M1130/01 – Druhá zápočtová písemka

Příklad 1 (2 body). Rozložte v $\mathbb{R}$ polynomy

$$x^3 - x - 6; \qquad \left(x^2-3\right)^2 - 5\left(x^2-3\right) + 6.$$

Příklad 2 (2 body). Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$$

s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 3 (3 body). Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathbb{R}$, pro něž má rovnice

$$(m-2)x^2 - (3m+6)x + 6m = 0$$

(a) dva kladné (reálné) kořeny;
(b) dva záporné (reálné) kořeny;
(c) jeden kladný (reálný) a jeden záporný (reálný) kořen.

Příklad 4 (1 bod). Uveďte libovolnou kvadratickou rovnici s kořeny, které jsou čtyřnásobky kořenů rovnice $x^2 - 9x + 15 = 0$.

Příklad 5 (2 body). V $\mathbb{R}$ vyřešte

$$\frac{x}{x+4} + \frac{2}{3x-6} \geq 1.$$

Příklad 6 (2 body). Nalezněte $x \in \mathbb{R}$, pro která je

$$\left|\, 10\,|\,x\,| + 8x - 6 \,\right| \leq x + 3.$$

Příklad 7 (2 body). Stanovte všechny hodnoty parametru $c \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost

$$cx^2 + 2cx + c < -\frac{3}{4} - 3x$$

platila pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 8 (2 body). Pro jaká $p \in \mathbb{R}$ má rovnice

$$(1-p)x^2 + 2x + 1 + p = 0$$

dva různé reálné kořeny x_1, x_2 s vlastností, že $|\,2x_1\,| > 1$, $|\,2x_2\,| > 1$?
Nápověda: Uvažte nejprve danou rovnici pro $x = -1$.

Příklad 9 (2 body). Např. vhodnou substitucí řešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\sqrt{x^2+x+13} - \sqrt{x^2+x+4} = \sqrt{x^2+x-11}.$$

Příklad 10 (2 body). Určete $x \in \mathbb{R}$ z nerovnice

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6.$$