M1130/01 – Třetí zápočtová písemka

Příklad 1 (2 body). Vyčíslete

$$4^{2\log_4 5 - \frac{1}{2}\log_4 25 - 1}.$$

Výsledek. Výsledek je

$$1\,\frac{1}{4}.$$

□

Příklad 2 (3 body). Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ vyhovující rovnici

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{2x^2-10x+13} + 4 = 10 \cdot 2^{x^2-5x+5}.$$

Výsledek. Rovnici vyhovuje $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$. □

Příklad 3 (3 body). Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$x^{2\log\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = 1\,000.$$

Výsledek. Daná rovnice má kořeny $x_1 = 10^3$, $x_2 = 10^{-1}$. □

Příklad 4 (3 body). Určete $x \in \mathbb{R}$, pro která je

$$\log_x \frac{6}{4-x} \cdot \log_{x+1} x < 1.$$

Výsledek. Pro $x \in (1, 2)$. □

Příklad 5 (3 body). Zjistěte, zda platí

$$\frac{\sin 40^\circ \, \sin 70^\circ}{(1+\cos 40^\circ)\,(1+\cos 20^\circ)} = \operatorname{tg} 10^\circ.$$

Výsledek. Ano, platí. □

Příklad 6 (3 body). Vypočítejte

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

v množině $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledek. Řešení jsou

$$\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{9\pi}{8}, \frac{4\pi}{3}, \frac{13\pi}{8}.$$

□

Příklad 7 (3 body). Pro neznámou $x \in \mathbb{R}$ vyřešte nerovnici

$$3\sqrt{2}\cos 2x < 4 - 2\sin^2 2x.$$

Výsledek. Nerovnost je splněna, pokud

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{7\pi}{8} + k\pi \right).$$

□