpce),  $B=A_{\text{disp}}$  (disperze) se ukáže později při studiu optických vlastností látek.

Rovněž lze předpokládat řešení v ekvivalentním tvaru

$$x(t) = A' \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.3.7)$$

Pak platí

$$A'^2 = A^2 + B^2 \quad \text{tg}(\varphi) = -\frac{A}{B} \quad (5.3.8)$$

Po dosazení dostaneme

$$A' = \frac{F_0}{m} \left\{ \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2 \omega_0^2} \right\}^{1/2} \quad (5.3.9)$$

$$\text{tg}(\varphi) = -\frac{A}{B} = -\frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega} \quad (5.3.10)$$

Odtud snadno dostaneme vztahy pro rychlost a zrychlení

$$v(t) = v_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega A' \cos(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t) - \omega B \sin(\omega t) \quad (5.3.11)$$

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A' \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A \sin(\omega t) - \omega^2 B \cos(\omega t) \quad (5.3.12)$$

Tvar závislostí  $A$ ,  $B$  respektive  $A_{\text{abs}}$ ,  $A_{\text{disp}}$  v závislosti na frekvenci je na obr.5.5.1. Šířka křivky  $A_{\text{abs}}$  je určena především hodnotou koeficientu  $\Gamma$ . V případě  $\omega = \omega_0$  mluvíme o rezonanci.

Závislosti amplitudy  $A'$ ,  $v_0$ ,  $a_0$ ,  $\varphi$  na frekvenci jsou na obr.5.5.2. a 5.5.3.

V případě velmi malých frekvencí, kdy  $\omega \ll \omega_0$  platí

$$\varphi \cong 0 \quad A' \cong \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \quad x \cong \frac{F_0}{k} \cos(\omega t) \quad (5.3.13)$$

kde  $k$  je ve shodě s (1.2.2) tuhost pružiny, tedy pohyb při nízkých frekvencích určuje tuhost pružiny a nikoliv primárně hmotnost tělesa. Zrychlení tělesa je velmi malé a větší část síly se využije na napínání pružiny, nikoliv na překonávání setrvačnosti tělesa.

V opačném případě pro vysoké frekvence  $\omega \gg \omega_0$  a platí

$$\varphi \cong -\pi/2 \quad A' \cong \frac{F_0}{m\omega} \quad x \cong -\frac{F_0}{m\omega} \cos(\omega t) \quad (5.3.14)$$

Je výchylka zásadně ovlivněna hmotností a síla se spotřebuje na překonávání setrvačnosti tělesa, tomu odpovídá i posuv fáze o  $-\pi/2$ .

Poznámka: Pohybová rovnice tlumeného oscilátoru s vnější silou (5.3.2) je příkladem lineární nehomogenní diferenciální rovnice. V tomto případě platí princip superpozice v modifikované

podobě. Pokud  $\psi_1(t)$  je řešení takové rovnice s vnější silou  $F_1(t)$  a podobně  $\psi_2(t)$  s vnější silou  $F_2(t)$ , pak tato rovnice pro celkovou sílu

$$F(t) = F(t)_1 + F(t)_2 \quad (5.3.15)$$

má řešení

$$\Psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) \quad (5.3.16)$$

#### **5.4 Výkon tlumeného oscilátoru**

Výchylka a rychlost výchylky má tvar

$$x(t) = A_{\text{abs}} \sin(\omega t) + A_{\text{disp}} \cos(\omega t) \quad (5.4.1)$$

$$\dot{x}(t) = \omega A_{\text{abs}} \cos(\omega t) - \omega A_{\text{disp}} \sin(\omega t) \quad (5.4.2)$$

Výkon oscilátoru při působení vnější síly (absorbovaný výkon)

$$P(t) = F(t)\dot{x}(t) \quad (5.4.3)$$

Jeho střední hodnota

$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (5.4.4)$$

Protože

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0 \quad (5.4.5)$$

Platí

$$P = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{\text{abs}} \quad (5.4.6)$$

Tedy absorbovaný výkon je určen veličinou, kterou jsme označili  $A_{\text{abs}}$ . V ustáleném stavu musí být absorbovaný výkon roven rozptýlenému výkonu vlivem tření  $P_t$ . Protože síla tření je  $-n\Gamma \dot{x}(t)$  dostaneme

$$P_t(t) = -n\Gamma \dot{x}^2(t) \quad (5.4.7)$$

a střední hodnota

$$P_t = m\Gamma \langle \dot{x}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} m\Gamma \omega^2 (A_{\text{abs}}^2 + A_{\text{disp}}^2) \quad (5.4.8)$$

Přímým dosazením ze vztahů (5.3.5, 5.3.6) se přesvědčíme, že platí

$$P = P_t \quad (5.4.9)$$

Podobně jako pro slabě tlumený oscilátor bez vnější síly (5.2.1) můžeme pro střední energii v našem případě psát

$$E = \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2(t) \rangle + \frac{1}{2} m \omega_v^2 \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} m (\omega^2 + \omega_v^2) \left( \frac{1}{2} A_{\text{abs}}^2 + \frac{1}{2} A_{\text{disp}}^2 \right) \quad (5.4.10)$$

