Kapitola 1

Dvojný integrál

Většina čtenářů tohoto textu je již nepochybně seznámena s teorií Riemannova[1] určitého integrálu funkce jedné proměnné, který se přednáší v rámci přednášky z matematické analýzy. Tento jednorozměrný integrál se značí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a je definován pro funkci f jedné proměnné integrace schopnou, a tedy zejména ohraničenou, na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Tento integrál přiřazuje funkci f s výše uvedenými vlastnostmi jisté reálné číslo. V základním kurzu matematické analýzy se při úvodním studiu Riemannova integrálu obvykle nedefinuje integrál funkce jedné proměnné na obecnější množině (např. $M = \langle a, b\rangle \cup \langle c, d\rangle$, kde $\langle a, b\rangle \cap \langle c, d\rangle = \emptyset$), ani integrál funkce více proměnných.

Naším cílem bude vybudovat teorii Riemannova integrálu funkce n proměnných na dosti obecných množinách $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Tento integrál bude zobecněním Riemannova určitého integrálu funkce jedné proměnné. Pro jednoduchost a názornost soustředíme pozornost zejména na případy $n = 1, 2, 3$. V případě $n = 1$ mluvíme o *jednoduchém*, v případě $n = 2$ o *dvojném* a v případě $n = 3$ o *trojném* integrálu. Nejprve se budeme zabývat integrálem dvojným.

Teorie dvojného Riemannova integrálu se obvykle buduje tím způsobem, že se nejdříve definuje tzv. Jordanova[2] míra množiny a vydělí se třída množin, které jsou jordanovsky měřitelné. Dvojný integrál funkce f dvou proměnných ohraničené na jordanovsky měřitelné množině M se pak zavádí tak, že se definuje

[1]**Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) (čti ríman) — německý matematik. Zabýval se teorií funkcí, geometrií, matematickou a teoretickou fyzikou a diferenciálními rovnicemi. Jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob.

[2]**Marie Edmond Camille Jordan** (1832–1922) (čti žordan) — francouzský matematik. Zabýval se matematickou analýzou, algebrou, teorií funkcí, topologií, krystalografií, kinematikou, stabilitou, geometrickou pravděpodobností, teorií čísel a diferenciálními rovnicemi. Jeden z tvůrců moderní matematiky.

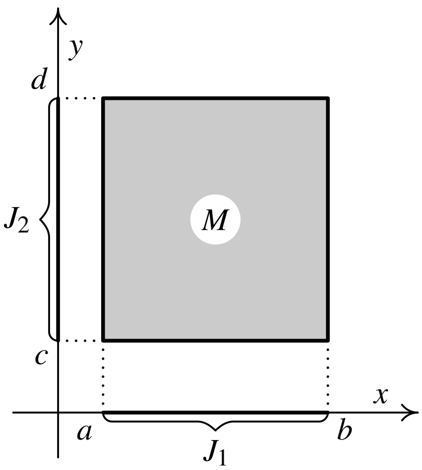
vhodným způsobem dělení D množiny M na jisté speciální měřitelné podmnožiny (tzv. dílky dělení), sestaví se horní a dolní součet $S(D, f)$, $s(D, f)$ a dále se postupuje podobně jako v definici jednoduchého Riemannova integrálu.

V tomto textu však volíme jiný přístup: Dvojný integrál definujeme nejprve na dvojrozměrném intervalu, poté pomocí charakteristické funkce množiny definujeme měřitelnou množinu a následně zavádíme pojem dvojného integrálu na měřitelné množině M, a to převedením na dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu, který množinu M obsahuje.

1.1. Dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu

Zaveďme nejprve pojem intervalu v rovině.

Definice 1.1. *Intervalem v rovině* neboli *dvojrozměrným intervalem* budeme rozumět množinu J, která je kartézským součinem dvou intervalů $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$. Tedy $J = J_1 \times J_2$.



Obr. 1.1: Interval v rovině

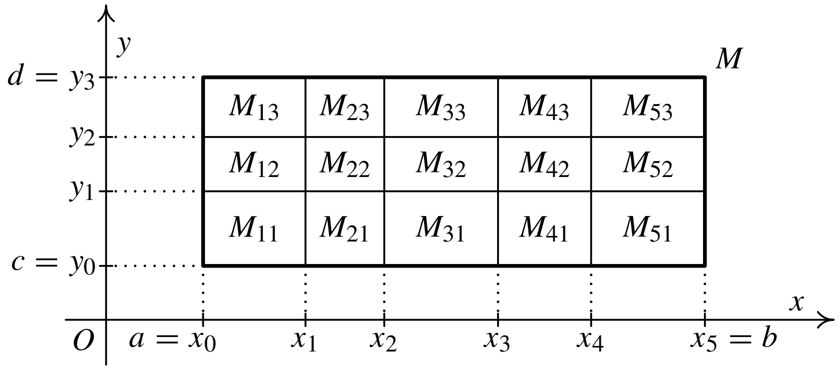
Intervaly J_1 a J_2 mohou být libovolného typu — omezené, neomezené, uzavřené, otevřené nebo polootevřené. Bude-li některý z nich degenerovaný, tj. bude-li to bod, bude i dvojrozměrný interval J tzv. *degenerovaný*. Může to být bod, úsečka, polopřímka nebo přímka.

Pro nás ale bude nejdůležitější případ, kdy oba dva intervaly J_1 a J_2 budou omezené a uzavřené. Odpovídající dvojrozměrný interval $M = J_1 \times J_2$ pak bude omezený a uzavřený obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami — viz obr. 1.1, kde $J_1 = \langle a, b\rangle$ a $J_2 = \langle c, d\rangle$. Lze ho zapsat také takto:

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}.$$

V dalším, nebude-li řečeno jinak, budeme *obdélníkem* rozumět vždy nedegenerovaný dvojrozměrný uzavřený a omezený interval. Podobně dvojrozměrným intervalem budeme rozumět nedegenerovaný interval, pokud nebude uvedeno jinak.

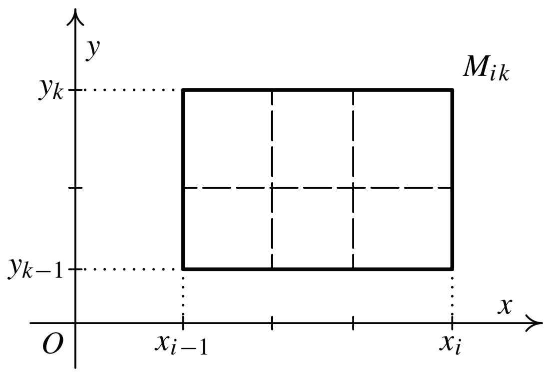
Buď $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ obdélník v $\mathbb{R}^2$. Nechť $D_x\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $D_y\colon c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d\rangle$. Označme $M_{ik} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{k-1}, y_k\rangle$, kde



Obr. 1.2: Dělení dvojrozměrného intervalu

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Systém obdélníků $\{M_{ik} : i = 1, 2, \dots, m;$ $k = 1, 2, \dots, n\}$ nazýváme *dělením* obdélníku M a značíme $D = D_x \times D_y$. Obdélníky M_{ik} nazýváme *dílky* dělení D (viz obr. 1.2). *Normou* dělení $D = D_x \times D_y$ budeme rozumět číslo $\nu(D) = \max\left\{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} : i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n\right\}$, tj. délku nejdelší z úhlopříček všech dílků dělení. V našich úvahách budeme pracovat také s posloupnostmi dělení. Posloupnost dělení $\{D_n\}$ nazveme *nulovou posloupností* dělení, platí-li $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Symbolem $\mathscr{D}(M)$ nebo $\mathscr{D}$ označíme množinu všech dělení obdélníku M. Dělení $D_1 = D_x^1 \times D_y^1$ se nazývá *zjemnění* dělení $D = D_x \times D_y$, je-li D_x^1 zjemněním dělení D_x a D_y^1 zjemněním dělení D_y. Je-li D_1 zjemnění dělení D, pak zřejmě každý dílek M_{ik} dělení D je v D_1 rozdělen na konečný počet dílků dělení D_1 (viz obr. 1.3). Snadno se ověří, že ke každým dvěma dělením $D_1 = D_x^1 \times D_y^1$, $D_2 = D_x^2 \times D_y^2 \in \mathscr{D}(M)$ existuje jejich společné zjemnění. (Tím je např. dělení $\widetilde{D} = \widetilde{D}_x \times \widetilde{D}_y$, kde $\widetilde{D}_x$ je tvořeno všemi dělicími body dělení D_x^1 a dělení D_x^2 a $\widetilde{D}_y$ je tvořeno všemi dělicími body dělení D_y^1 a dělení D_y^2. Toto dělení budeme nazývat *největším společným zjemněním* dělení D_1, D_2.)



Obr. 1.3: Zjemnění dělení

Buď f ohraničená funkce dvou proměnných definovaná na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a nechť $D = D_x \times D_y$ je dělení obdélníku M o dílcích M_{ik},

$i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$. Označme

$$v_{ik} = \inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\},$$
$$V_{ik} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}$$

a položme

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} v_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}),$$
$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} V_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}).$$

Číslo $s(D, f)$ nazýváme *dolním součtem*, číslo $S(D, f)$ *horním součtem* funkce f při dělení D (viz obr. 1.4 a 1.5).

Nazveme-li číslo $\mathrm{m}(R) = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma)$ *mírou* (*obsahem*) obdélníku $R = \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle \gamma, \delta \rangle$, můžeme při označení $I = \{(i, k) : i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n\}$ psát stručněji

$$s(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}),$$
$$S(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}).$$

Podobně jako v případě jednorozměrného integrálu pro každou ohraničenou funkci f platí:

Lemma 1.2.

a) *$s(D, f) \leqq S(D, f)$ pro každé $D \in \mathscr{D}$.*

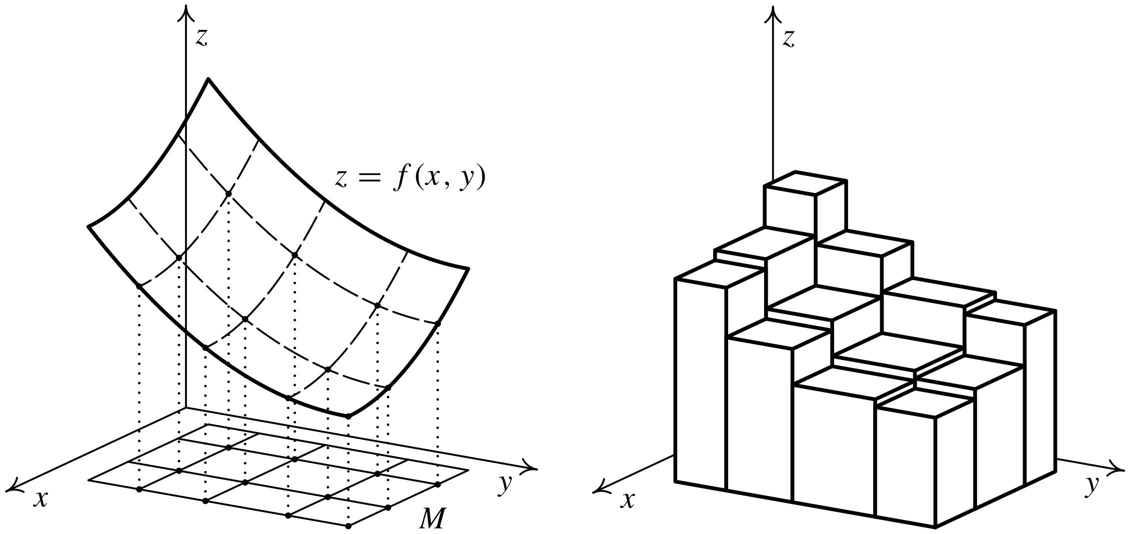
b) *Jsou-li $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ a D_2 je zjemnění D_1, pak je $s(D_1, f) \leqq s(D_2, f)$, $S(D_1, f) \geqq S(D_2, f)$.*

c) *Jsou-li $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ libovolná, pak $s(D_1, f) \leqq S(D_2, f)$.*

Důkaz.

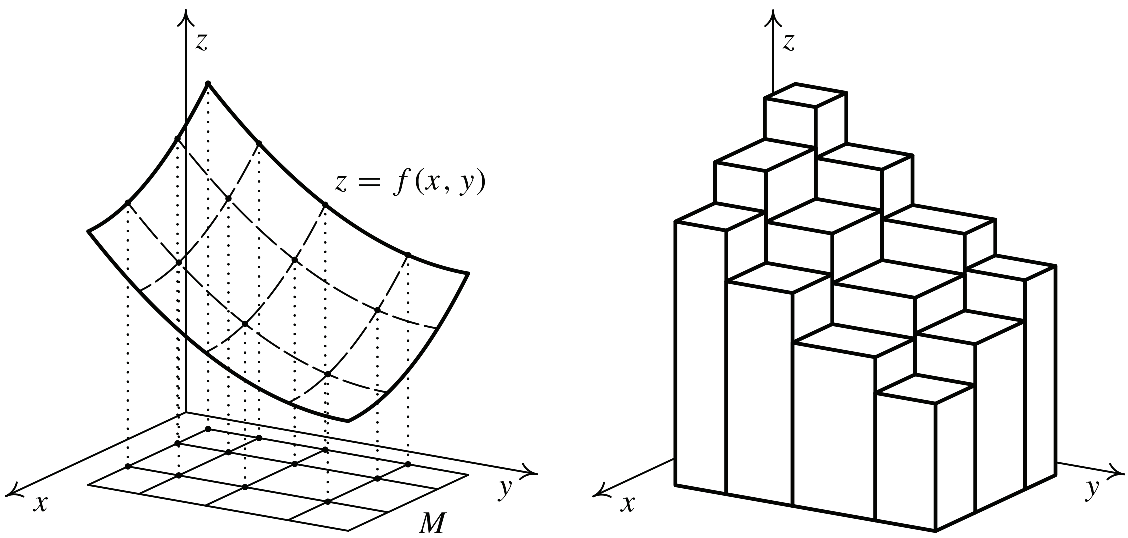
a) Pro každé $(i, k) \in I$ platí $v_{ik} \leqq V_{ik}$. Odtud plyne

$$s(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) \leqq \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) = S(D, f).$$



a) b)

Obr. 1.4: Geometrický význam dolního součtu



a) b)

Obr. 1.5: Geometrický význam horního součtu

b) Libovolný dílek M_{ik} dělení D_1 přispívá do dolního součtu $s(D_1, f)$ hodnotou $v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik})$. V dělení D_2 je pevně zvolený dílek M_{ik} rozdělen na dílky $\widetilde{M}_{pq}$, $(p, q) \in J$, kde J je vhodná množina uspořádaných dvojic indexů, přičemž $\sum\limits_{(p,q)\in J} \mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq}) = \mathrm{m}(M_{ik})$. Příspěvek dílku M_{ik} do součtu $s(D_2, f)$ je tedy $\sum\limits_{(p,q)\in J} \tilde{v}_{pq}\,\mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq})$, kde $\tilde{v}_{pq} = \inf\{f(x, y) : [x, y] \in \widetilde{M}_{pq}\}$. Protože zřejmě platí $v_{ik} \leqq \tilde{v}_{pq}$ pro libovolné $(p, q) \in J$, máme

$$v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) = v_{ik} \sum_{(p,q)\in J} \mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq}) = \sum_{(p,q)\in J} v_{ik}\,\mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq}) \leqq \sum_{(p,q)\in J} \tilde{v}_{pq}\,\mathrm{m}(\widetilde{M}_{pq}),$$

tj. příspěvek dílku M_{ik} do součtu $s(D_2, f)$ je větší nebo roven příspěvku tohoto dílku do $s(D_1, f)$. Sečtením pro všechna $(i, k) \in I$ vyjde tvrzení pro dolní součty. Pro horní součty se důkaz provede analogicky.

c) Buď D_3 společné zjemnění dělení D_1 a D_2. Užitím a) a b) dostáváme

$$s(D_1, f) \leqq s(D_3, f) \leqq S(D_3, f) \leqq S(D_2, f). \qquad \square$$

Buď $D_0 \in \mathscr{D}$ libovolné pevně zvolené dělení dvojrozměrného intervalu $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Podle lemmatu 1.2 platí $s(D, f) \leqq S(D_0, f)$ pro každé $D \in \mathscr{D}$. Množina $\{s(D, f) : D \in \mathscr{D}\}$ je tedy neprázdná a shora omezená. Existuje proto $\sup\{s(D, f) : D \in \mathscr{D}\}$, které značíme

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Zřejmě platí

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D_0, f).$$

Dělení D_0 však bylo voleno libovolně, takže $S(D, f) \geqq \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pro každé $D \in \mathscr{D}$ a množina všech horních součtů funkce f je zdola omezená a neprázdná. Existuje tudíž $\inf\{S(D, f) : D \in \mathscr{D}\}$, které značíme

$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Přitom platí

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Definice 1.3. Čísla $\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ resp. $\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nazveme *dolním* resp. *horním integrálem* ohraničené funkce f *na množině* (*přes množinu*) M. Platí-li rovnost

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

říkáme, že f je *integrovatelná* (*integrace schopna*) na množině M a definujeme *dvojný integrál* $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *funkce* f *na množině* (*přes množinu*) M vztahem

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Funkce f se nazývá *integrand*, množina M *integrační obor*.

