M1130/01 – První zápočtová písemka

Příklad 1 (1 bod). Udejte příklad výroků A, B takových, aby výroky $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg A)$, $\neg B \Rightarrow A$ byly nepravdivé.

Výsledek. Nechť např. oba výroky A a B jsou „$1 + 1 = 3$“. □

Příklad 2 (1 bod). Označíme-li po řadě výroky

„Číslo 1075926 má ciferný součet dělitelný 6“,
„Číslo 1075926 není druhou mocninou prvočísla“,
„Číslo 1075926 je dělitelné 33“

jako A, B, C, zapište pomocí symbolů A, B, C a logických spojek výrok „Číslo 1075926 nemá ciferný součet dělitelný 6 tehdy a jenom tehdy, když je dělitelné 33 a je druhou mocninou prvočísla“.

Výsledek. Stačilo uvést
$$\neg A \Longleftrightarrow (\neg B \wedge C)\,.$$
□

Příklad 3 (2 body). Zjistěte, zda je výrok
$$((A \wedge B) \Rightarrow C) \Longleftrightarrow (\neg A \vee (\neg B \vee C))$$
tautologií.

Výsledek. Ano, je. Oba výroky $(A \wedge B) \Rightarrow C$ a $\neg A \vee (\neg B \vee C)$ jsou nepravdivé, právě když A, B jsou pravdivé a C nepravdivý. □

Příklad 4 (2 body). Utvořte negace výroků:

(a) Pokud vyhraji, tak to zaplatím ze svého.
(b) Pro libovolná kladná čísla x, y platí nerovnosti $x \leq x + y \leq x + 3y$.

Výsledek. Správné odpovědi jsou:

(a) Vyhraji a nezaplatím to (ze svého).
(b) Existují kladná čísla x, y taková, že $x > x + y$ nebo $x + y > x + 3y$.

□

Příklad 5 (2 body). Číslo $11^{k+1} + 12^{2k-1}$ je pro každé $k \in \mathbb{N}$ dělitelné číslem 133. Dokažte to.

Výsledek. Tvrzení lze dokázat matematickou indukcí. □

Příklad 6 (2 body). Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Výsledek. Tvrzení lze dokázat mj. matematickou indukcí. $\square$

Příklad 7 (2 body). Nalezněte $a, b \in \mathbb{R}$, pro která je

$$(1 - 3i)(1 + ai) - (a + 3i)(4 - i) + 2a + bi = 0.$$

Výsledek. Úloha má jediné řešení, a to $a = 2$, $b = 11$. $\square$

Příklad 8 (1 bod). Spočtěte

$$\left| \left(\frac{i}{1+i} \right)^{100} \right|.$$

Výsledek. Neboť

$$\left| \left(\frac{i}{1+i} \right)^{100} \right| = \left| \frac{i}{1+i} \right|^{100} = \left(\frac{|\, i \,|}{|\, 1+i \,|} \right)^{100} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{100},$$

výsledek je 2^{-50}. $\square$

Příklad 9 (3 body). Vyřešte v $\mathbb{C}$ rovnici

$$(2 - i)z^2 + (4 + 3i)z = 3 + 11i.$$

Výsledek. Pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici lze obdržet výsledky $1 + i$, $-2 - 3i$. $\square$

Příklad 10 (2 body). Uveďte algebraický nebo goniometrický tvar čísla

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta}.$$

Výsledek. Platí

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta} = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta).$$

$\square$

Příklad 11 (1 bod). Stanovte
$$\sqrt[4]{-1}.$$

Výsledek. Očividně je
$$\sqrt[4]{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)$$
pro všechny 4 kombinace znamének. $\square$

Příklad 12 (1 bod). Zakreslete v Gaussově rovině množinu $z \in \mathbb{C}$ vyhovujících podmínce
$$|\, z - 1 \,| = |\, z + i \,| = |\, z \,|.$$

Výsledek. Jedná se o bod $1/2 - i/2$. $\square$