Pro případ  $\omega = \omega_v$  srovnáním se vztahem (5.4.8) dostaneme

$$P_t = \Gamma \dot{x}^2 \quad \text{nebo} \quad E = \tau P_t \quad (5.4.11)$$

#### **5.5. Rezonance**

V tomto případě se frekvence vnější síly rovná vlastní frekvenci netlumeného oscilátoru. Amplituda  $A_{\text{abs}}$  má maximální hodnotu. Pro výkon obecně platí (5.4.6)



$$P = \frac{1}{2} \omega \frac{F_0^2}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2 \omega} = P_0 \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2 \omega} \quad (5.5.1)$$

Kde  $P_0$  je výkon v rezonanci

$$P_0 = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{m \Gamma} \quad (5.5.2)$$

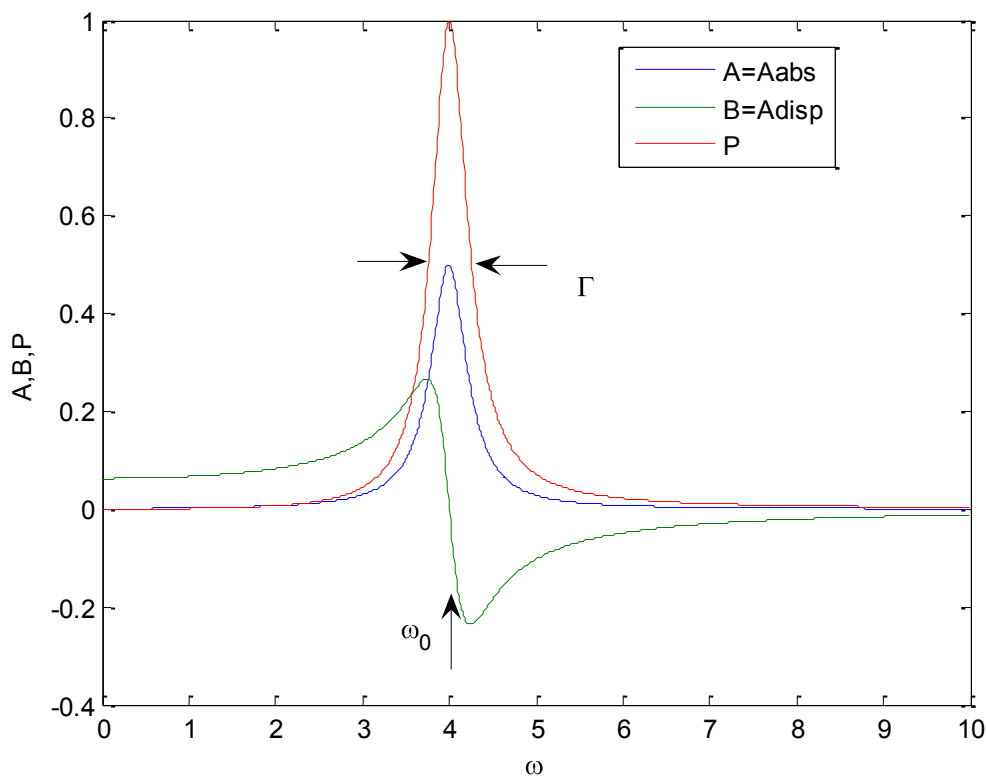
Závislost výkonu na frekvenci je na obr.5.5.1. V tomto případě najdeme snadno souvislost mezi šířkou křivky v polovině maximální hodnoty a parametrem  $\Gamma$ . V tomto případě platí