Poznámka 1.4. Je-li integrand f konstantní funkce rovná jedné, používáme místo zápisu $\iint\limits_M 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ stručnější podobu $\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Obdobně pro dolní a horní integrály.

Příklad 1.5. Vypočtěte $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $f(x, y) = c \in \mathbb{R}$ pro každý bod $[x, y]$ daného obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.

Řešení. Buď $D = \{M_{ik} : (i, k) \in I\}$ libovolné dělení obdélníku M. Zřejmě platí $v_{ik} = c$, $V_{ik} = c$. Tedy

$$s(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} c\,\mathrm{m}(M_{ik}) = c \sum_{(i,k)\in I} \mathrm{m}(M_{ik}) = c\,\mathrm{m}(M),$$

$$S(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} c\,\mathrm{m}(M_{ik}) = c \sum_{(i,k)\in I} \mathrm{m}(M_{ik}) = c\,\mathrm{m}(M).$$

Odtud

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\,\mathrm{m}(M) = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

a tedy

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M c\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\,\mathrm{m}(M) = c(b-a)(d-c).$$

▲

Příklad 1.6. Buď f funkce definovaná na obdélníku $M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ takto:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \text{ a } y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda funkce f je integrovatelná na obdélníku M.

Řešení. Buď $D = \{M_{ik} : (i, k) \in I\}$ libovolné dělení obdélníku M. Pak $v_{ik} = 0$, $V_{ik} = 1$, protože mezi každými dvěma různými reálnými čísly leží jak nekonečně mnoho racionálních tak nekonečně mnoho iracionálních čísel ([7, str. 7]), a

$$s(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\, \mathrm{m}(M_{ik}) = \sum_{(i,k)\in I} 0 \cdot \mathrm{m}(M_{ik}) = 0,$$
$$S(D, f) = \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\, \mathrm{m}(M_{ik}) = \sum_{(i,k)\in I} 1 \cdot \mathrm{m}(M_{ik}) = 1.$$

Odtud

$$\underline{\iint_M} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \neq 1 = \overline{\iint_M} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Daná funkce není integrovatelná na obdélníku M. ▲

Lemma 1.7. *Buď f ohraničená funkce v obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení D obdélníku M, pro jehož normu platí $\nu(D) < \delta$, je*

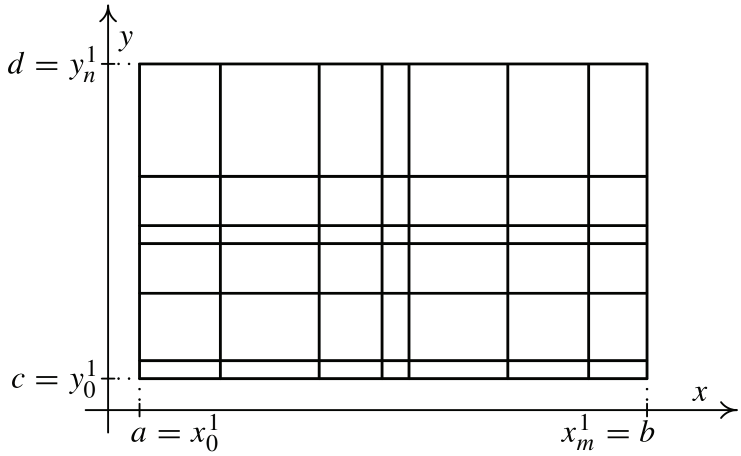
$$\overline{\iint_M} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, f) < \overline{\iint_M} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \varepsilon. \tag{1.1}$$

Důkaz. Nechť $K > 0$ je konstanta taková, že $|f(x, y)| \leqq K$ pro $[x, y] \in M$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle definice horního integrálu (jako infima horních součtů) existuje dělení $D^1 = D^1_x \times D^1_y$, $D^1_x : a = x^1_0 < x^1_1 < \cdots < x^1_m = b$, $D^1_y : c = y^1_0 < y^1_1 < \cdots < y^1_n = d$, obdélníku M s vlastností

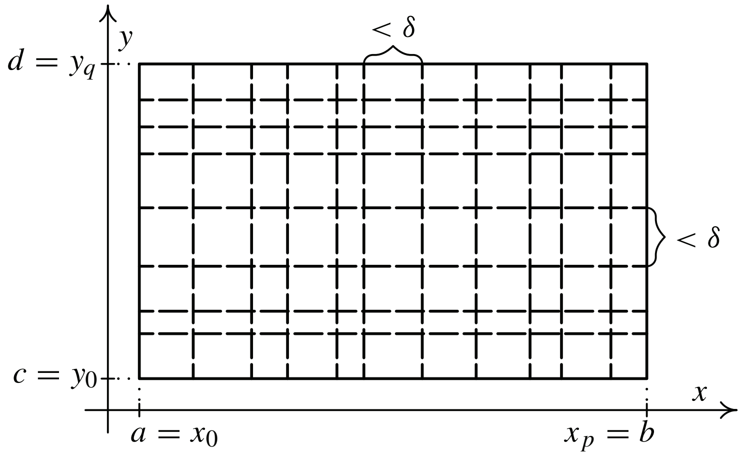
$$S(D^1, f) < \overline{\iint_M} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.2}$$

Nechť M^1_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) jsou dílky tohoto dělení. Označme $I = \{(i, j) : i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$. Položme

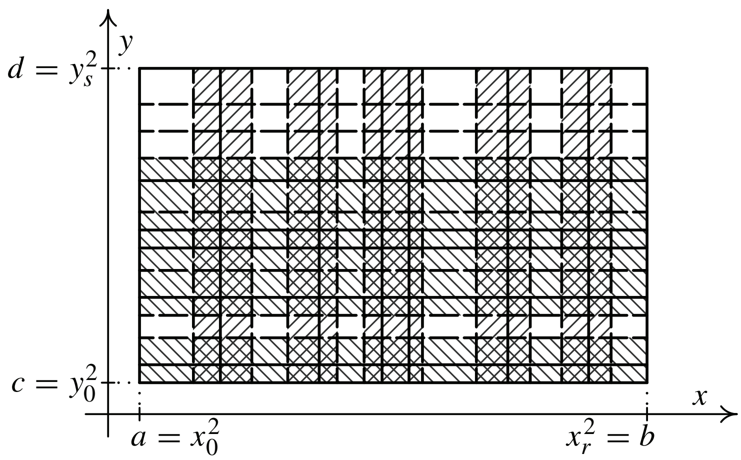
$$\delta = \frac{\varepsilon}{4[(d - c)m + (b - a)n]K}.$$



a) Dělení D^1 s dílky M_{ij}^1 $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$



b) Dělení D $(\nu(D) < \delta)$ s dílky M_{ij} $(i = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, q)$



c) Dělení D^2 s dílky M_{ij}^2 $(i = 1, \dots, r,\ j = 1, \dots, s)$

Obr. 1.6: Dělení D^1 a D a jejich největší společné zjemnění D^2

Buď nyní D libovolné dělení obdélníku M o normě menší než δ s dílky M_{ij} ($i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$). Označme $J = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q\}$. Uvažujme dále dělení D^2 obdélníku M, které je největším společným zjemněním dělení D, D^1 (viz obr. 1.6). Nechť dílky dělení D^2 jsou M^2_{ij} ($i = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, s$). Označme $L = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s\}$. Položme $J' = \{(i, j) \in J : \text{existuje } (k, l) \in I \text{ s vlastností } M_{ij} \subseteq M^1_{kl}\}$, $J'' = J \setminus J'$. Zřejmě pro $(i, j) \in J'$ je M_{ij} dílkem dělení D^2. Pro $(i, j) \in J''$ existují $(k, l) \in I$, $(\bar{k}, \bar{l}) \in I$, $(k, l) \neq (\bar{k}, \bar{l})$ tak, že $M_{ij} \cap (M^1_{kl} \setminus M^1_{\bar{k}\bar{l}}) \neq \emptyset$, $M_{ij} \cap (M^1_{\bar{k}\bar{l}} \setminus M^1_{kl}) \neq \emptyset$. Protože $\nu(D) < \delta$, platí pro součet měr $\mathrm{m}(M_{ij})$ všech obdélníků M_{ij}, kde $(i, j) \in J''$, nerovnosti

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in J''} \mathrm{m}(M_{ij}) &\leqq \nu(D)[(d-c)m + (b-a)n] < \\ &< \delta[(d-c)m + (b-a)n] = \frac{\varepsilon}{4K}\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Položme $L' = \{(k, l) \in L : \text{existuje } (i, j) \in J \text{ s vlastností } M^2_{kl} = M_{ij}\}$, $L'' = L \setminus L'$. Nechť pro $(i, j) \in J$, $(k, l) \in L$ je $V_{ij} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}$, $V^2_{kl} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M^2_{kl}\}$. Pak podle (1.3)

$$\bigcup_{(i,j)\in J'} M_{ij} = \bigcup_{(k,l)\in L'} M^2_{kl}, \qquad \bigcup_{(i,j)\in J''} M_{ij} = \bigcup_{(k,l)\in L''} M^2_{kl},$$

$$\Big| \sum_{(i,j)\in J''} V_{ij}\, \mathrm{m}(M_{ij}) \Big| \leqq K \sum_{(i,j)\in J''} \mathrm{m}(M_{ij}) < K \frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{4}\,,$$

$$\sum_{(i,j)\in J'} V_{ij}\, \mathrm{m}(M_{ij}) = \sum_{(k,l)\in L'} V^2_{kl}\, \mathrm{m}(M^2_{kl}).$$

Podobně užitím (1.3) dostáváme

$$\Big| \sum_{(k,l)\in L''} V^2_{kl}\, \mathrm{m}(M^2_{kl}) \Big| \leqq K \sum_{(k,l)\in L''} \mathrm{m}(M^2_{kl}) = K \sum_{(i,j)\in J''} \mathrm{m}(M_{ij}) < K \frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Protože

$$\begin{aligned} \big| S(D, f) - S(D^2, f) \big| = \Big| &\sum_{(i,j)\in J'} V_{ij}\, \mathrm{m}(M_{ij}) + \sum_{(i,j)\in J''} V_{ij}\, \mathrm{m}(M_{ij}) - \\ &- \sum_{(k,l)\in L'} V^2_{kl}\, \mathrm{m}(M^2_{kl}) - \sum_{(k,l)\in L''} V^2_{kl}\, \mathrm{m}(M^2_{kl}) \Big|, \end{aligned}$$

máme

$$\begin{aligned} \left|S(D, f) - S(D^2, f)\right| \leqq \Bigg| \sum_{(i,j)\in J''} V_{ij}\, \mathrm{m}(M_{ij})\Bigg| + \Bigg| \sum_{(k,l)\in L''} V^2_{kl}\, \mathrm{m}(M^2_{kl})\Bigg| < \\ < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Užitím (1.4) a (1.2) dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, f) < S(D^2, f) + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \\ \leqq S(D^1, f) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \varepsilon, \end{aligned}$$

čímž je vztah (1.1) dokázán. □

Poznámka 1.8. Analogické tvrzení platí i o dolním součtu a dolním integrálu.

Lemma 1.9. *Buď f funkce ohraničená na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak je f integrovatelná na M právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové dělení $D \in \mathscr{D}(M)$, že platí $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť f je integrovatelná na M. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje takové $D_1 \in \mathscr{D}(M)$, že

$$S(D_1, f) < \overline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{2} = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

a takové $D_2 \in \mathscr{D}(M)$, že

$$s(D_2, f) > \underline{\iint_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\varepsilon}{2} = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Buď D společné zjemnění dělení D_1 a D_2. Pak $S(D, f) \leqq S(D_1, f)$, $s(D, f) \geqq$ $\geqq s(D_2, f)$, a tudíž

$$S(D, f) < \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad s(D, f) > \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud

$$S(D, f) - s(D, f) < \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Nechť naopak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathscr{D}(M)$ tak, že $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Protože

$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, f), \qquad \iint\limits_{\underline{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq s(D, f),$$

platí

$$0 \leqq \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\underline{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon.$$

Jelikož poslední vztah platí při libovolném $\varepsilon > 0$, je

$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\underline{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

takže

$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\underline{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a f je integrovatelná na M. □

Věta 1.10. *Buď f ohraničená funkce na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.*

a) *Je-li $\{D_n\}$ libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M, pak pro $n \to \infty$ platí*

$$s(D_n, f) \to \iint\limits_{\underline{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad S(D_n, f) \to \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) *Je-li funkce f integrovatelná na obdélníku M, pak pro $n \to \infty$ platí*

$$s(D_n, f) \to \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad S(D_n, f) \to \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $\{D_n\}$ obdélníku M.

c) *Jestliže pro aspoň jednu nulovou posloupnost $\{D_n\}$ dělení obdélníku M platí $\lim\limits_{n\to\infty} s(D_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} S(D_n, f)$, pak funkce f je integrovatelná na obdélníku M.*

Důkaz.

a) Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle lemmatu 1.7 existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D o normě $\nu(D) < \delta$ platí

$$0 \leqq S(D, f) - \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon.$$

Protože pro libovolnou nulovou posloupnost $\{D_n\}$ dělení obdélníku M platí $\nu(D_n) \to 0$, existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že $\nu(D_n) < \delta$ pro všechna $n \geqq N$. Tedy

$$0 \leqq S(D_n, f) - \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon$$

pro každé $n \geqq N$. Podle definice limity číselné posloupnosti to znamená, že

$$S(D_n, f) \to \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Podobně se dokáže, že

$$s(D_n, f) \to \underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Druhé tvrzení věty plyne z tvrzení a) a z toho, že funkce f je integrovatelná na M právě tehdy, když

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c) Podle předpokladu existuje číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} s(D_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} S(D_n, f) = L$. Podle tvrzení a) je

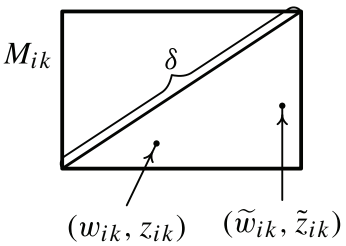
$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = L = \overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

takže f je na M integrovatelná. $\square$

V důkazu následující věty použijeme tvrzení o *stejnoměrné spojitosti* funkce spojité na kompaktní množině: *Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolná $X_1 \in M$, $X_2 \in M$, $\varrho(X_1, X_2) < \delta$, platí $|f(X_1) - f(X_2)| < \varepsilon$. Přitom ϱ značí eukleidovskou metriku v prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Věta 1.11. *Buď f spojitá funkce na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak je f integrovatelná na M.*

Důkaz. Množina M je kompaktní, takže podle Weierstrassovy věty ([5, str. 20]) je funkce f na množině M ohraničená, tudíž má na M horní a dolní integrál. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Z tvrzení zmíněného před touto větou plyne existence čísla $\delta > 0$ takového, že pro $[x_1, y_1] \in M$, $[x_2, y_2] \in M$, $\varrho\big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big) < \delta$, platí $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon / \mathrm{m}(M)$.