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma \omega \quad (5.5.3)$$

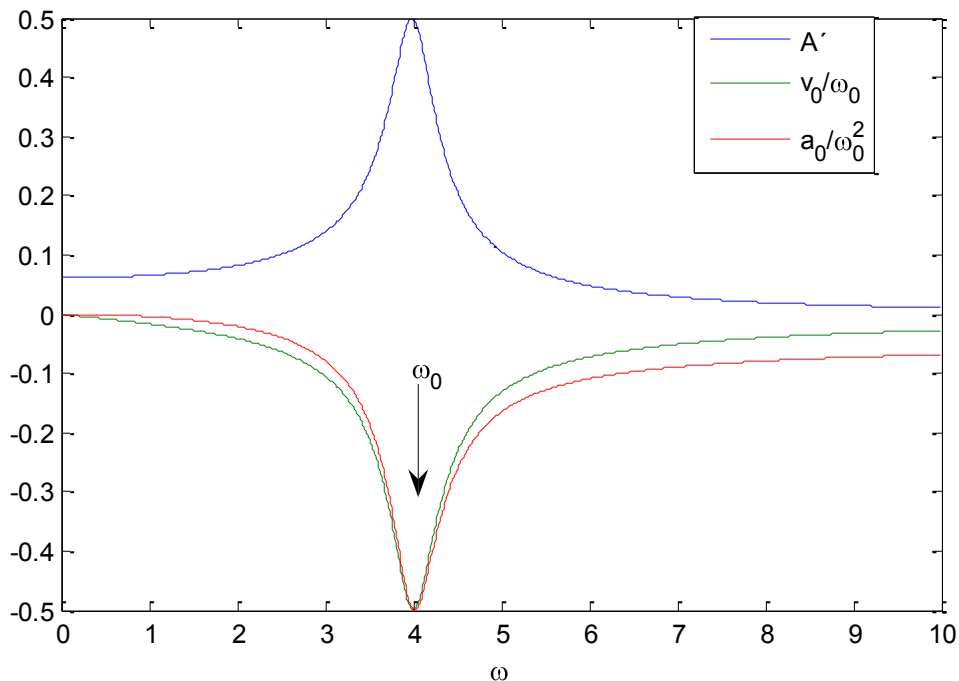
Vypočítáme kořeny  $\omega_+$ ,  $\omega_-$ , pro šířku křivky dostaneme

$$\Delta \omega = \omega_+ - \omega_- = \Gamma = \tau \quad (5.5.4)$$

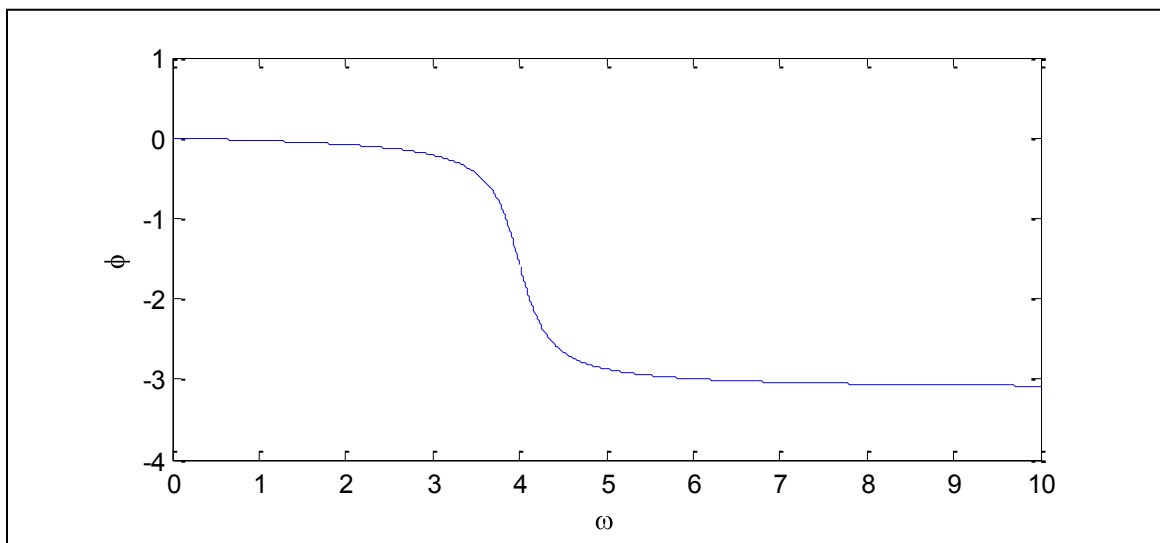
V případě rezonance je fáze  $\varphi = -\pi/2$ , tedy výchylka je zpožděna proti síle o tuto hodnotu, naopak rychlost je ve fázi s budící silou, zrychlení je rovněž posunuto proti síle o  $\varphi = -\pi/2$ .



Obr. 5.5.1. Závislost  $A_{abs}$ ,  $A_{disp}$ , výkonu  $P$  na frekvenci pro  $\omega_0 = 4s^{-1}$  a  $\Gamma = 0.5s$  ( $F_0/m = 1$ )



Obr. 5.5.2. Amplitudy  $A'$ ,  $v_0/\omega_0$ ,  $a_0/\omega_0^2$  v závislosti na frekvenci, parametry jako na obr. 5.5.1.



Obr. 5.532. Fáze  $\varphi$  v závislosti na frekvenci, parametry jako na obr. 5.5.1.

Poznámka: V případě současného působení více sil nebo působení neharmonické síly vyjeme ze vztahu (5.3.1)

$$F(t) = \sum_N F_n \cos(\omega_n t + \Phi_n) = \sum_N F_n(t) \quad (5.5.5)$$

Pak pro každou sílu  $F_n$  působící samostatně hledáme řešení ve tvaru

$$x_n(t) = A'_n \cos(\omega_n t + \rho_n + \Phi_n) \quad (5.5.6)$$

Podle principu superpozice bude výsledné řešení

$$x(t) = \sum_N x_n(t) \quad (5.5.7)$$

## Elektrický obvod se zdrojem střídavého napětí

Jako v předcházejícím případě předpokládáme sériový RLC obvod, navíc se střídavým zdrojem napětí  $V_0 \cos(\omega t)$ , které se nemění při změně zátěže. Pak analogicky k (1.5.11-13) platí pro napětí na jednotlivých částech obvodu

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \cos(\omega t)$$

Rovnici upravíme standardním způsobem

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \ddot{q} + \Gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{V_0}{L} \cos(\omega t)$$

Řešení této a předcházející rovnice dovoluje podrobnou diskusi chování takového obvodu z hlediska měření napětí a fází na jednotlivých prvcích obvodu v řadě aplikací.

## Optické vlastnosti prostředí

I když tato problematika spadá do oblasti kvantové fyziky ukazuje se, že v celé řadě případů je možné s dostatečnou přesností řešit úlohu klasicky a nahradit prostředí kmitajícími dipóly v dopadajícím elektrickém poli  $E_0 \cos(\omega t)$  s frekvencí  $\omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Podrobně se tomuto tématu budeme věnovat v kapitole IV.

### 5.6. Tlumený systém se dvěma stupni volnosti.

Podobně postupujeme ve složitějších případech. Zvolme tlumenou soustavu dvou matematických kyvadel spojených slabou pružinou, viz. obr.5.6.1. Můžeme předpokládat, že v každém módu se soustava podobá tlumenému harmonickému oscilátoru s příslušným tlumením  $\Gamma$ . Pro jednotlivá tělesa a, b platí

$$m\ddot{\psi}_a = -\frac{mg}{l}\psi_a - K(\psi_a - \psi_b) - n\Gamma\dot{\psi}_a + F_0 \cos(\omega t) \quad (5.6.1)$$

$$m\ddot{\psi}_b = -\frac{mg}{l}\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) - n\Gamma\dot{\psi}_b \quad (5.6.2)$$

Připomeneme dřívější výsledky pro  $F_0=0$ ,  $\Gamma=0$

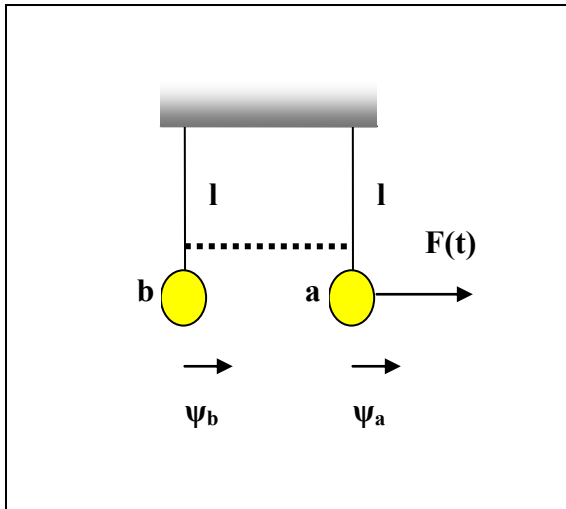
$$1. \text{ mód} \quad \psi_a = \psi_b \quad \omega_1 = \frac{g}{l} \quad \psi_1 = (\psi_a + \psi_b) \quad (5.6.3)$$

$$2. \text{ mód} \quad \psi_a = -\psi_b \quad \omega_2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m} \quad \psi_2 = (\psi_a - \psi_b) \quad (5.6.4)$$

Rovnice pro výchylky módů dostaneme sečtením, respektive odečtením rovnic (5.6.1, 5.6.2)

$$m\ddot{\psi}_1 = -\frac{mg}{l}\psi_1 - n\Gamma\dot{\psi}_1 + F_0 \cos(\omega t) \quad (5.6.5)$$

$$m\ddot{\psi}_2 = -n\left[\frac{g}{l} + \frac{2K}{m}\right]\psi_2 - n\Gamma\dot{\psi}_2 + F_0 \cos(\omega t) \quad (5.6.6)$$