Buď nyní $D = \{M_{ik} : (i, k) \in I\}$ dělení obdélníku M o normě menší než δ, tj. takové dělení, že úhlopříčka každého jeho dílku M_{ik} je kratší než δ. Protože množiny M_{ik} jsou kompaktní a f je spojitá, nabývá funkce f na každém M_{ik} své největší a nejmenší hodnoty, to jest existují body $[w_{ik}, z_{ik}] \in M_{ik}$, $[\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik}] \in M_{ik}$ takové, že pro funkční hodnoty $f(w_{ik}, z_{ik})$, $f(\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik})$ platí

$$f(w_{ik}, z_{ik}) = \min\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\} = v_{ik},$$
$$f(\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik}) = \max\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\} = V_{ik}.$$

Zároveň máme

$$0 \leqq f(\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik}) - f(w_{ik}, z_{ik}) < \frac{\varepsilon}{\mathrm{m}(M)},$$

neboť $\varrho\big((w_{ik}, z_{ik}), (\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik})\big) < \delta$. Odtud

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) - \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) = \\ &= \sum_{(i,k)\in I} (V_{ik} - v_{ik})\,\mathrm{m}(M_{ik}), \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{(i,k)\in I} \big(f(\widetilde{w}_{ik}, \tilde{z}_{ik}) - f(w_{ik}, z_{ik})\big)\,\mathrm{m}(M_{ik}) < \\ &< \sum_{(i,k)\in I} \frac{\varepsilon}{\mathrm{m}(M)}\,\mathrm{m}(M_{ik}) = \frac{\varepsilon}{\mathrm{m}(M)} \sum_{(i,k)\in I} \mathrm{m}(M_{ik}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.9 je funkce f na M integrovatelná. $\square$

Lemma 1.12. *Nechť funkce f je ohraničená na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a platí $f(x, y) = 0$ pro každý vnitřní bod $[x, y]$ obdélníku M. Pak je funkce f na obdélníku M integrovatelná a $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.*

Důkaz. Podle předpokladu existuje konstanta $K > 0$ tak, že $|f(x, y)| \leqq K$ pro každé $[x, y] \in M$. Nechť $D_x\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D_y\colon c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d\rangle$. Pak $D = D_x \times D_y$ je dělení obdélníku M s dílky $M_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$, $(i, j) \in I$, kde $I = \{(i, j) : i = 1, \dots m;\ j = 1, \dots, n\}$. Dále označme $V_{ij} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}$, $(i, j) \in I$. Nechť $J = \{(i, j) \in I : 1 < i < m,\ 1 < j < n\}$. Pro $(i, j) \in J$ je podle předpokladu $V_{ij} = 0$, pro $(i, j) \in I \setminus J$ platí $|V_{ij}| \leqq K$. Tedy

$$
\begin{aligned}
0 \leqq |S(D, f)| &= \Big|\sum_{(i,j)\in I} V_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij})\Big| \leqq \sum_{(i,j)\in I} |V_{ij}|\,\mathrm{m}(M_{ij}) = \\
&= \sum_{(i,j)\in I\setminus J} |V_{ij}|\,\mathrm{m}(M_{ij}) \leqq K \sum_{(i,j)\in I\setminus J} \mathrm{m}(M_{ij}) \leqq \\
&\leqq 2K(b-a)\nu(D) + 2K(d-c)\nu(D) = 2K(b-a+d-c)\nu(D).
\end{aligned}
$$

Buď $\{D_n\}$ nulová posloupnost dělení obdélníku M. Protože podle předchozího platí $0 \leqq |S(D_n, f)| \leqq 2K(b-a+d-c)\nu(D_n)$, limitním přechodem pro $n \to +\infty$ dostaneme podle věty 1.10, že

$$
0 \leqq \Big|\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big| \leqq 0,
$$

tudíž $\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

Analogicky se ověří, že také $\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. Odtud již plyne integrovatelnost funkce f a zároveň i rovnost $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. $\square$

Poznámka 1.13. Buď f funkce dvou proměnných x, y definovaná na množině M. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujme $M_x = \{y \in \mathbb{R} : [x, y] \in M\}$. Tudíž M_x je kolmým průmětem na osu y množiny, která je průnikem M a rovnoběžky s osou y, procházející bodem $[x, 0]$. Pak pro $x \in \mathbb{R}$, pro něž je $M_x \neq \emptyset$, budeme symbolem $f(x, \cdot)$ značit funkci jedné proměnné y, která je definovaná na množině M_x

a číslu y přiřazuje hodnotu $f(x, y)$. Tedy $f(x, \cdot)(y) = f(x, y)$ pro $y \in M_x$. Vlastně x je „zafixovaná“ hodnota a tečka zastupuje proměnnou y. Obdobně se zavede symbol $f(\cdot, y)$ pro funkci jedné proměnné x. Analogické značení budeme používat pro funkce tří a více proměnných, např. $f(x, y, \cdot)$, $f(x, \cdot, \cdot)$ apod.

V důkazu následující věty využijeme dvě vlastnosti jednoduchého horního integrálu, které se snadno ověří, ale obvykle se v základním kurzu neuvádí.

1) Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $a < c < b$. Pak platí $\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int}_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2) Nechť funkce f, g jsou ohraničené na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(x) \leqq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak $\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int}_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Obdobná tvrzení platí pro jednoduchý dolní integrál.

Věta 1.14 (Fubiniova[1] věta). *Buď f funkce integrovatelná na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak platí*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y =$$
$$= \int_a^b \left[\underline{\int}_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\underline{\int}_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Důkaz provedeme podrobně pro první rovnost. Označme pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$

$$F(x) = \overline{\int}_a^d f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Protože $f(x, \cdot)$ je ohraničená funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$, má na tomto intervalu horní integrál. Nechť $D = D_x \times D_y$ je dělení M, kde $D_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $D_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Nechť $M_{ik} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{k-1}, y_k\rangle$ jsou dílky tohoto dělení. Položme $V_{ik} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}$. K pevně zvolenému $x \in \langle a, b\rangle$ najděme takové $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, že $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (je-li $x = x_i$ pro některé i, $0 < i < m$, platí následující úvaha jak pro interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ tak pro interval $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$). Pak s využitím tvrzení 1) a 2) zmíněných před touto větou dostáváme

$$F(x) = \overline{\int}_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} \overline{\int}_{y_{k-1}}^{y_k} f(x, y)\,\mathrm{d}y \leqq$$

[1]**Guido Fubini** (1879–1943) (čti fubiny) — italský matematik. Zabýval se projektivní diferenciální geometrií, diferenciálními rovnicemi, variačním počtem a mnoha dalšími matematickými disciplínami.

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} \overline{\int}_{y_{k-1}}^{y_k} V_{ik}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} V_{ik}(y_k - y_{k-1}).$$

Protože odvozená nerovnost platí pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, z tvrzení 1) a 2) dále plyne

$$\overline{\int}_{a}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} \overline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \sum_{i=1}^{m} \overline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\sum_{k=1}^{n} V_{ik}(y_k - y_{k-1})\right] \mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} V_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) = S(D, f).$$

Pro každé $D \in \mathscr{D}(M)$ je tedy $\overline{\int}_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \leqq S(D, f)$, a odtud

$$\overline{\int}_{a}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\iint_{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Analogicky se dokáže nerovnost mezi dolními integrály

$$\underline{\int}_{a}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\iint_{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Celkem tedy platí

$$\underline{\iint_{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \underline{\int}_{a}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int}_{a}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\iint_{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (1.5)$$

Protože funkce f je podle předpokladu na M integrovatelná, platí v (1.5) všude rovnosti, takže funkce F je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\iint_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} \left[\overline{\int}_{c}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

S ohledem na symetrii proměnných platí zároveň

$$\iint_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{c}^{d} \left[\overline{\int}_{a}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

Podobně se dokáže rovněž varianta s dolními vnitřními integrály. □

Z praktického hlediska je nejdůležitější následující speciální verze předchozí věty, s níž se nejčastěji setkáváme při výpočtech dvojných integrálů na obdélníku.

Důsledek 1.15 (Fubiniova věta pro spojitou funkci). *Buď f spojitá funkce na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak platí*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Funkce f je podle věty 1.11 integrovatelná na obdélníku M. Protože funkce $f(x, \cdot)$ proměnné y je spojitá na intervalu $\langle c, d\rangle$, platí $\underline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y = = \overline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$. První rovnost pak plyne z Fubiniovy věty. Obdobně se dokáže druhá rovnost. □

Poznámka 1.16.

1. Dvojný integrál $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se někdy označuje jako *integrál dvojrozměrný*, zatímco integrály $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$, $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ a jejich varianty s horními a dolními vnitřními integrály jako *integrály dvojnásobné*.
2. V literatuře je možno se setkat také s následujícím označením dvojnásobných integrálů: $\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$, resp. $\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 1.17. Nechť $M = \langle -1, 3\rangle \times \langle 0, 2\rangle$. Vypočtěte $\displaystyle\iint\limits_M (x + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Řešení. Funkce $f(x, y) = x + y^2$ je spojitá na obdélníku M. Podle Fubiniovy věty platí:

$$\iint\limits_M (x + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^3 \left[\int_0^2 (x + y^2)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^3 \left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^3 \left[2x + \frac{8}{3} - (0 + 0)\right]\mathrm{d}x = \left[2\,\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}\,x\right]_{-1}^3 =$$

$$= 9 + 8 - 1 + \frac{8}{3} = \frac{56}{3}\,.$$

▲

I když ve Fubiniově větě je možné volit libovolné pořadí integrace, někdy je v konkrétním případě jedna varianta výrazně jednodušší, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.18. Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle$ (pro $y > 0$ klademe $0^y = 0$).

Řešení. Integrand je funkce spojitá na M. Pro $x > 0$ je to zřejmé. Pro $0 < x < 1$ a $1 \leqq y \leqq 2$ platí nerovnosti $2 \ln x \leqq y \ln x \leqq \ln x$, a tedy $x^2 \leqq x^y \leqq x$. Odtud plyne spojitost integrandu v bodech $[0, y]$, $1 \leqq y \leqq 2$. Použijeme Fubiniovu větu a začneme integrovat nejprve podle proměnné y:

$$\iint\limits_M x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_1^2 x^y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Vnitřní integrál bude

$$\int_1^2 x^y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_1^2 = \frac{x^2 - x}{\ln x} \quad \text{pro } x \neq 0 \text{ a } x \neq 1,$$
$$\int_1^2 0^y \,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{pro } x = 0 \quad \text{a} \quad \int_1^2 1^y \,\mathrm{d}y = 1 \quad \text{pro } x = 1.$$

Protože existence a hodnota jednoduchého určitého integrálu nezávisí na hodnotě integrandu ve dvou konkrétních bodech, můžeme hodnoty v nule a jedničce ignorovat. Navíc je snadné se přesvědčit pomocí l'Hospitalova pravidla, že $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - x)/\ln x = 0$ a $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - x)/\ln x = 1$. Vnitřní integrál proto představuje spojitou funkci na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Avšak vnější integrál

$$\int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} \,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

se nám elementárními metodami nepodaří spočítat. Nenajdeme totiž primitivní funkci.

Zkusíme tedy integrovat nejprve podle proměnné x:

$$\iint\limits_M x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Vnitřní integrál bude

$$\int_0^1 x^y \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 = \frac{1}{y+1}.$$

Celkově dostaneme

$$\iint\limits_M x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \big[\ln |y+1| \big]_1^2 = \big[\ln(y+1) \big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

Je dobré si uvědomit, že toto číslo je současně hodnotou integrálu (1.6), který jsme nedokázali spočítat. To je důsledkem toho, že oba dvojnásobné integrály musí mít podle Fubiniovy věty stejnou hodnotu. ▲

Poznámka 1.19. Ve Fubiniově větě 1.14 nelze ve vnitřních integrálech obecně nahradit horní resp. dolní jednoduchý integrál jednoduchým integrálem. Uvažujme např. funkci f definovanou na obdélníku $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ vztahem

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } a \leqq x < b,\ c \leqq y \leqq d, \\ \chi(y) & \text{pro } x = b,\ c \leqq y \leqq d, \end{cases}$$

kde χ je tzv. Dirichletova[1] funkce ($\chi(y) = 1$ pro racionální y a $\chi(y) = 0$ pro iracionální y). Funkce f je na obdélníku integrovatelná. To lze dokázat přímo (viz cvičení 1 k této kapitole) nebo to plyne z lemmatu 1.12. Ale $\int_c^d f(b, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \chi(y)\,\mathrm{d}y$ neexistuje, protože $\underline{\int_c^d} \chi(y)\,\mathrm{d}y = 0 < d - c = \overline{\int_c^d} \chi(y)\,\mathrm{d}y$.

Věta 1.20. *Buďte f, g funkce integrovatelné na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a nechť C je konstanta. Pak*

a) *funkce Cf je integrovatelná na M a*

$$\iint_M Cf(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y; \tag{1.7}$$

b) *funkce $|f|$ je integrovatelná na M a*

$$\left|\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqq \iint_M |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y; \tag{1.8}$$

c) *funkce $f + g$ je integrovatelná na M a*

$$\iint_M \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.9}$$

[1] **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805–1859) (čti diriklé) — německý matematik. Zabýval se teorií čísel, matematickou analýzou a rovnicemi matematické fyziky.

Důkaz.

a) Z příkladu 1.5 víme, že $\iint\limits_M 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \cdot \mathrm{m}(M) = 0$. Tvrzení a) tedy platí pro $C = 0$.

Předpokládejme nyní, že $C > 0$. Pro libovolné dělení $D = \{M_{ik} : (i,k) \in I\}$ obdélníku M zřejmě platí

$$\inf\{Cf(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\} = C \inf\{f(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\} = Cv_{ik},$$

kde $v_{ik} = \inf\{f(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\}$. Analogicky

$$\sup\{Cf(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\} = CV_{ik},$$

kde $V_{ik} = \sup\{f(x,y) : [x,y] \in M_{ik}\}$. Odtud dostáváme

$$s(D, Cf) = Cs(D, f), \qquad S(D, Cf) = CS(D, f)$$

pro libovolné dělení D obdélníku M. Tedy

$$\begin{aligned}\underline{\iint\limits_M} Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \sup\{s(D,Cf) : D \in \mathscr{D}\} = \sup\{Cs(D,f) : D \in \mathscr{D}\} = \\ &= C\sup\{s(D,f) : D \in \mathscr{D}\} = C \underline{\iint\limits_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\iint\limits_M} Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \inf\{S(D,Cf) : D \in \mathscr{D}\} = \inf\{CS(D,f) : D \in \mathscr{D}\} = \\ &= C\inf\{S(D,f) : D \in \mathscr{D}\} = C \overline{\iint\limits_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Protože jsme zjistili, že

$$\underline{\iint\limits_M} Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_M} Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

je funkce Cf na M integrovatelná a platí

$$\iint\limits_M Cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V případě $C < 0$ platí $s(D, Cf) = CS(D, f)$, $S(D, Cf) = Cs(D, f)$ a zbytek důkazu se provede analogicky jako v případě $C > 0$.

b) Buď D libovolné dělení obdélníku M s dílky M_{ij}, $(i,j) \in I$. Položme

$$u_{ij} = \inf\{f(x,y) : [x,y] \in M_{ij}\}, \qquad U_{ij} = \sup\{f(x,y) : [x,y] \in M_{ij}\},$$
$$v_{ij} = \inf\{|f(x,y)| : [x,y] \in M_{ij}\}, \quad V_{ij} = \sup\{|f(x,y)| : [x,y] \in M_{ij}\}$$

pro $(i,j) \in I$. Pro každé dva body $[x,y], [\tilde{x},\tilde{y}] \in M_{ij}$ platí

$$-(U_{ij} - u_{ij}) = u_{ij} - U_{ij} \leqq f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y}) \leqq U_{ij} - u_{ij},$$

takže $|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| \leqq U_{ij} - u_{ij}$. Odtud plyne

$$|f(x,y)| = |f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y}) + f(\tilde{x},\tilde{y})| \leqq |f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| + \\ + |f(\tilde{x},\tilde{y})| \leqq U_{ij} - u_{ij} + |f(\tilde{x},\tilde{y})|.$$

pro každé $[x,y], [\tilde{x},\tilde{y}] \in M_{ij}$. Necháme-li v posledním vztahu proběhnout proběhnout bod $[x,y]$ celý dílek M_{ij}, zjistíme, že pro libovolný bod $[\tilde{x},\tilde{y}] \in M_{ij}$ platí

$$V_{ij} \leqq U_{ij} - u_{ij} + |f(\tilde{x},\tilde{y})|.$$

Odtud vyplývá nerovnost

$$V_{ij} \leqq U_{ij} - u_{ij} + v_{ij},$$

takže

$$0 \leqq V_{ij} - v_{ij} \leqq U_{ij} - u_{ij},$$

a tudíž po vynásobení čísly $\mathrm{m}(M_{ij})$ a sečtení přes všechna $(i,j) \in I$ obdržíme

$$0 \leqq S(D,|f|) - s(D,|f|) \leqq S(D,f) - s(D,f).$$

Položíme-li v předchozích nerovnostech $D = D_n$, kde $\{D_n\}$ je libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M, dostáváme podle věty 1.10 limitním přechodem $n \to \infty$

$$0 \leqq \overline{\iint_M} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_M} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \\ \leqq \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Je tedy $|f|$ na M integrovatelná. Nerovnost mezi integrály plyne z nerovnosti

$$-S(D,|f|) \leqq S(D,f) \leqq S(D,|f|),$$

která snadno vyplývá ze zřejmých nerovností $-V_{ij} \leqq U_{ij} \leqq V_{ij}$.

c) Buď D libovolné dělení obdélníku M s dílky M_{ij}, $(i, j) \in I$. Označme

$$u_{ij} = \inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}, \qquad v_{ij} = \inf\{g(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\},$$
$$w_{ij} = \inf\{f(x, y) + g(x, y) : [x, y] \in M_{ij}\}.$$

Pak $f(x, y)+g(x, y) \geqq u_{ij}+v_{ij}$ pro každé $[x, y] \in M_{ij}$, a tedy $u_{ij}+v_{ij} \leqq w_{ij}$. Odtud

$$\begin{aligned} s(D, f + g) &= \sum_{i\in I} w_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) \geqq \sum_{i\in I}(u_{ij} + v_{ij})\,\mathrm{m}(M_{ij}) = \\ &= \sum_{i\in I} u_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) + \sum_{i\in I} v_{ij}\,\mathrm{m}(M_{ij}) = s(D, f) + s(D, g). \end{aligned}$$

Podobně se dokáže

$$S(D, f + g) \leqq S(D, f) + S(D, g).$$

Pro libovolné dělení D obdélníku M tedy platí

$$s(D, f) + s(D, g) \leqq s(D, f + g) \leqq S(D, f + g) \leqq S(D, f) + S(D, g).$$

Pro libovolnou nulovou posloupnost $\{D_n\}$ dělení obdélníku M tudíž máme

$$s(D_n, f)+s(D_n, g) \leqq s(D_n, f+g) \leqq S(D_n, f+g) \leqq S(D_n, f)+S(D_n, g).$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme

$$\begin{aligned} &\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \underline{\iint\limits_M} \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \\ &\leqq \overline{\iint\limits_M} \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Odtud vzhledem k rovnosti krajních výrazů plyne, že

$$\begin{aligned} \underline{\iint\limits_M} \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \overline{\iint\limits_M} \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Je tedy funkce $f + g$ integrovatelná na M a platí

$$\iint\limits_M \big[f(x, y) + g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

□

Věta 1.21. *Nechť funkce f je ohraničená na obdélníku M. Buď D dělení obdélníku M s dílky dělení M_{ij}, $(i, j) \in J$, kde $J = \{(i, j) : i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, s\}$.*

Pak funkce f je integrovatelná na obdélníku M právě tehdy, když je integrovatelná na všech obdélnících M_{ij}, $(i, j) \in J$. V tom případě platí

$$\iint\limits_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{(i,j)\in J} \iint\limits_{M_{ij}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.10}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že dělení D má jen dva dílky, označme je M_1, M_2 (obdélníky M_1, M_2 leží buď vedle sebe, nebo nad sebou).

Buď $\{D'_n\}$ libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M_1, $\{D''_n\}$ libovolná nulová posloupnost dělení obdélníku M_2. Pak dílky dělení D'_n, D''_n určují dělení D_n obdélníku M takové, že dílky tohoto dělení ležící v obdélníku M_1 jsou zjemněním $\widehat{D}'_n$ dělení D'_n a dílky ležící v obdélníku M_2 jsou zjemněním $\widehat{D}''_n$ dělení D''_n. Zřejmě jsou posloupnosti $\{D_n\}$, $\{\widehat{D}'_n\}$ a $\{\widehat{D}''_n\}$ nulové a pro každé n platí

$$s(D_n, f) = s(\widehat{D}'_n, f) + s(\widehat{D}''_n, f).$$

Odtud limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme, že

$$\underline{\iint}_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \underline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.11}$$

Podobně se ukáže, že

$$\overline{\iint}_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \overline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.12}$$

Odečtením rovností (1.11) a (1.12) obdržíme

$$\begin{aligned} &\overline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \overline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \\ &- \underline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint}_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint}_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Předpokládejme nejprve, že funkce f je integrovatelná na obdélníku M, tedy

$$\underline{\iint}_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint}_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

takže pravá strana rovnosti (1.13) je rovna nule. Protože

$$\overline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq 0,$$

$$\overline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq 0,$$

dostáváme z nulové levé strany rovnosti (1.13)

$$\overline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint}_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\overline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint}_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Proto je funkce f integrovatelná na M_1 i M_2. Ze vztahů (1.11) a (1.12) nyní plyne

$$\iint_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.14}$$

Analogicky se z rovnosti (1.13) dokáže, že z integrovatelnosti funkce f na M_1, M_2 plyne její integrovatelnost na M i rovnost (1.14).

Nyní se tvrzení snadno rozšíří indukcí na případ $r = 1$ a s je libovolné (dílky leží nad sebou) nebo $s = 1$ a r je libovolné (dílky leží vedle sebe). Obecný případ libovolných r, s pak dostaneme spojením těchto dvou speciálních případů. □

Důsledek 1.22. *Nechť $R_1 \subseteq R_2$ jsou obdélníky, funkce f je ohraničená na R_1 a $f(x, y) = 0$ pro každé $[x, y] \in R_2 \setminus R_1$. Pak je funkce f integrovatelná na R_1 právě tehdy, když je integrovatelná na R_2; přitom, nastane-li tento případ, platí*

$$\iint_{R_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.15}$$

Důkaz. Buď D dělení obdélníku R_2 takové, že jeden z jeho dílků je obdélník R_1. Tvrzení plyne z věty 1.21 a lemmatu 1.12. □

Věta 1.23. *Buďte f, g integrovatelné funkce na obdélníku $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak platí:*

a) *Je-li $f(x, y) \geqq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$, pak*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.16}$$

b) *Funkce* $\max\{f, g\}$ *a* $\min\{f, g\}$ *jsou integrovatelné na M.*

Důkaz.

a) Je-li $f(x, y) \geqq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$, je

$$\inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\} \geqq \inf\{g(x, y) : [x, y[\in M_{ik}\},$$
$$\sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\} \geqq \sup\{g(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}.$$

Odtud $s(D, f) \geqq s(D, g)$, $S(D, f) \geqq S(D, g)$ pro libovolné $D \in \mathscr{D}(M)$. Poslední nerovnosti implikují

$$\underline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \underline{\iint\limits_M} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\overline{\iint\limits_M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \overline{\iint\limits_M} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

takže z integrovatelnosti funkcí f, g na M plyne

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Protože

$$\max\{f(x, y), g(x, y)\} = \frac{1}{2}\big[f(x, y) + g(x, y) + |f(x, y) - g(x, y)|\big],$$
$$\min\{f(x, y), g(x, y)\} = \frac{1}{2}\big[f(x, y) + g(x, y) - |f(x, y) - g(x, y)|\big]$$

a funkce f, g jsou integrovatelné na M, jsou podle věty 1.20 na M integrovatelné i funkce $f + g$, $f - g$ a $|f - g|$, a tudíž i $f + g + |f - g|$, $f + g - |f - g|$. $\square$

1.2. Ekvivalentní definice dvojného integrálu

Myšlenka zavést integrál pomocí horních a dolních součtů pochází od Darbouxe[1]. Původní Riemannův přístup byl jiný. Uvedeme si jeho definici a dokážeme, že je ekvivalentní s definicí integrálu z předchozího oddílu. Pro účely tohoto oddílu označíme integrál ve smyslu definice 1.3 symbolem $(\mathscr{D})\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a nazveme $(\mathscr{D})$-integrál. Funkci mající $(\mathscr{D})$-integrál nazveme $(\mathscr{D})$-integrovatelnou.

Nechť $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ je dvojrozměrný interval a D jeho dělení s dílky M_{ik}, kde $(i, k) \in J$, $J = \{(i, k) : i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n\}$. Vyberme v každém dílku M_{ik} bod $[\xi_i, \eta_k]$. Množinu bodů $\Xi = \{[\xi_i, \eta_k] : (i, k) \in J\}$ nazýváme *výběrem reprezentantů* dílků dělení D.

Buď f funkce dvou proměnných definovaná na obdélníku M. Položme

$$\sigma(D, \Xi, f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_k)\,\mathrm{m}(M_{ik}).$$

Číslo $\sigma(D, \Xi, f)$ nazýváme *integrálním součtem* funkce f při dělení D a výběru reprezentantů Ξ (viz obr. 1.7, kde za reprezentanty dílků jsou zvoleny jejich středy).

Definice 1.24. Řekneme, že funkce f je $(\mathscr{R})$-*integrovatelná* (má $(\mathscr{R})$-*integrál*) na obdélníku M, jestliže existuje konstanta $I \in \mathbb{R}$ s následující vlastností:

K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathscr{D}(M)$ s normou $\nu(D) < \delta$ a pro libovolný výběr Ξ reprezentantů dílků tohoto dělení platí $|I - \sigma(D, \Xi, f)| < \varepsilon$.

Číslo I nazýváme *dvojným* $(\mathscr{R})$-*integrálem* funkce f na množině M a píšeme

$$(\mathscr{R}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

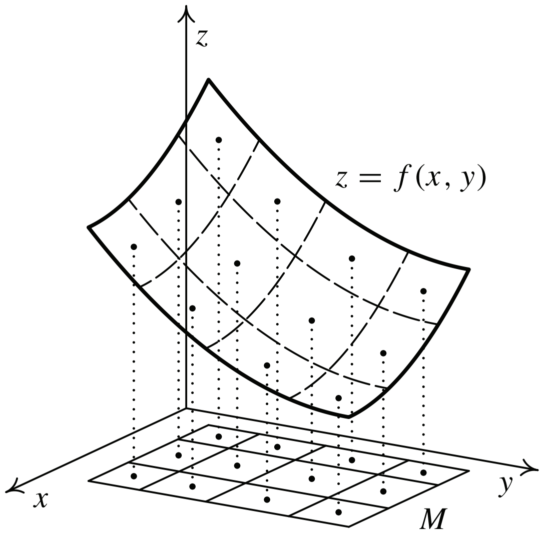
Snadno se ověří, že číslo I z předchozí definice je určeno jednoznačně.

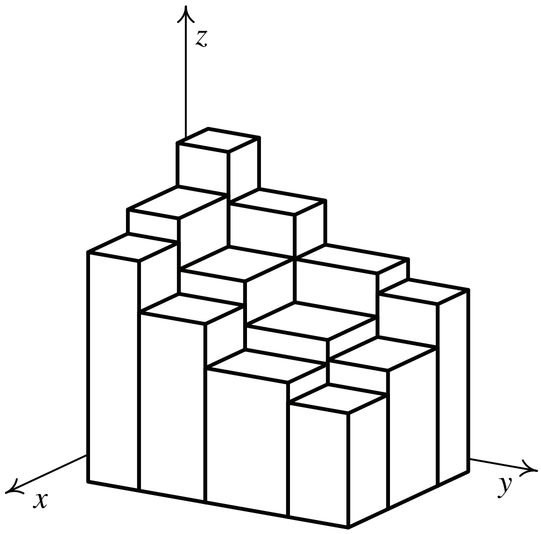
Zatímco pro konstrukci z definice 1.3 bylo podstatné, aby funkce f byla ohraničená na obdélníku M, v definici 1.24 tento předpoklad nepotřebujeme.

Věta 1.25. *Nechť funkce f je $(\mathscr{D})$-integrovatelná na obdélníku M. Pak je funkce f na M také $(\mathscr{R})$-integrovatelná a platí*

$$(\mathscr{D}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\mathscr{R}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[1] **Jean Gaston Darboux** (1842–1917) (čti darbu) — francouzský matematik. Zabýval se diferenciální geometrií a matematickou analýzou.





Obr. 1.7: Geometrický význam integrálního součtu

Důkaz. Pro libovolné dělení D obdélníku M s dílky M_{ik}, $(i, k) \in J$, a libovolný výběr $\Xi = \{[\xi_i, \eta_k] : (i, k) \in J\}$ reprezentantů dílků tohoto dělení platí $v_{ik} \leqq f(\xi_i, \eta_k) \leqq V_{ik}$, kde $v_{ik} = \inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}$, $V_{ik} = \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}$. Z definice dolního, horního a integrálního součtu odtud dostáváme

$$\begin{aligned} s(D, f) = \sum_{(i,k)\in J} v_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) \leqq \sum_{(i,k)\in J} f(\xi_i, \eta_k)\,\mathrm{m}(M_{ik}) = \sigma(D, \Xi, f) \leqq \\ \leqq \sum_{(i,k)\in J} V_{ik}\,\mathrm{m}(M_{ik}) = S(D, f). \end{aligned}$$

Kromě toho z definice $(\mathscr{D})$-integrálu plyne nerovnost

$$s(D, f) \leqq (\mathscr{D}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, f).$$

Pro každé dělení D a libovolný výběr Ξ reprezentantů jeho dílků tedy platí

$$\left| (\mathscr{D}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma(D, \Xi, f) \right| \leqq S(D, f) - s(D, f).$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Podle lemmatu 1.7 a poznámky 1.8 k číslu $\varepsilon/2 > 0$

existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení D s normou $\nu(D) < \delta$ platí

$$0 \leqq (\mathscr{D}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - s(D, f) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 \leqq S(D, f) - (\mathscr{D}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2},$$

takže

$$0 \leqq S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Pro každé dělení D, které má normu $\nu(D) < \delta$, a libovolný výběr Ξ reprezentantů jeho dílků tudíž platí

$$\left|(\mathscr{D}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma(D, \Xi, f)\right| < \varepsilon,$$

což podle definice 1.24 znamená, že funkce f je na obdélníku M $(\mathscr{R})$-integrovatelná a hodnota $(\mathscr{R})$-integrálu je rovna hodnotě $(\mathscr{D})$-integrálu. □

Lemma 1.26. *Je-li funkce f $(\mathscr{R})$-integrovatelná na obdélníku M, je na M ohraničená.*

Důkaz. K číslu $\varepsilon = 1$ existuje podle definice 1.24 číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathscr{D}(M)$ s normou $\nu(D) < \delta$ a libovolný výběr Ξ reprezentantů dílků tohoto dělení je

$$|I - \sigma(D, \Xi, f)| < 1,$$

kde $I = (\mathscr{R}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Pak

$$|\sigma(D, \Xi, f)| = |\sigma(D, \Xi, f) - I + I| \leqq |\sigma(D, \Xi, f) - I| + |I| < 1 + |I| = K.$$

Absolutní hodnoty integrálních součtů příslušných všem dělením $D \in \mathscr{D}(M)$ s normou $\nu(D) < \delta$ jsou tudíž bez ohledu na výběr reprezentantů dílků dělení ohraničené konstantou K.

Zvolme pevně jedno takové dělení D obdélníku M s dílky M_{ik}, $(i, k) \in J$. Připusťme, že funkce f není ohraničená na M. Pak existuje $(i_0, k_0) \in J$ tak, že na obdélníku $M_{i_0k_0}$ není f ohraničená. Položme $J_0 = J \setminus \{(i_0, k_0)\}$.