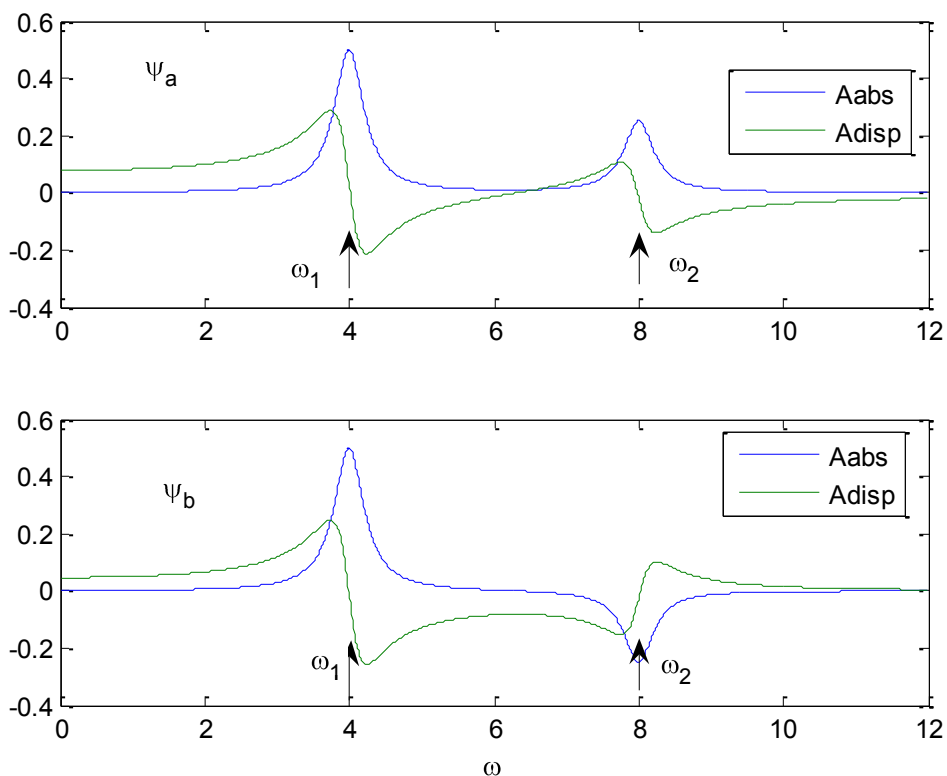


Obr. 5.6.1. Tlumená soustava s dvěma stupni volnosti a vnější silou.

Ve shodě s (5.3.3) se chová soustava v 1. módu (amplitudy mají stejné znaménko) jako tlumený oscilátor s hmotností  $m$ , pružností  $m\omega_1$ , koeficientem tlumení  $\Gamma$  a vnější silou  $F_0 \cos(\omega)$ , ve 2. módu (amplitudy mají opačná znaménka, tělesa kmitají proti sobě) analogicky s pružností  $m\omega_2$ , oba módy mají svoje amplitudy  $A_{abs}$  a  $A_{disp}$  (obr. 5.6.2.). Pro jednotlivá kyvadla a, b platí

$$\psi_a = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \quad \psi_b = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) \quad (5.6.7)$$

Pro složitější soustavy se postupuje analogicky.



Obr. 5.6.2. Amplitudy soustavy se dvěma stupni volnosti (obr.5.6.1.) s frekvencemi  $\omega_1=4s^{-1}$ ,  $\omega_2=8s^{-1}$ ,  $\Gamma=0.5s$ .

## 5.7. Anharmonické kmity

Dosud jsme se zabývali harmonickými kmity, kdy vratná síla byla přímo úměrná výchylce ( $F = -kx$ ), jednalo se o lineární systémy.

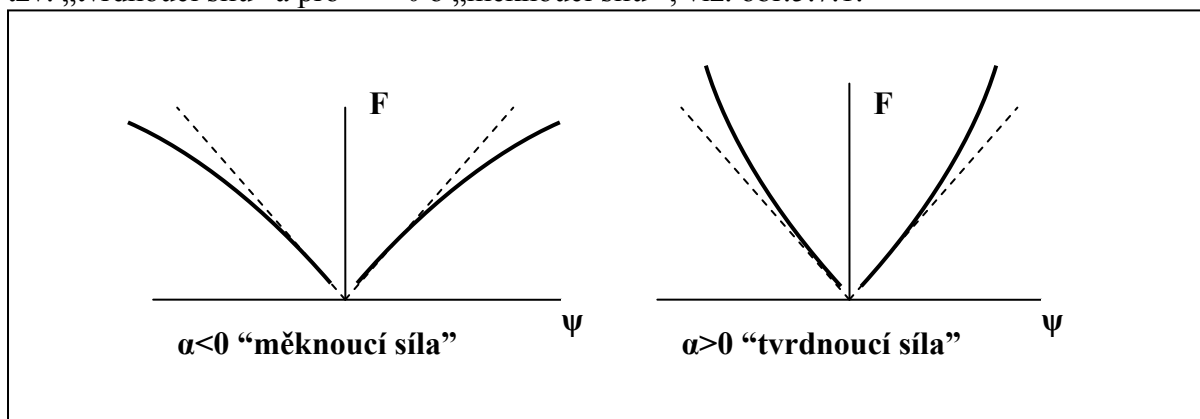
V případě složitější závislosti síly na výchylce se jedná o tzv. anharmonické kmity a nelineární systémy. Obecně je to složitý problém, zvláště při působení vnějších sil, ale omezíme se na malé kmity, na běžné případy a vnější síly neuvažujeme.

### Symetrická vratná síla

Taková vratná síla má např. tvar

$$F = -(1 + \alpha \psi^2)K\psi \quad (5.7.1)$$

Předpokládáme  $|\alpha \psi^2| \ll 1$ , tedy slabou nelinearitu,  $K$ ,  $\alpha$  jsou konstanty. Pro  $\alpha > 0$  se jedná o tzv. „tvrdnoucí sílu“ a pro  $\alpha < 0$  o „měknoucí sílu“, viz. obr.5.7.1.