Pro každé $(i, k) \in J_0$ zvolme libovolný bod $[\xi_i, \eta_k] \in M_{ik}$. Označme

$$L = \sum_{(i,k)\in J_0} f(\xi_i, \eta_k)\,\mathrm{m}(M_{ik}).$$

Protože funkce f není na dílku $M_{i_0k_0}$ ohraničená, lze najít bod $[\xi_{i_0}, \eta_{k_0}] \in M_{i_0k_0}$ tak, že

$$\left|f(\xi_{i_0}, \eta_{k_0})\right| \geqq \frac{K + |L| + 1}{\mathrm{m}(M_{i_0k_0})}.$$

Položme $\Xi = \{[\xi_i, \eta_k] : (i, k) \in J\}$. Pak

$$\begin{aligned}
|\sigma(D, \Xi, f)| &= \Big| f(\xi_{i_0}, \eta_{k_0})\, \mathrm{m}(M_{i_0k_0}) + \sum_{(i,k)\in J_0} f(\xi_i, \eta_k)\, \mathrm{m}(M_{ik}) \Big| \geqq \\
&\geqq \big| f(\xi_{i_0}, \eta_{k_0}) \big|\, \mathrm{m}(M_{i_0k_0}) - \Big| \sum_{(i,k)\in J_0} f(\xi_i, \eta_k)\, \mathrm{m}(M_{ik}) \Big| \geqq \\
&\geqq K + |L| + 1 - |L| = K + 1,
\end{aligned}$$

což je spor. Funkce f je tedy na obdélníku M ohraničená. □

Lemma 1.27. *Nechť funkce f je ohraničená na obdélníku M a D je dělení M. Pak k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existují výběry Ξ^1, Ξ^2 reprezentantů dílků dělení D takové, že $S(D, f) < \sigma(D, \Xi^1, f) + \varepsilon$, $s(D, f) > \sigma(D, \Xi^2, f) - \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť D je dělení obdélníku M s dílky M_{ik}, $(i, k) \in J$. Označme r celkový počet dílků M_{ik}.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo a $(i, k) \in J$. Z definice suprema V_{ik} funkce f na M_{ik} vyplývá, že existuje bod $[\xi_i, \eta_k] \in M_{ik}$, pro nějž

$$0 \leqq V_{ik} - f(\xi_i, \eta_k) < \frac{\varepsilon}{r\, \mathrm{m}(M_{ik})}\,.$$

Položme $\Xi^1 = \{[\xi_i, \eta_k] : (i, k) \in J\}$. Potom

$$\begin{aligned}
S(D, f) - \sigma(D, \Xi^1, f) &= \sum_{(i,k)\in J} \big[V_{ik} - f(\xi_i, \eta_k)\big]\, \mathrm{m}(M_{ik}) < \\
&< \sum_{(i,k)\in J} \frac{\varepsilon}{r\, \mathrm{m}(M_{ik})}\, \mathrm{m}(M_{ik}) = \sum_{(i,k)\in J} \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

což je první nerovnost. Obdobně se dokáže existence Ξ^2 z nerovnosti pro dolní součet. □

Věta 1.28. *Nechť funkce f je $(\mathscr{R})$-integrovatelná na obdélníku M. Pak je funkce f na M také $(\mathscr{D})$-integrovatelná a platí*

$$(\mathscr{R}) \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\mathscr{D}) \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Podle lemmatu 1.26 je $(\mathscr{R})$-integrovatelná funkce f na obdélníku M ohraničená, můžeme tedy konstruovat její dolní a horní součty.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Podle definice 1.24 k číslu $\varepsilon/4 > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathscr{D}(M)$ s normou $\nu(D) < \delta$ a pro libovolný výběr Ξ reprezentantů dílků tohoto dělení platí

$$\Big| (\mathscr{R}) \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma(D, \Xi, f) \Big| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Zvolme pevně jedno takové dělení D. Podle lemmatu 1.27 lze k číslu $\varepsilon/4 > 0$ nalézt takové výběry Ξ^1, Ξ^2 reprezentantů dílků dělení D, že $S(D, f) < \sigma(D, \Xi^1, f) + \varepsilon/4$ a $s(D, f) > \sigma(D, \Xi^2, f) - \varepsilon/4$. Z předchozích nerovností dostaneme

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &< \sigma(D, \Xi^1, f) - \sigma(D, \Xi^2, f) + \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= \sigma(D, \Xi^1, f) - (\mathscr{R}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\ &\quad + (\mathscr{R}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma(D, \Xi^2, f) + \frac{\varepsilon}{2} < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.9 je tudíž funkce f na obdélníku M $(\mathscr{D})$-integrovatelná. Rovnost

$$(\mathscr{R}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\mathscr{D}) \iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

plyne z věty 1.25. □

1.3. Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$

V tomto oddílu přiřadíme některým omezeným množinám v rovině nezáporné číslo, které bude zobecněním pojmu *obsah množiny*, známého z elementární geometrie. Při konstrukci použijeme dvojný integrál funkce definované na obdélníku.

Definice 1.29. Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ množina. Funkce $\chi_M \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin M \end{cases}$$

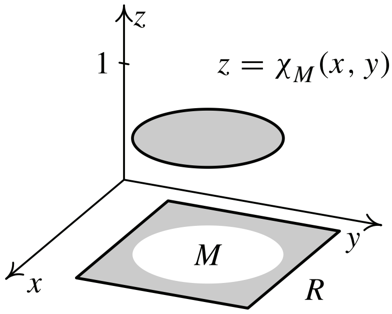
se nazývá *charakteristická funkce množiny M*.

Poznámka 1.30. Je-li množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená, existuje zřejmě vhodný obdélník $R = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ tak, že $M \subseteq R$. Funkce χ_M je definovaná v celé rovině $\mathbb{R}^2$, tedy i na obdélníku R — viz obr. 1.8, kde M je kruh.

Definice 1.31. Řekneme, že omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je (*jordanovsky*) *měřitelná*, jestliže pro nějaký obdélník $R \supseteq M$ je charakteristická funkce χ_M množiny M integrovatelná na obdélníku R. Přitom klademe

$$\mathrm{m}(M) = \iint\limits_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

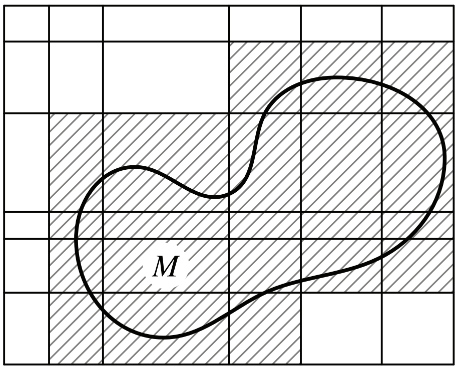
a číslo $\mathrm{m}(M)$ nazýváme (*Jordanovou*) *mírou* množiny M.



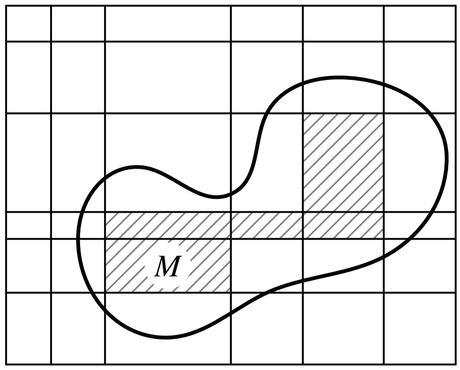
Obr. 1.8: Charakteristická funkce kruhu

Poznámka 1.32.

1. Místo $\mathrm{m}(M)$ budeme také psát $\mathrm{m}_2(M)$, abychom zdůraznili, že jde o míru ve dvojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^2$.
2. Definice míry je korektní. Nechť R_1, R_2 jsou dva obdélníky takové, že platí $M \subseteq R_1$, $M \subseteq R_2$, a nechť je funkce χ_M integrovatelná na R_1. Buď R takový obdélník, že $R_1 \cup R_2 \subseteq R$. Podle důsledku 1.22 je funkce χ_M integrovatelná na R, a tedy také na R_2. Přitom platí
$$\iint\limits_{R_1} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{R_2} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
Existence ani hodnota integrálu z definice 1.31 tedy nezávisí na volbě obdélníku R, který zkoumanou množinu M obsahuje.
3. Je-li $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ obdélník, lze zvolit $R = M$. Pak
$$\mathrm{m}(M) = \iint\limits_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b - a)(d - c).$$
Definice 1.31 tedy pro obsah obdélníku dává stejnou hodnotu, jako se zavádí v elementární geometrii (a ve shodě s tím, jak byl symbol $\mathrm{m}(M)$ zaveden na str. 4).



a) $S(D, \chi_M)$



b) $s(D, \chi_M)$

Obr. 1.9: Geometrické znázornění horního a dolního součtu funkce χ_M

Poznámka 1.33. Všimněme si geometrického významu horního a dolního součtu integrálu $\iint\limits_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vystupujícího v definici 1.31. Horní součet $S(D, \chi_M)$ je součet obsahů všech dílků, které obsahují aspoň jeden bod množiny M, dolní součet $s(D, \chi_M)$ je součet obsahů všech dílků, které jsou podmnožinou množiny M (viz obr. 1.9). Součet $S(D, \chi_M)$ tedy aproximuje „obsah“ množiny M shora, zatímco součet $s(D, \chi_M)$ aproximuje „obsah“ množiny M zdola.

Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly, někdy se Jordanova míra zavádí „přímo“ bez použití integrálu. V různých pramenech — viz např. [21, 23] — se konstrukce v detailech liší, nicméně vedou na tentýž systém měřitelných množin, jako jsme dostali my. Naznačíme si princip, jak lze Jordanovu míru alternativně zavést.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je omezená množina a $R = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, $a < b$, $c < d$, je obdélník obsahující M, přičemž a, b, c, d jsou *celá* čísla. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme D_n^1 ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s normou $\nu(D_n^1) = 1/2^n$, D_n^2 ekvidistantní dělení intervalu $\langle c, d\rangle$ s normou $\nu(D_n^2) = 1/2^n$ a $D_n = D_n^1 \times D_n^2$ dělení obdélníku R. Dílky dělení D_n jsou čtverce o stranách $1/2^n$.

Buď $J_n(M)$ sjednocení všech dílků dělení D_n, které jsou podmnožinou M, a $O_n(M)$ sjednocení všech dílků dělení D_n, které mají neprázdný průnik s M. Definujme míry těchto množin $\mathrm{m}(J_n(M))$ resp. $\mathrm{m}(O_n(M))$ jako součty obsahů dílků dělení D_n, které tvoří tyto množiny. Zřejmě platí $\mathrm{m}(J_n(M)) = s(D_n, \chi_M)$ a $\mathrm{m}(O_n(M)) = S(D_n, \chi_M)$ — srovnejte obr. 1.9.

Snadno se ověří že pro každé $m \leqq n$ platí $J_m(M) \subseteq J_n(M)$, $O_m(M) \supseteq O_n(M)$, $\mathrm{m}(J_m(M)) \leqq \mathrm{m}(J_n(M))$, $\mathrm{m}(O_m(M)) \geqq \mathrm{m}(O_n(M))$ a pro libovolné m, n platí $J_m(M) \subseteq O_n(M)$, $\mathrm{m}(J_m(M)) \leqq \mathrm{m}(O_n(M))$. Z těchto nerovností vyplývá existence konečných limit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}(J_n(M)) = \mathrm{m}_*(M)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}(O_n(M)) = \mathrm{m}^*(M)$. Platí $\mathrm{m}_*(M) \leqq \mathrm{m}^*(M)$. Tato čísla nazýváme *vnitřní míra* a *vnější míra* množiny M. Definujeme, že množina M

je měřitelná, když $\mathrm{m}_*(M) = \mathrm{m}^*(M)$. Z věty 1.10 plyne, že $\underline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}_*(M)$ a $\overline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}^*(M)$. Tudíž takto zavedený pojem měřitelnosti splývá s pojmem zavedeným v definici 1.31.

Lemma 1.34. *Je-li $h(M)$ hranice omezené množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a je-li $R \supseteq M$ libovolný obdélník, pak*

$$\overline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Buď D libovolné dělení obdélníku R s dílky R_{ik}, $(i, k) \in I$. Označme

$$v_{ik} = \inf\{\chi_M(x, y) : [x, y] \in R_{ik}\}, \qquad V_{ik} = \sup\{\chi_M(x, y) : [x, y] \in R_{ik}\},$$
$$U_{ik} = \sup\{\chi_{h(M)}(x, y) : [x, y] \in R_{ik}\}.$$

Zřejmě $0 \leqq v_{ik} \leqq V_{ik} \leqq 1$ a $0 \leqq U_{ik} \leqq 1$; přitom platí:

i) je-li $h(M) \cap R_{ik} \neq \emptyset$, pak $U_{ik} = 1$;

ii) je-li $h(M) \cap R_{ik} = \emptyset$, pak $U_{ik} = 0$ a $v_{ik} = V_{ik}$.

Poslední rovnost zdůvodníme takto ($\mathring{M}$ značí vnitřek množiny M):
Je $M = \mathring{M} \cup (h(M) \cap M)$, takže $M \cap R_{ik} = (\mathring{M} \cap R_{ik}) \cup (h(M) \cap M \cap R_{ik}) = \mathring{M} \cap R_{ik}$, protože $h(M) \cap R_{ik} = \emptyset$. Je-li $\mathring{M} \cap R_{ik} = \emptyset$, je $v_{ik} = V_{ik} = 0$, je-li naopak $\mathring{M} \cap R_{ik} \neq \emptyset$, je nutně $R_{ik} \subset \mathring{M}$. Připusťme, že tomu tak není. Označme $\operatorname{ext} M = \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup h(M))$ vnějšek množiny M. Protože $\mathbb{R}^2 = \mathring{M} \cup h(M) \cup \operatorname{ext} M$, platí $R_{ik} = (\mathring{M} \cap R_{ik}) \cup (h(M) \cap R_{ik}) \cup (\operatorname{ext} M \cap R_{ik}) = (\mathring{M} \cap R_{ik}) \cup (\operatorname{ext} M \cap R_{ik})$. Tedy otevřené a disjunktní množiny $\mathring{M}$ a $\operatorname{ext} M$ pokrývají dílek R_{ik}, přičemž $\mathring{M} \cap R_{ik} \neq \emptyset$, $\operatorname{ext} M \cap R_{ik} \neq \emptyset$. To ale není možné, protože dílek R_{ik} je souvislá množina. Tedy $R_{ik} \subset \mathring{M}$ a $v_{ik} = V_{ik} = 1$.

Z vlastností i) a ii) plynou nerovnosti $V_{ik} - v_{ik} \leqq U_{ik}$. Odtud

$$S(D, \chi_M) - s(D, \chi_M) = \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\,\mathrm{m}(R_{ik}) - \sum_{(i,k)\in I} v_{ik}\,\mathrm{m}(R_{ik}) =$$
$$= \sum_{(i,k)\in I} (V_{ik} - v_{ik})\,\mathrm{m}(R_{ik}) \leqq \sum_{(i,k)\in I} U_{ik}\,\mathrm{m}(R_{ik}) = S(D, \chi_{h(M)}).$$

Tudíž

$$\overline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, \chi_{h(M)})$$

pro libovolné $D \in \mathscr{D}(M)$, a tedy

$$\overline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

□

Věta 1.35. *Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená množina a $\mathrm{m}(h(M)) = 0$, pak je M měřitelná.*

Důkaz. Je-li $R \supseteq M$ libovolný obdélník, pak využitím lemmatu 1.34 dostáváme

$$0 = \mathrm{m}(h(M)) = \iint_R \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq$$

$$\geqq \overline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq 0.$$

Poslední nerovnost je tedy rovností, tudíž funkce χ_M je integrovatelná na R, takže množina M je měřitelná. □

Poznámka 1.36. Obrácené tvrzení k větě 1.35 dokážeme později jako větu 1.40.

Věta 1.37. *Je-li $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ a je-li M_2 měřitelná a $\mathrm{m}(M_2) = 0$, pak rovněž M_1 je měřitelná a $\mathrm{m}(M_1) = 0$.*

Důkaz. Buď $R \supseteq M_2$ libovolný obdélník. Pak z $M_1 \subseteq M_2$ plyne $0 \leqq \chi_{M_1}(x, y) \leqq \leqq \chi_{M_2}(x, y)$ pro každý bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Odtud vyplývá $0 \leqq s(D, \chi_{M_1})$, $S(D, \chi_{M_1}) \leqq S(D, \chi_{M_2})$ pro libovolné dělení D obdélníku R, a tudíž

$$0 \leqq \underline{\iint_R} \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint_R} \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq$$

$$\leqq \overline{\iint_R} \chi_{M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R \chi_{M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

což implikuje

$$\underline{\iint_R} \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_R} \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}(M_1) = 0.$$

□

Věta 1.38. *Pro Jordanovu míru platí následující tvrzení:*

a) $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$.

b) *Jsou-li* M_1, M_2 *měřitelné množiny,* $M_1 \subseteq M_2$*, pak* $\mathrm{m}(M_1) \leqq \mathrm{m}(M_2)$.

c) $\mathrm{m}(M) \geqq 0$ *pro libovolnou měřitelnou množinu* M.

d) *Jsou-li množiny* M_1, M_2 *měřitelné, pak také množiny* $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M_1 \setminus M_2$ *jsou měřitelné.*

e) *Je-li* $y = g(x)$, $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$*, spojitá funkce, pak graf funkce* g*, tj. množina* $G = \{[x, g(x)] : x \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$*, je měřitelná množina a má míru rovnu nule.*

f) *Je-li* $x = h(y)$, $y \in \langle \gamma, \delta \rangle$*, spojitá funkce, pak graf funkce* h*, tj. množina* $H = \{[h(y), y] : y \in \langle \gamma, \delta \rangle\}$*, je měřitelná množina a má míru rovnu nule.*

Důkaz.

a) Tvrzení plyne z toho, že prázdná množina je obsažena v jakémkoliv obdélníku a její charakteristická funkce je nulová.

b) Nechť $R \supseteq M_2$ je obdélník. Díky inkluzi $M_1 \subseteq M_2$ platí $\chi_{M_1}(x, y) \leqq \chi_{M_2}(x, y)$ pro každý bod $[x, y]$. Odtud podle věty 1.23 plyne

$$\mathrm{m}(M_1) = \iint\limits_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_R \chi_{M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}(M_2).$$

c) Položíme-li v b) $M_1 = \emptyset$, $M_2 = M$, dostáváme

$$0 = \mathrm{m}(M_1) \leqq \mathrm{m}(M_2) = \mathrm{m}(M).$$

d) Zřejmě pro každý bod $[x, y]$ platí

$$\chi_{M_1 \cup M_2}(x, y) = \max\{\chi_{M_1}(x, y), \chi_{M_2}(x, y)\},$$
$$\chi_{M_1 \cap M_2}(x, y) = \min\{\chi_{M_1}(x, y), \chi_{M_2}(x, y)\}.$$