Obr. 5.7.1. Symetrická vratná síla (čárkovaně je lineární závislost).

Pak pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{\psi} = -(1 + \alpha \psi^2)K\psi \quad (5.7.2)$$

Použijeme-li formálně označení  $\omega_0 = k/m$ , pak

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi + \alpha \omega_0^2 \psi^3 = 0 \quad (5.7.3)$$

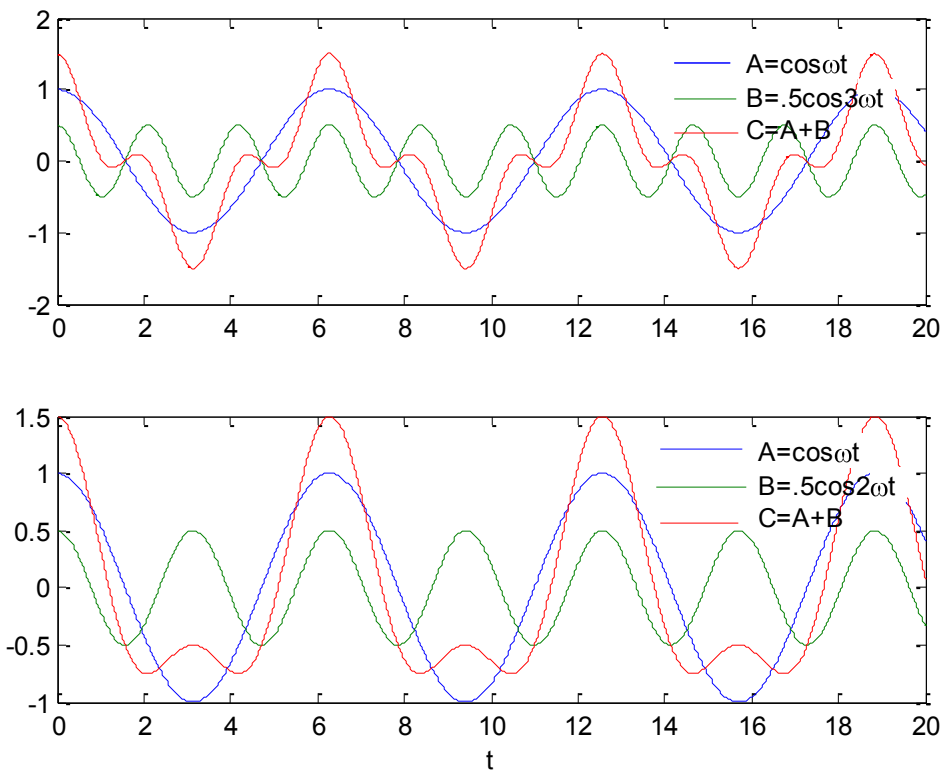
Předem lze odhadnout, že pohyb bude periodický a vzhledem k symetrii vratné síly i symetrický kolem rovnovážné polohy  $\psi = 0$ . Předpokládáme řešení ve tvaru

$$\psi = \sum_n a_n \cos(n\omega + \rho_n) \quad (5.7.4)$$

Kde  $n$  je celé číslo. Protože sudé násobky frekvence nesplňují požadavek symetrie, budou n lichá čísla. Lze rovněž odhadnout, že pro „tvrdnoucí sílu“ bude frekvence větší a pro „měknoucí sílu“ nižší. Jedním z příkladů „měknoucí síly“ je matematické kyvadlo pro větší výchylky (1.4.2,1.4.3). Možný průběh výchylky na čase je na obr.5.7.2.

Za zmínku stojí srovnání rovnice (5.7.3) s rovnicí pro zpřesněný výpočet pohybu matematického kyvadla

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \psi - \frac{g}{l} \frac{1}{3!} \psi^3 = 0 \quad (5.7.3)$$

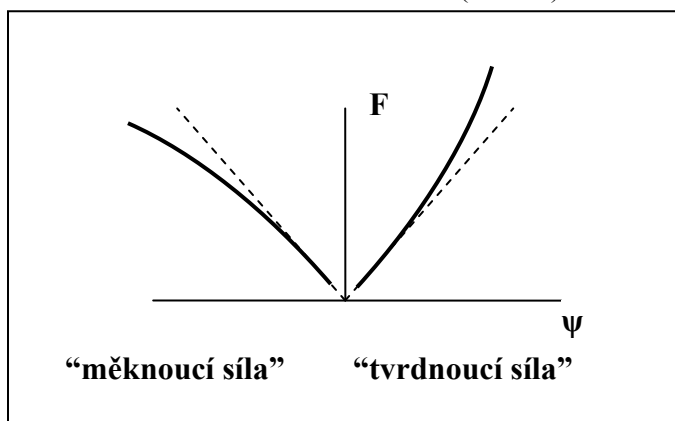


Obr. 5.7.2. Průběh výchylky pro případ „symetrické“ a „asymetrické“ vratné síly.

### Asymetrická vratná síla

Taková síla, viz. obr.5.7.3., má např. tvar

$$F = -(1 + 3\psi)K\psi = -\zeta\psi - \kappa\beta\psi^2 \quad (5.7.5)$$



Obr. 5.7.3. Asymetrická vratná síla.

Pohybová rovnice bude mít tvar

$$m\ddot{\psi} = -(1 + 3\psi)K\psi = -\zeta\psi - \kappa\beta\psi^2 \quad (5.7.6)$$

Použijeme-li opět označení  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , pak

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi + \omega_0^2\beta\psi^2 = 0 \quad (5.7.7)$$

Předpokládáme řešení ve tvaru

$$\Psi = A_0 + \sum_n A_n \cos(n\omega + \varphi_n) \quad (5.7.8)$$

Možný průběh výchylky na čase je na obr.5.7.2. Lze odhadnout že, řešení obsahuje sudé i liché frekvence, posune se rovnovážná poloha a odchylka od frekvence  $\omega_0$  bude malá, protože se částečně kompenzuje vliv tvrdnoucí a měkknoucí síly. Příkladem takové asymetrické síly je působení sil mezi atomy, viz. obr.1.5.1., při stlačování se jedná o „tvrdnoucí“ a při roztahování o „měkknoucí“ sílu.

Poznámka:

Nelineární síly přinášejí v řešení řadu komplikací a nových jevů. Zmíníme se o dvou a to je rezonance na subharmonických frekvencích a rezonance na kombinačních frekvencích.

### 1. Subharmonické rezonanční frekvence.

Předpokládáme slabě nelineární pružinu, kde celkovou vratnou sílu  $F_v$  lze vyjádřit ve formě mocniné řady

$$F_v = K_1 \Psi + K_2 \Psi^2 + K_3 \Psi^3 + \dots = \sum_n K_n \Psi^n \quad (5.7.9)$$

Takovému případu odpovídá lineární pružina, na kterou působí nelineární síla

$$F_v = a_1 F + a_2 F^2 + a_3 F^3 + \dots = \sum_n a_n F^n \quad (5.7.10)$$

Kde s rostoucím  $n$  koeficienty  $a_n$  rychle klesají. Dále předpokládáme harmonický tvar

$$F = F_0 \cos(\omega t)$$

Pak

$$F_c = a_1 F_0 \cos(\omega t) + a_2 F_0^2 \left[ \frac{1}{2} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right] + a_3 F_0^3 \left[ \frac{1}{4} \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} \cos(\omega t) \right] + \dots = \sum_n a_n F_0^n \cos(n\omega t) \quad (5.7.11)$$

Rezonanční podmínku  $\omega = \omega_0$  je možné nahradit

$$n\omega = \omega_0 \rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{n} \quad (5.7.12)$$

a lze tedy očekávat slabší rezonanci na subharmonických frekvencích.

### 2. Rezonance na kombinačních frekvencích

Opět předpokládáme slabě nelineární pružinu a vnější sílu ve tvaru

$$F = F_{01} \cos(\omega_1 t) + F_{02} \cos(\omega_2 t) \quad (5.7.13)$$

A celkovou sílu ve tvaru (5.7.10) pouze pro  $n=1$  a  $n=2$ . Tedy

$$F_c = a_1 [F_{01} \cos(\omega_1 t) + F_{02} \cos(\omega_2 t)] + a_2 [F_{01}^2 \cos^2(\omega_1 t) + F_{02}^2 \cos^2(\omega_2 t) + 2F_{01}F_{02} \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)] \quad (5.7.14)$$

Což lze přepsat ve tvaru

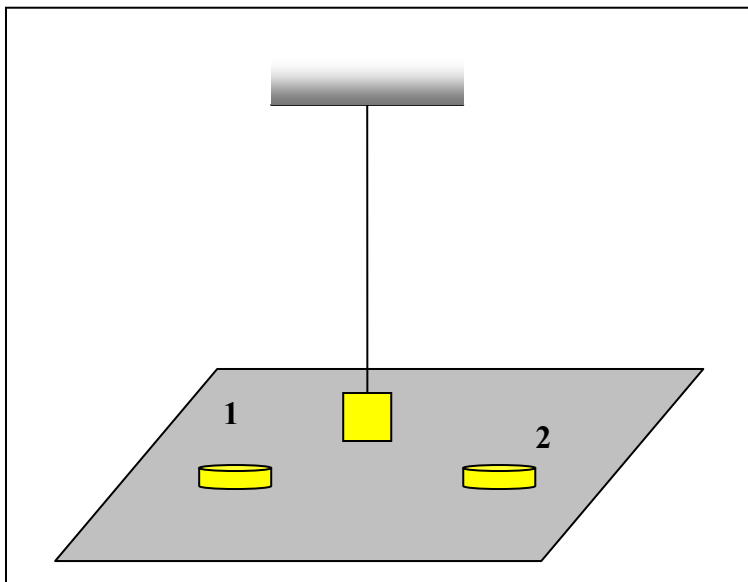
$$F_c = c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_2 t) + c_3 \cos(2\omega_1 t) + c_4 \cos(2\omega_2 t) + c_5 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + c_6 \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \quad (5.7.15)$$

Objeví se tedy rezonance na základních frekvencích, na subharmonických a navíc na součtu a rozdílu obou frekvencí.