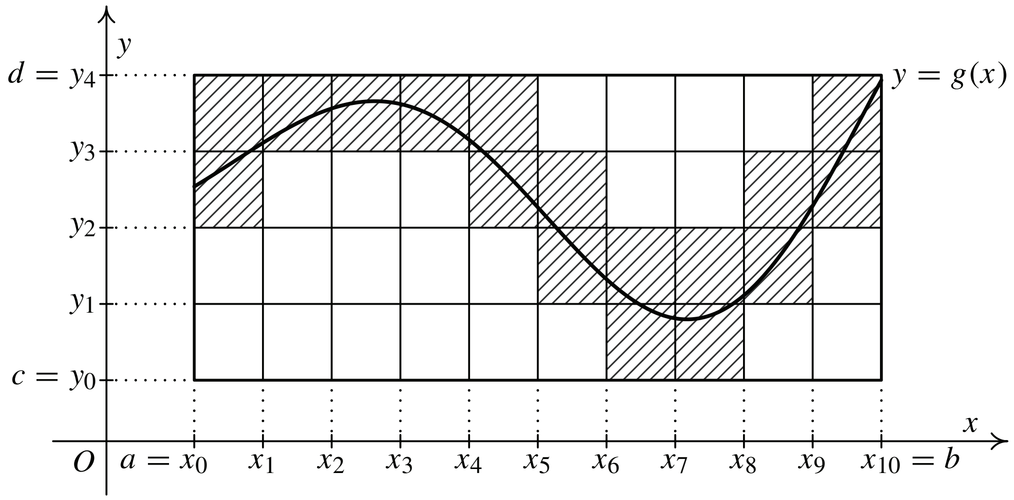
Podle věty 1.23 jsou funkce $\chi_{M_1 \cup M_2}$, $\chi_{M_1 \cap M_2}$ integrovatelné na libovolném obdélníku $R \supseteq M_1 \cup M_2$, takže množiny $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ jsou měřitelné. Měřitelnost množiny $M_1 \setminus M_2$ plyne ze vztahu

$$\chi_{M_1 \setminus M_2}(x, y) = \chi_{M_1}(x, y) - \chi_{M_2 \cap M_1}(x, y)$$

a z věty 1.20, neboť podle dokázané části d) je $M_1 \cap M_2$ měřitelná.

e) Funkce g je spojitá na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, existuje tedy na $\langle \alpha, \beta \rangle$ její maximum a minimum. Položme $a = \alpha$, $b = \beta$ a zvolme $c, d \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $c < \min\{g(x) : x \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$, $d > \max\{g(x) : x \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$. Pak graf G funkce g

leží v obdélníku $R = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Protože g je spojitá na $\langle \alpha, \beta\rangle$, existuje podle tvrzení před větou 1.11 k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ takové, že $x, x' \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $|x - x'| < \delta$ implikuje $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$. Zejména tedy k libovolnému číslu $n \in \mathbb{N}$ existuje číslo $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro $x, x' \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $|x - x'| \leqq (b - a)/m$ platí $|g(x) - g(x')| < (d - c)/n$.



Obr. 1.10

Zvolme dělení $D = D_x \times D_y$ obdélníku R s dílky R_{ik}, $(i, k) \in I$, takové, že $D_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $D_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, kde $x_i = a + (b - a)i/m$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, $y_k = c + (d - c)k/n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Položme $V_{ik} = \sup\{\chi_G(x, y) : [x, y] \in R_{ik}\}$. Pro $x, x' \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je $|g(x) - g(x')| < (d - c)/n$. Graf G může tedy mít neprázdný průnik maximálně se dvěma sousedícími dílky dělení D ležícími nad (pod) sebou (viz obr. 1.10). Celkový počet dílků majících neprázdný průnik s grafem G je tedy roven maximálně $2m$. Pro tyto dílky platí $V_{ik} = 1$, pro ostatní $V_{ik} = 0$, tudíž

$$S(D, \chi_G) = \sum_{(i,k)\in I} V_{ik}\, \mathrm{m}(R_{ik}) \leqq 2m\, \frac{b - a}{m} \cdot \frac{d - c}{n} = \frac{2(b - a)(d - c)}{n}.$$

Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(b - a)(d - c)}{n} = 0,$$

platí $\inf\{S(D, \chi_G) : D \in \mathscr{D}(R)\} = 0$. Odtud $\overline{\iint_R} \chi_G(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. Protože

χ_G je nezáporná funkce, dostáváme

$$0 \leqq \underline{\iint_R} \chi_G(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \overline{\iint_R} \chi_G(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Tedy

$$\mathrm{m}(G) = \iint_R \chi_G(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

f) Důkaz se provede podobně jako v e) záměnou rolí x a y. □

Věta 1.39. *Jsou-li M_1, M_2 měřitelné množiny, pak platí:*

a) $\mathrm{m}(M_1 \cup M_2) = \mathrm{m}(M_1) + \mathrm{m}(M_2) - \mathrm{m}(M_1 \cap M_2)$.

b) $\mathrm{m}(M_1 \cup M_2) \leqq \mathrm{m}(M_1) + \mathrm{m}(M_2)$.

c) $\mathrm{m}(M_1 \setminus M_2) = \mathrm{m}(M_1) - \mathrm{m}(M_1 \cap M_2)$.

d) *Je-li navíc $M_1 \supseteq M_2$, pak* $\mathrm{m}(M_1 \setminus M_2) = \mathrm{m}(M_1) - \mathrm{m}(M_2)$.

e) *Platí-li navíc* $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) = 0$, *pak* $\mathrm{m}(M_1 \cup M_2) = \mathrm{m}(M_1) + \mathrm{m}(M_2)$.

Důkaz. Vzhledem k větě 1.38 plyne z měřitelnosti množin M_1, M_2 měřitelnost množin $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ a $M_1 \setminus M_2$. Buď $R \supseteq M_1 \cup M_2$ obdélník.

a) Protože $\chi_{M_1 \cup M_2}(x, y) = \chi_{M_1}(x, y) + \chi_{M_2}(x, y) - \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y)$, máme

$$\mathrm{m}(M_1 \cup M_2) = \iint_R \chi_{M_1 \cup M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_R \chi_{M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_R \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \mathrm{m}(M_1) + \mathrm{m}(M_2) - \mathrm{m}(M_1 \cap M_2).$$

b) Plyne z a), neboť $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) \geqq 0$.

c) Protože $\chi_{M_1 \setminus M_2}(x, y) = \chi_{M_1}(x, y) - \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y)$, platí

$$\mathrm{m}(M_1 \setminus M_2) = \iint_R \chi_{M_1 \setminus M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_R \chi_{M_1}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_R \chi_{M_1 \cap M_2}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}(M_1) - \mathrm{m}(M_1 \cap M_2).$$

d) Plyne z c).

e) Plyne z a). □

Dá se ukázat, že platí i obrácené tvrzení k větě 1.35:

Věta 1.40. *Je-li množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelná, pak je i její hranice $h(M)$ měřitelná a platí* $\mathrm{m}(h(M)) = 0$.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Nechť $R \supseteq M$ je libovolný obdélník. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že R je tak velký, že existuje obdélník R_1 s vlastností $M \subseteq R_1 \subset \mathring{R}$, kde $\mathring{R}$ je vnitřek obdélníku R. Protože množina M je měřitelná, je funkce χ_M integrovatelná na R a podle lemmatu 1.9 existuje dělení $D \in \mathscr{D}(R)$ s dílky R_{ij}, $(i, j) \in I$, takové, že $S(D, \chi_M) - s(D, \chi_M) < \varepsilon$. Nechť I', I'' a I''' jsou podmnožiny I takové, že

$$\begin{aligned}
&(i, j) \in I', \text{ právě když } R_{ij} \subseteq M,\\
&(i, j) \in I'', \text{ právě když } R_{ij} \cap M \neq \emptyset,\\
&(i, j) \in I''', \text{ právě když } R_{ij} \cap M = \emptyset.
\end{aligned}$$

Pak $I''' = I \setminus I''$, $I' \subseteq I''$, $I = I' \cup (I'' \setminus I') \cup I'''$, $I' \cap (I'' \setminus I') = \emptyset$, $I' \cap I''' = \emptyset$ a $I'' \cap I''' = \emptyset$. Množina I je tak rozdělena na tři disjunktní (ne nutně neprázdné) třídy I', $I'' \setminus I'$ a I'''. Přitom platí $\bigcup\limits_{(i,j)\in I'} R_{ij} \subseteq M \subseteq \bigcup\limits_{(i,j)\in I''} R_{ij} \subseteq R$. Položme $V_{ij} = \sup\{\chi_M(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}$, $v_{ij} = \inf\{\chi_M(x, y) : [x, y] \in R_{ij}\}$ pro každé $(i, j) \in I$.

Je-li $(i, j) \in I'$, pak vzhledem k tomu, že $R_{ij} \subseteq M$, platí $V_{ij} = v_{ij} = 1$. Je-li $(i, j) \in I'' \setminus I'$, pak $R_{ij} \not\subseteq M$, $R_{ij} \cap M \neq \emptyset$ a $V_{ij} = 1$, $v_{ij} = 0$. Je-li $(i, j) \in I'''$, pak vzhledem k tomu, že $R_{ij} \cap M = \emptyset$, máme $V_{ij} = v_{ij} = 0$.

Ukážeme ve třech krocích, že $h(M) \subseteq K$, kde $K = \bigcup\limits_{(i,j)\in I''\setminus I'} R_{ij}$.

i) Protože $M \subseteq R_1$ a obdélník R_1 je uzavřený, je $h(M) \subseteq R_1 \subset \mathring{R} \subset \bigcup\limits_{(i,j)\in I} R_{ij}$.

ii) Nechť $A \in h(M)$ a $A \in R_{ij}$, kde $(i, j) \in I'''$. Pak $A \notin \mathring{R}_{ij}$ (jinak by A byl vnější bod množiny M) a $A \notin M$. Tedy A je hromadný bod M, který leží na některé straně obdélníku R_{ij} a přitom $M \cap R_{ij} = \emptyset$. Musí tedy existovat další dílky dělení D, na jejichž některé straně leží bod A, a alespoň jeden z těchto dílků, nechť je to R_{kl}, je takový, že $(k, l) \in I''$. Přitom z $A \notin M$ plyne, že $(k, l) \notin I'$. To znamená, že $A \in K$. A byl libovolný bod s danou vlastností, tedy $h(M) \cap \Big(\bigcup\limits_{(i,j)\in I'''} R_{ij}\Big) \subseteq K$.

iii) Nechť $A \in h(M)$ a $A \in R_{ij}$, kde $(i, j) \in I'$. Pak $A \notin \mathring{R}_{ij}$ (jinak by A byl vnitřní bod M) a $A \in M$. Dílek R_{ij} není „krajním“ dílkem dělení D (tj. žádná jeho strana není částí některé strany obdélníku R — „krajní“ dílek nemůže být podmnožinou M, protože $M \subseteq R_1$ a $R_1 \subset \mathring{R}$). Existují tedy další dílky R_{rs}, $(r, s) \in I''$, na jejichž některé straně leží bod A, a alespoň jeden z těchto dílků, nechť je to R_{kl}, je takový, že $(k, l) \in I'' \setminus I'$ (jinak by A byl vnitřní bod M). To znamená, že $A \in K$. Bod A byl libovolný, tedy $h(M) \cap \Big(\bigcup\limits_{(i,j)\in I'} R_{ij} \Big) \subseteq K$.

Užitím věty 1.39 e) dostáváme

$$\begin{aligned}\varepsilon > S(D, \chi_M) - s(D, \chi_M) &= \sum_{(i,j)\in I} V_{ij}\, \mathrm{m}(R_{ij}) - \sum_{(i,j)\in I} v_{ij}\, \mathrm{m}(R_{ij}) = \\ &= \sum_{(i,j)\in I''} \mathrm{m}(R_{ij}) - \sum_{(i,j)\in I'} \mathrm{m}(R_{ij}) = \sum_{(i,j)\in I''\setminus I'} \mathrm{m}(R_{ij}) = \mathrm{m}(K).\end{aligned}$$

Z dokázané inkluze $K \supseteq h(M)$ plyne nerovnost $\chi_K(x, y) \geqq \chi_{h(M)}(x, y) \geqq 0$ pro každé $[x, y] \in R$, takže platí

$$\begin{aligned}\varepsilon > \mathrm{m}(K) &= \iint_R \chi_K(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_R} \chi_K(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \\ &\geqq \overline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq \underline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqq 0.\end{aligned}$$

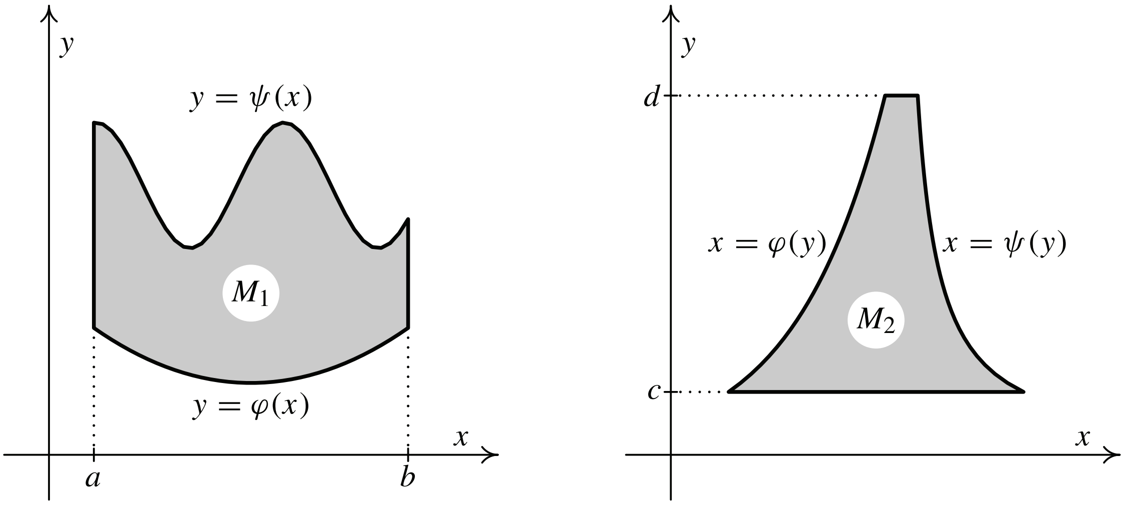
Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je

$$\overline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint_R} \chi_{h(M)}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R \chi_{h(M)}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

tj. množina $h(M)$ je měřitelná a $\mathrm{m}(h(M)) = 0$. □

Důsledek 1.41. *Omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je jordanovsky měřitelná právě tehdy, když* $\mathrm{m}_2(h(M)) = 0$.

Definice 1.42. Nechť φ, ψ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Označme $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b\rangle, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$. Říkáme, že A je *elementární množina* vzhledem k ose x.
Podobně, jsou-li φ, ψ spojité funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$ takové, že $\varphi(y) \leqq \psi(y)$ pro $y \in \langle c, d\rangle$, a je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle c, d\rangle, \varphi(y) \leqq x \leqq \psi(y)\}$, řekneme, že A je *elementární množina* vzhledem k ose y.
Říkáme, že množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je *elementární*, je-li elementární vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y.



a) b)

Obr. 1.11: Příklady elementárních množin v rovině

Věta 1.43. *Každá elementární množina je měřitelná.*

Důkaz. Nechť A je pro určitost elementární množina vzhledem k ose x. Pak $h(A) = U_1 \cup U_2 \cup G_1 \cup G_2$, kde U_1, U_2 jsou úsečky (rovnoběžné s osou y), které lze chápat jako grafy (konstantních) funkcí proměnné y spojitých na kompaktním intervalu, a G_1, G_2 jsou grafy spojitých funkcí proměnné x na kompaktním intervalu. Podle věty1.38 je $\mathrm{m}(U_1) = \mathrm{m}(U_2) = \mathrm{m}(G_1) = \mathrm{m}(G_2) = 0$. Abychom dokázali, že A je měřitelná, stačí podle věty 1.35 ukázat, že $\mathrm{m}(h(A)) = 0$. To však plyne z věty 1.39, neboť

$$\begin{aligned} 0 \leqq \mathrm{m}(h(A)) &= \mathrm{m}(U_1 \cup U_2 \cup G_1 \cup G_2) \leqq \\ &\leqq \mathrm{m}(U_1) + \mathrm{m}(U_2) + \mathrm{m}(G_1) + \mathrm{m}(G_2) = 0. \end{aligned}$$ □

Poznámka 1.44.

a) Obrazce studované v elementární geometrii (např. trojúhelník, čtverec, obdélník, mnohoúhelník, kruh) jsou elementární množiny nebo sjednocení konečného počtu elementárních množin. Jsou tedy měřitelné.

b) Z předchozích výsledků vyplývá, že systém jordanovsky měřitelných množin v rovině má následující vlastnosti:

   1) S každými dvěma množinami M_1, M_2 obsahuje i jejich rozdíl $M_1 \smallsetminus M_2$.

   2) S libovolnou konečnou posloupností množin $M_1, \dots, M_k$ obsahuje i jejich sjednocení $\bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$ a průnik $\bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$.

Takový systém množin se nazývá *množinový okruh*. Říkáme také, že systém jordanovsky měřitelných množin je uzavřený vzhledem k rozdílu a konečným sjednocením a průnikům.

V řadě aplikací, zejména u limitních přechodů, je důležité, aby systém měřitelných množin byl uzavřený i vzhledem ke *spočetným* sjednocením (tzv. množinový σ-okruh) a *spočetným* průnikům (tzv. množinový δ-okruh), tj. aby z měřitelnosti množin $M_1, M_2, \dots$ plynula i měřitelnost množin $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ a $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i$. Tyto vlastnosti však systém jordanovsky měřitelných množin nemá — viz cvičení 27 k této kapitole. To je důvodem, proč se zavádějí obecnější míry než Jordanova. Nejrozšířenější z nich je bezesporu Lebesgueova[1] míra.

1.4. Dvojný integrál na měřitelné množině

Definice 1.45. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a nechť f je ohraničená funkce na M. Funkci f nazveme *integrovatelnou* (*integrace schopnou*) na množině M, jestliže funkce $\chi_M f$ určená předpisem

$$(\chi_M f)(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } [x, y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin M \end{cases}$$

je integrovatelná na nějakém obdélníku $R \supseteq M$. *Dvojný integrál* funkce f *na množině* M (*přes množinu* M) pak definujeme vztahem

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka 1.46.

a) Podobně jako u definice míry (definice 1.31) lze ukázat, že definice 1.45 je korektní, tj. že integrál $\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nezávisí na volbě obdélníku $R \supseteq M$.

b) Je-li M obdélník, lze zvolit $R = M$. Pak

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

[1] **Henri Léon Lebesgue** (1875–1941) (čti lebeg) — francouzský matematik. Zabýval se teorií funkcí a integrálu. Jím zavedená míra a integrál významně ovlivnily matematiku 20. století.

pokud aspoň jeden z uvedených integrálů existuje. Integrál funkce f přes obdélník tedy nezávisí na tom, použijeme-li definici 1.3, nebo definici 1.45.

Následující věta je zobecněním dříve uvedené věty pro obdélník.

Věta 1.47. *Funkce f spojitá a ohraničená na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je na množině M integrovatelná.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Nechť $R \supseteq M$ je libovolný obdélník. Vzhledem k ohraničenosti funkce f na množině M existuje konstanta $K > 0$ taková, že $|(\chi_M f)(x, y)| \leqq K$ pro každé $[x, y] \in R$. Protože množina M je měřitelná, je podle věty 1.40 $\mathrm{m}(h(M)) = 0$ a podle lemmatu 1.7 existuje číslo $\delta_1 > 0$ s vlastností, že pro libovolné dělení $D \in \mathscr{D}(R)$ s normou $\nu(D) < \delta_1$ platí

$$0 = \mathrm{m}(h(M)) = \overline{\iint\limits_R} \chi_{h(M)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq S(D, \chi_{h(M)}) < \frac{\varepsilon}{4(K+1)}\,.$$

Nechť R_{ij}, $(i, j) \in I$, značí dílky dělení D. Buď I' podmnožina množiny I taková, že R_{ij}, $(i, j) \in I'$, jsou všechny dílky dělení D mající neprázdný průnik s hranicí $h(M)$ množiny M. Podobně nechť I'' je podmnožina množiny I taková, že R_{ij}, $(i, j) \in I''$, jsou všechny dílky dělení D, pro něž $R_{ij} \subseteq M$, $R_{ij} \cap h(M) = \emptyset$. Je $I' \cap I'' = \emptyset$. Položme $M_1 = \bigcup\limits_{(i,j)\in I'} R_{ij}$. Zřejmě je $h(M) \subseteq M_1 \subseteq R$ a s ohledem na větu 1.39 platí

$$\mathrm{m}(M_1) = \mathrm{m}\Big(\bigcup_{(i,j)\in I'} R_{ij}\Big) = \sum_{(i,j)\in I'} \mathrm{m}(R_{ij}) = S(D, \chi_{h(M)}) < \frac{\varepsilon}{4(K+1)}\,.$$

Položme nyní $M_2 = \bigcup\limits_{(i,j)\in I''} R_{ij}$. Množina M_2 je zřejmě kompaktní a platí $M_2 \subseteq M \subseteq M_1 \cup M_2$.

Poslední inkluzi dokážeme takto: Nechť $A \in M \setminus M_2$. Jestliže $A \in h(M)$, pak $A \in M_1$. Nechť $A \notin h(M)$, tj. $A \in \mathring{M}$, a nechť $A \in R_{ij}$, kde R_{ij} je dílek dělení D, $(i, j) \notin I''$, tj. $R_{ij} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathring{M}) \neq \emptyset$. Připusťme, že $h(M) \cap R_{ij} = \emptyset$. Pak $R_{ij} \subseteq \mathring{M} \cup \operatorname{ext} M$, kde $\operatorname{ext} M = \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup h(M))$ je vnějšek množiny M. Přitom $\mathring{M}$, $\operatorname{ext} M$ jsou otevřené, disjunktní a $R_{ij} \cap \mathring{M} \neq \emptyset$, $R_{ij} \cap \operatorname{ext} M \neq \emptyset$. To je spor s tím, že obdélník R_{ij} je souvislá množina. Tedy $(i, j) \in I'$ a $A \in M_1$.

Protože množina M_2 je kompaktní, existuje podle tvrzení před větou 1.11 číslo $\delta_2 > 0$ takové, že pro $[x_1, y_1] \in M_2$, $[x_2, y_2] \in M_2$, $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta_2$ platí $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon/(2\,\mathrm{m}(R))$. Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Nechť D_1 je dělení obdélníku R s dílky R^1_{kl}, $(k, l) \in J$, které je takovým zjemněním dělení D, že $\nu(D_1) < \delta$. Buď $J' \subseteq J$ je takové, že $R^1_{kl} \subseteq M_1$ právě pro $(k, l) \in J'$.

Nechť $J'' \subseteq J$ je takové, že $R^1_{kl} \subseteq M_2$ právě pro $(k,l) \in J''$. Snadno se ověří, že $\bigcup\limits_{(i,j)\in I'} R_{ij} = \bigcup\limits_{(k,l)\in J'} R^1_{kl} = M_1$ a $\bigcup\limits_{(i,j)\in I''} R_{ij} = \bigcup\limits_{(k,l)\in J''} R^1_{kl} = M_2$. Položme

$$V_{ij} = \sup\{(\chi_M f)(x,y) : [x,y] \in R_{ij}\},\ \ v_{ij} = \inf\{(\chi_M f)(x,y) : [x,y] \in R_{ij}\}$$

pro $(i,j) \in I$,

$$V^1_{kl} = \sup\{(\chi_M f)(x,y) : [x,y] \in R^1_{kl}\},\ \ v^1_{kl} = \inf\{(\chi_M f)(x,y) : [x,y] \in R^1_{kl}\}$$

pro $(k,l) \in J$. Zřejmě platí $V^1_{kl} = \max\{f(x,y) : [x,y] \in R^1_{kl}\}$ pro $(k,l) \in J''$ a $v^1_{kl} = \min\{f(x,y) : [x,y] \in R^1_{kl}\}$ pro $(k,l) \in J''$, $|V^1_{kl}| \leqq K$, $|v^1_{kl}| \leqq K$ pro $(k,l) \in J'$ a $V^1_{kl} = v^1_{kl} = 0$ pro $(k,l) \in J \setminus (J' \cup J'')$. Nyní

$$\begin{aligned}
0 &\leqq S(D_1, \chi_M f) - s(D_1, \chi_M f) = \sum_{(k,l)\in J} V^1_{kl}\,\mathrm{m}(R^1_{kl}) - \sum_{(k,l)\in J} v^1_{kl}\,\mathrm{m}(R^1_{kl}) = \\
&= \sum_{(k,l)\in J''} (V^1_{kl} - v^1_{kl})\,\mathrm{m}(R^1_{kl}) + \sum_{(k,l)\in J'} V^1_{kl}\,\mathrm{m}(R^1_{kl}) - \sum_{(k,l)\in J'} v^1_{kl}\,\mathrm{m}(R^1_{kl}) \leqq \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{m}(R)} \sum_{(k,l)\in J''} \mathrm{m}(R^1_{kl}) + 2K \sum_{(k,l)\in J'} \mathrm{m}(R^1_{kl}) \leqq \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{m}(R)}\,\mathrm{m}(R) + 2K \sum_{(i,j)\in I'} \mathrm{m}(R_{ij}) = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + 2K\,S(D, \chi_{h(M)}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2K\frac{\varepsilon}{4(K+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.9 je funkce $\chi_M f$ integrovatelná na R, a tudíž funkce f je integrovatelná na M. □

Důsledek 1.48. *Buď f spojitá funkce na kompaktní měřitelné množině M. Pak funkce f je integrovatelná na M.*

Podobně jako u dvojných integrálů přes daný obdélník mají integrály přes měřitelnou množinu následující vlastnosti.

Věta 1.49. *Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na měřitelné množině $M \subseteq R^2$. Pak platí:*

a) *Funkce $f + g$ je integrovatelná na M a platí*

$$\iint\limits_M [f(x,y) + g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) *Je-li $c \in \mathbb{R}$ konstanta, pak funkce cf je integrovatelná na M a platí*

$$\iint\limits_M cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c) *Funkce $|f|$ je integrovatelná na M a platí*

$$\left|\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqq \iint\limits_M |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

d) *Je-li $f(x,y) \leqq g(x,y)$ pro každé $[x,y] \in M$, pak*

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vlastnost z tvrzení b) se nazývá *homogenita* integrálu vzhledem k integrandu, vlastnost z tvrzení a) se nazývá *aditivita* integrálu vzhledem k integrandu.

Důkaz. Protože každý dvojný integrál přes množinu M je definován vztahem

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $R \supseteq M$ je obdélník, plynou uvedená tvrzení z věty 1.20 a věty 1.23 pro integrály přes obdélník, neboť pro každý bod $[x,y]$ platí

$$\begin{aligned}
(\chi_M(f+g))(x,y) &= (\chi_M f)(x,y) + (\chi_M g)(x,y),\\
(\chi_M(cf))(x,y) &= c(\chi_M f)(x,y),\\
-|(\chi_M f)(x,y)| = -(\chi_M|f|)(x,y) &\leqq\\
&\leqq (\chi_M f)(x,y) \leqq (\chi_M|f|)(x,y) = |(\chi_M f)(x,y)|,\\
(\chi_M f)(x,y) \leqq (\chi_M g)(x,y),& \quad \text{je-li } f(x,y) \leqq g(x,y).
\end{aligned}$$

□

Věta 1.50.

a) *Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelná a je-li $k \in \mathbb{R}$ konstanta, pak*

$$\iint\limits_M k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\,\mathrm{m}(M).$$

b) *Nechť f je funkce ohraničená na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ míry nula. Pak je f na M integrovatelná a platí*

$$\iint\limits_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

c) *Je-li funkce f integrovatelná na měřitelné množině $M_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ i na měřitelné množině $M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ a je-li* $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) = 0$*, pak f je integrovatelná na $M_1 \cup M_2$ a platí*

$$\iint\limits_{M_1 \cup M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vlastnost z tvrzení c) se v případě, kdy $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, nazývá *aditivita* integrálu vzhledem k integračnímu oboru.

Důkaz.

a) Konstantní funkce f daná předpisem $f(x, y) = k$ pro každé $[x, y] \in M$ je ohraničená a spojitá na M, takže podle věty 1.47 je integrovatelná na M. Je-li $R \supseteq M$ obdélník, platí

$$\begin{aligned}\iint\limits_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{R} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= k \iint\limits_{R} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\,\mathrm{m}(M).\end{aligned}$$

b) Protože funkce f je ohraničená na množině M, existuje konstanta $K > 0$ taková, že $-K \leqq f(x, y) \leqq K$, je-li $[x, y] \in M$. Odtud $-K\chi_M(x, y) \leqq \leqq (\chi_M f)(x, y) \leqq K\chi_M(x, y)$ pro každé $[x, y] \in R$, kde $R \supseteq M$ je obdélník. Tedy

$$\begin{gathered} s(D, -K\chi_M) \leqq s(D, \chi_M f) \leqq s(D, K\chi_M), \\ S(D, -K\chi_M) \leqq S(D, \chi_M f) \leqq S(D, K\chi_M) \end{gathered}$$

pro libovolné $D \in \mathscr{D}(R)$. Díky předpokladu $\mathrm{m}(M) = 0$ tudíž

$$\begin{gathered} 0 = -K\,\mathrm{m}(M) = \iint\limits_{R} (-K)\chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \underline{\iint\limits_{R}} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \\ \leqq \overline{\iint\limits_{R}} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_{R} K\chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K\,\mathrm{m}(M) = 0. \end{gathered}$$

Odtud plyne integrovatelnost funkce f na M s výsledkem

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint_R} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \overline{\iint_R} (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

c) Buď $R \supseteq M_1 \cup M_2$ libovolný obdélník. Zřejmě pro každý bod $[x, y]$ platí

$$(\chi_{M_1 \cup M_2} f)(x, y) = (\chi_{M_1} f)(x, y) + (\chi_{M_2} f)(x, y) - (\chi_{M_1 \cap M_2} f)(x, y).$$

Protože $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) = 0$, je podle b) $\iint_{M_1 \cap M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. Celkově s přihlédnutím k větě 1.49 dostáváme

$$\iint_{M_1 \cup M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R (\chi_{M_1 \cup M_2} f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_R (\chi_{M_1} f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_R (\chi_{M_2} f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$- \iint_R (\chi_{M_1 \cap M_2} f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{M_1 \cap M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{M_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

□

Věta 1.51. *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak i jejich součin fg je integrovatelný na M.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že funkce f a g jsou na M nezáporné. Nechť $R \supseteq M$ je obdélník. Z integrovatelnosti f a g plyne, že jsou ohraničené, takže existuje konstanta K taková, že $0 \leqq (\chi_M f)(x, y) \leqq K$, $0 \leqq (\chi_M g)(x, y) \leqq K$, kdykoliv $[x, y] \in R$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle lemmatu 1.9 k číslu $\varepsilon/2K > 0$ existují dělení D_1, D_2 obdélníku R tak, že $S(D_1, \chi_M f) - s(D_1, \chi_M f) < \varepsilon/(2K)$, $S(D_2, \chi_M g) - s(D_2, \chi_M g) < \varepsilon/(2K)$. Je-li D společné zjemnění D_1 a D_2, pak

$$s(D_1, \chi_M f) \leqq s(D, \chi_M f) \leqq S(D, \chi_M f) \leqq S(D_1, \chi_M f),$$
$$s(D_2, \chi_M g) \leqq s(D, \chi_M g) \leqq S(D, \chi_M g) \leqq S(D_2, \chi_M g),$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(D,\chi_M f) - s(D,\chi_M f) &\leqq S(D_1,\chi_M f) - s(D_1,\chi_M f) < \varepsilon/(2K)\,, \\ S(D,\chi_M g) - s(D,\chi_M g) &\leqq S(D_2,\chi_M g) - s(D_2,\chi_M g) \;< \varepsilon/(2K)\,. \end{aligned}$$

Nechť R_{ij}, kde $(i,j) \in I = \{(k,l) : k = 1,\dots,m; l = 1,\dots,n\}$, jsou dílky dělení D. Pro každé $(i,j) \in I$ označme

$$u_{ij} = \inf\{(\chi_M f)(x,y) : [x,y] \in R_{ij}\}, \quad U_{ij} = \sup\{(\chi_M f)(x,y) : [x,y] \in R_{ij}\},$$
$$v_{ij} = \inf\{(\chi_M g)(x,y) : [x,y] \in R_{ij}\}, \quad V_{ij} = \sup\{(\chi_M g)(x,y) : [x,y] \in R_{ij}\},$$
$$w_{ij} = \inf\{(\chi_M (fg))(x,y) : [x,y] \in R_{ij}\},$$
$$W_{ij} = \sup\{(\chi_M (fg))(x,y) : [x,y] \in R_{ij}\}.$$

Protože $u_{ij}v_{ij} \leqq (\chi_M f)(x,y) \cdot (\chi_M g)(x,y) \leqq U_{ij}V_{ij}$ pro každé $[x,y] \in R_{ij}$, platí $u_{ij}v_{ij} \leqq w_{ij} \leqq W_{ij} \leqq U_{ij}V_{ij}$. Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} W_{ij} - w_{ij} &\leqq U_{ij}V_{ij} - u_{ij}v_{ij} = U_{ij}V_{ij} - U_{ij}v_{ij} + U_{ij}v_{ij} - u_{ij}v_{ij} = \\ &= U_{ij}(V_{ij} - v_{ij}) + v_{ij}(U_{ij} - u_{ij}) \leqq K(V_{ij} - v_{ij} + U_{ij} - u_{ij}). \end{aligned}$$

Nyní vynásobíme tuto nerovnost číslem $\mathrm{m}(R_{ij})$ a sečteme přes všechna $(i,j) \in I$. Vyjde:

$$\begin{aligned} &S(D,\chi_M(fg)) - s(D,\chi_M(fg)) \leqq \\ &\qquad \leqq K\big[S(D,\chi_M f) - s(D,\chi_M f) + S(D,\chi_M g) - s(D,\chi_M g)\big] < \\ &\qquad < K\Big(\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}\Big) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.9 je funkce $\chi_M(fg)$ integrovatelná na R, což vzhledem k definici 1.45 znamená, že funkce fg je integrovatelná na M.