### 5.8. Počáteční podmínky, chaos

Výsledné chování kmitajících soustav silně závisí na počátečních podmínkách. Např. jejich vhodnou volbou můžeme docílit toho, že soustava kmitá v příslušném módu. V obecném

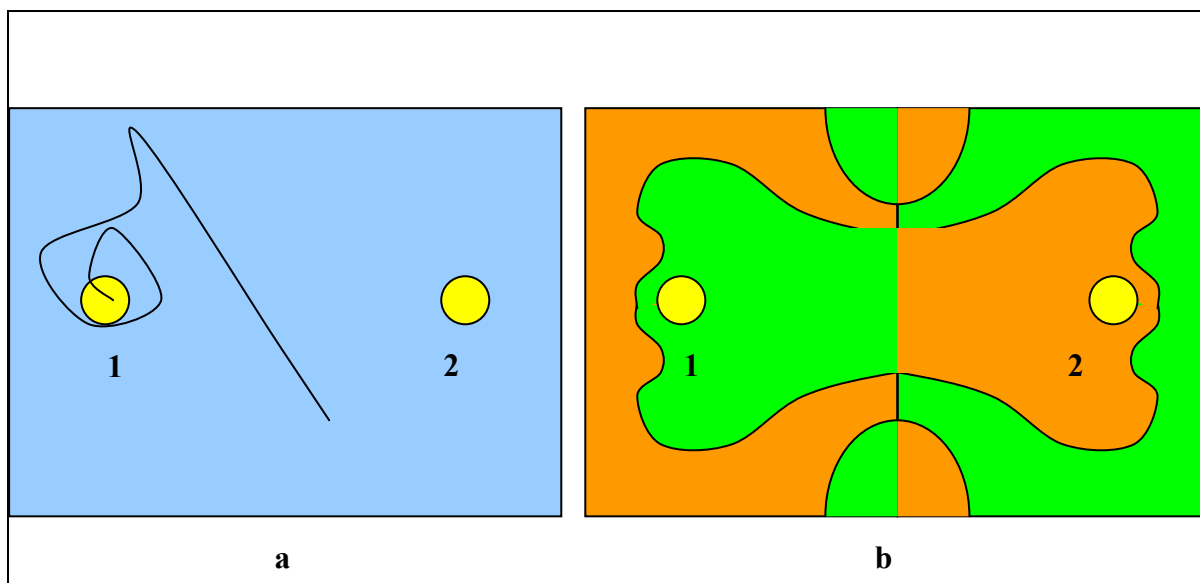
případě je to vždy superpozice těchto módů a tvar kmitů je složitý. Jsou soustavy, které jsou extrémně závislé na počátečních podmínkách a to tak, že prakticky nelze předpovědět chování soustavy. Pak jejich chování se jeví chaotické i když je v zásadě deterministické. Jednoduchý experiment dobře ilustrující takový případ je na obr.5.8.1. Jedná se o železné těleso zavěšené jako matematické kyvadlo. Na podložce symetricky od rovnovážné polohy jsou dva stejné pevné magnety (1 a 2).



*Obr. 5.8.1. Demonstrace chaotického pohybu.*

Síla mezi tělesem kyvadla a magnety je výslednicí obou složek a je dobře definována. Vypustíme-li kyvadlo z kteréhokoliv místa, pak po absolvování složité dráhy, skončí v blízkosti jednoho nebo druhého magnetu ( obr. 5.8.2. a.). Zkoumáme-li systematicky vztah mezi polohou počátečního bodu a výsledkem (1 nebo 2) dostaneme zajímavou mapu schematicky znázorněnou na obr.5.8.2.b. (Zelená plocha přísluší magnetu 1 a oranžová magnetu 2.) Ten zásadní problém nastane v případě, že počáteční bod je v blízkosti rozhraní ploch 1 a 2. Na této hranici je prakticky nemožné určit výsledek (1 nebo 2). Z tohoto pohledu se kyvadlo chová nepředvídatelně, tedy chaoticky. Aplikací podobného typu je v přírodě celá řada a zkoumání jejich vlastností patří do studia chaosu z teoretického i experimentálního hlediska.





Obr. 5.8.2. a. Schematicky znázorněná možná dráha kyvadla.  
b. Přibližné zobrazení ploch s různými počátečními podmínkami.