Nechť nyní f a g jsou libovolné funkce integrovatelné na M. Z integrovatelnosti plyne, že jsou na M zdola ohraničené. Tedy existuje konstanta L taková, že $f(x,y) \geqq L$, $g(x,y) \geqq L$ pro každé $[x,y] \in M$. Funkce $f - L$ a $g - L$ jsou nezáporné a podle vět 1.50, část a) a 1.49, část a) integrovatelné. Podle první části důkazu je proto integrovatelná funkce $(f - L)(g - L)$. Vzhledem k rovnosti $fg = (f - L)(g - L) + Lf + Lg - L^2$ je podle věty 1.49, části a) a b) funkce fg integrovatelná na M. □

Věta 1.52. *Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $N \subseteq M$ je její měřitelná podmnožina. Pak je funkce f integrovatelná i na N.*

Důkaz. Nechť $R \supseteq M$ je obdélník. Podle předpokladů existují integrály

$$\iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{a} \qquad \iint\limits_R \chi_N(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Podle věty 1.51 existuje integrál

$$\iint\limits_R (\chi_M f)(x, y)\chi_N(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_N f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

neboť z $N \subseteq M$ plyne $\chi_M f \cdot \chi_N = \chi_N f$. To znamená, že funkce f je integrovatelná na N. $\square$

Věta 1.53. *Nechť funkce f a g jsou definované na měřitelné množině M, přičemž f je integrovatelná, g je ohraničená a platí* $\mathrm{m}(M_1) = 0$, *kde* $M_1 = \{[x, y] \in M : f(x, y) \neq g(x, y)\}$. *Pak funkce g je na množině M integrovatelná a platí*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Položme $M_2 = M \setminus M_1$. Podle věty 1.38, část d) je M_2 měřitelná, a protože $\chi_{M_1}(g - f)$ je ohraničená funkce, která je na M_2 nulová, platí podle věty 1.38 s přihlédnutím k $\mathrm{m}(M_1) = 0$ a k větě 1.50 rovnosti

$$\iint\limits_{M_2} \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \qquad \iint\limits_{M_1} \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Podle věty 1.50, část c) je funkce $\chi_{M_1}(g - f)$ integrovatelná na M a platí

$$\iint\limits_M \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \iint\limits_{M_1} \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} \chi_{M_1}(g - f)(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Zřejmě $f + \chi_{M_1}(g - f) = g$ na M, takže podle věty 1.49 je funkce g na M

integrovatelná a

$$\begin{aligned}\iint\limits_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_M \big[f(x,y)+\chi_{M_1}(g-f)(x,y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_M \chi_{M_1}(g-f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$\square$

Poznámka 1.54. Předchozí věta říká, že změna integrovatelné funkce na množině míry nula nemění *integrovatelnost* funkce ani *hodnotu integrálu*.

Jinak řečeno, funkce, která je definovaná a ohraničená na měřitelné množině, avšak není integrovatelná, se po změně na množině míry nula nemůže stát integrovatelnou (jinak by podle předchozí věty musela být původní funkce integrovatelná, protože by se lišila od integrovatelné funkce pouze na množině nulové míry).

Pro vyjádření dvojného integrálu přes elementární množinu pomocí dvojnásobného integrálu platí

Věta 1.55 (Fubiniova věta). *Buď M elementární množina v $\mathbb{R}^2$ vzhledem k ose x, tj.*

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a,b\rangle, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\},$$

kde φ, ψ jsou spojité funkce na $\langle a,b\rangle$ takové, že $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$. Je-li funkce f spojitá na M, pak platí

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Elementární množina je kompaktní a měřitelná, tedy podle důsledku 1.48 je spojitá funkce f na množině M integrovatelná. Buď $c < \min\{\varphi(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$, $d > \max\{\psi(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$, $R = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Pro každý bod $[x,y] \in \mathbb{R}$ platí

$$(\chi_M f)(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{je-li } \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x), \\ 0 & \text{je-li } y < \varphi(x), \text{ nebo } y > \psi(x). \end{cases}$$

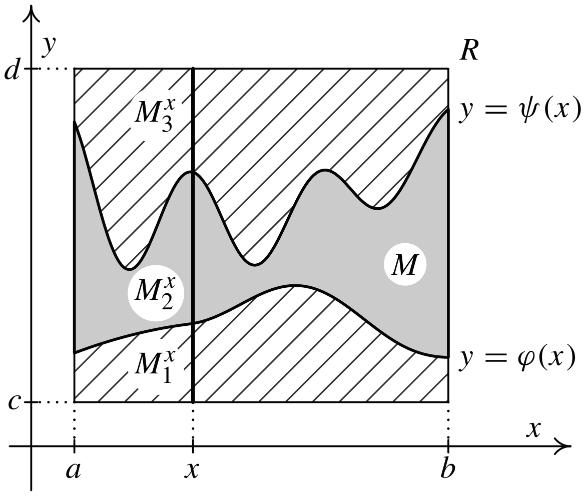
Podle definice a podle Fubiniovy věty (věta 1.14) je

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_R (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\overline{\int_c^d} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{1.17}$$

Označme pro $x \in \langle a, b\rangle$

$$M_1^x = \langle c, \varphi(x)\rangle,$$
$$M_2^x = \langle \varphi(x), \psi(x)\rangle,$$
$$M_3^x = \langle \psi(x), d\rangle,$$

viz obr. 1.12. Funkce $(\chi_M f)(x,\cdot)$ je spojitá na intervalu M_2^x, přičemž $(\chi_M f)(x,y) = f(x,y)$ pro každé $y \in M_2^x$, a je rovna nule (s případnou výjimkou hodnoty v jednom krajním bodě) na intervalech M_1^x, M_3^x. Tedy je integrovatelná na M_1^x, M_2^x, M_3^x, a tudíž i na intervalu $\langle c, d\rangle$. Proto



Obr. 1.12

$$\overline{\int_c^d} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_c^{\varphi(x)} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$
$$+ \int_{\psi(x)}^{d} (\chi_M f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dosazením do (1.17) dostáváme tvrzení. □

Poznámka 1.56.

a) Je-li M elementární množina vzhledem k ose y, tj.

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle c, d\rangle, \varphi(y) \leqq x \leqq \psi(y)\},$$

kde φ, ψ jsou spojité funkce na $\langle c, d\rangle$ takové, že $\varphi(y) \leqq \psi(y)$ pro každé $y \in \langle c, d\rangle$, a je-li funkce f spojitá na M, pak platí

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

b) Zatímco integrál $\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se nazývá *dvojný integrál*, integrály

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x, \qquad \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

se nazývají *dvojnásobné integrály*.

c) Předchozí věta zůstane v platnosti, i když bude funkce f pouze integrovatelná (tj. ne nutně spojitá) na množině M. Ve vnitřních integrálech je však třeba použít horní resp. dolní jednoduchý integrál (srov. s větou 1.14).

d) K označení dvojnásobných integrálů se používá rovněž zápisu

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{resp.} \quad \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 1.57. Vypočtěte:

a) $\iint_M (x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je omezena křivkami $y = x^2$, $y = x$.

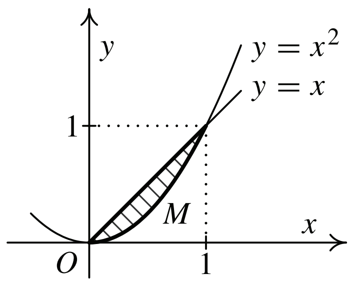
b) $\iint_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je trojúhelník o vrcholech [0, 0], [1, 1], [2, 0].

Řešení.

a) Množina M je elementární vzhledem k ose x i vzhledem k ose y.

1. Zapíšeme-li množinu M jako elementární množinu vzhledem k ose x, máme

$$M\colon \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1, \\ x^2 \leqq y \leqq x. \end{array}$$



Odtud

$$\iint_M (x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x + y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left\{x^2 + \frac{x^2}{2} - \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right)\right\}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{10 - 5 - 2}{20} = \frac{3}{20}.$$

2. Ke stejnému výsledku dojdeme i v případě, uvažujeme-li množinu M jako elementární množinu vzhledem k ose y:

$$M: \quad \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq 1, \\ y \leqq x \leqq \sqrt{y}. \end{array}$$

Pak

$$\iint_M (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} (x+y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y =$$

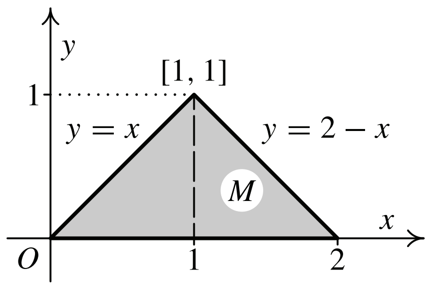
$$= \int_0^1 \left\{ \frac{y}{2} + y^{3/2} - \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) \right\} \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y^{3/2} - \frac{3}{2} y^2 \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{y^2}{4} + \frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{y^3}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{5+8-10}{20} = \frac{3}{20}\,.$$

b) Množina M je elementární vzhledem k ose y. Lze ji však rovněž vyjádřit jako sjednocení dvou množin elementárních vzhledem k ose x. Příklad proto vyřešíme opět dvěma způsoby.

1. Množinu M vyjádříme jako elementární množinu vzhledem k ose y:

$$M: \quad \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq 1, \\ y \leqq x \leqq 2 - y. \end{array}$$



Pak

$$\iint_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} xy\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\, y \right]_y^{2-y} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2}\, y - \frac{y^3}{2} \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left(2y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{2} \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \left[y^2 - \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

2. Nyní množinu M vyjádříme jako sjednocení dvou množin M_1, M_2 elementárních vzhledem k ose x:

$$M = M_1 \cup M_2, \qquad M_1\colon \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 \leqq y \leqq x, \end{array} \qquad M_2\colon \begin{array}{l} 1 \leqq x \leqq 2, \\ 0 \leqq y \leqq 2 - x. \end{array}$$

Poněvadž $\mathrm{m}(M_1 \cap M_2) = 0$, platí podle části c) věty 1.50

$$\iint\limits_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M_1} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \iint\limits_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^x xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_0^x \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{x(2-x)^2}{2} \,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 + \int_1^2 \left(2x - 2x^2 + \frac{x^3}{2} \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{8} + \left[x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^4}{8} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{8} + 4 - \frac{16}{3} + 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{8} = 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

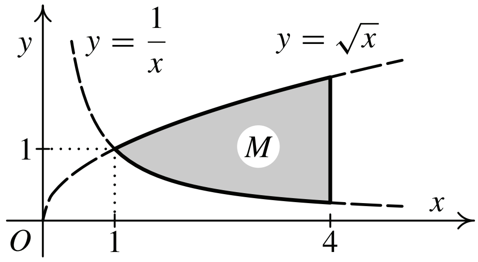
▲

1.5. Další řešené příklady

Příklad 1.58. Vypočtěte $I = \iint\limits_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je množina bodů $[x, y]$ určená nerovnostmi $1 \leqq x \leqq 4$, $1/x \leqq y \leqq \sqrt{x}$.

Řešení. Integrační obor M je znázorněn na obr. 1.13. Integrand $f(x, y) = xy$ je spojitá funkce. Při označení $a = 1$, $b = 4$, $\varphi(x) = 1/x$ a $\psi(x) = \sqrt{x}$ dostaneme z Fubiniovy věty 1.55

$$I = \iint\limits_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \left(\int_{1/x}^{\sqrt{x}} xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$



Obr. 1.13

Vnitřní integrál vyjde

$$\int_{1/x}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/x}^{\sqrt{x}} = \frac{x}{2}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right).$$

Celkový výsledek bude

$$I = \int_1^4 \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \ln|x|\right]_1^4 =$$

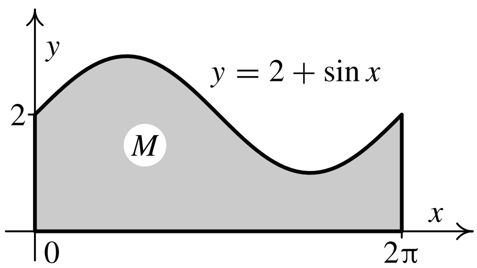
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - \ln 4\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \ln 1\right) = \frac{21}{2} - \ln 2.$$

▲

Příklad 1.59. Vypočtěte $I = \iint\limits_M \frac{y}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je ohraničená přímkami $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$ a grafem funkce $y = 2 + \sin x$.

Řešení. Integrační obor M je znázorněn na obr. 1.14. Jde o elementární množinu vzhledem k ose x. Integrand $f(x, y) = y/3$ je spojitá funkce. Použijeme-li tedy Fubiniovu větu 1.55, obdržíme:

$$I = \iint\limits_M \frac{y}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2+\sin x} \frac{y}{3}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$



Obr. 1.14

Vnitřní integrál vyjde

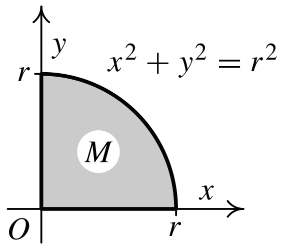
$$\int_0^{2+\sin x} \frac{y}{3}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{6}\right]_0^{2+\sin x} = \frac{1}{6}(2 + \sin x)^2 = \frac{1}{6}(4 + 4\sin x + \sin^2 x).$$

Při výpočtu vnějšího integrálu použijeme vzorec $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. Dostaneme:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\left(4 + 4\sin x + \frac{1-\cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{12}\cos 2x\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{24}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

▲

Příklad 1.60. Vypočtěte $I = \iint\limits_M x^3 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je čtvrtkruh o daném poloměru $r > 0$ se středem v počátku O ležící v prvním kvadrantu.



Obr. 1.15

Řešení. Integrační obor je znázorněn na obr. 1.15. Je to elementární množina jak vzhledem k ose x, tak vzhledem k ose y. Vzhledem k jednoduchosti spojitého integrandu $f(x, y) = x^3 y$ je pořadí integrace z hlediska její pracnosti zcela lhostejné. Rozhodneme-li se pro popis čtvrtkruhu M nerovnostmi $0 \leqq x \leqq r$, $0 \leqq y \leqq \sqrt{r^2 - x^2}$, z Fubiniovy věty 1.55 dostaneme

$$I = \iint\limits_M x^3 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^3 y \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

Pro vnitřní integrál dostáváme

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^3 y \,\mathrm{d}y = x^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{2} x^3 (r^2 - x^2).$$

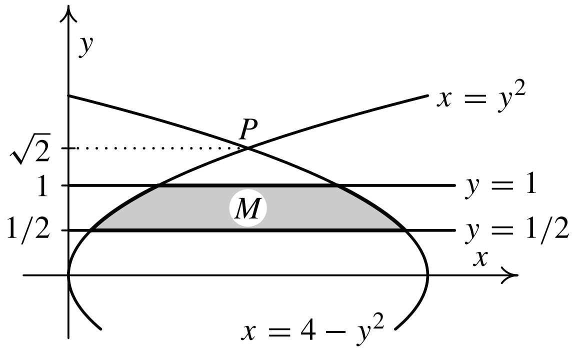
Celkově tedy vyjde

$$I = \int_0^r \frac{1}{2}(x^3 r^2 - x^5) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4 r^2}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_0^r = \frac{r^6}{24}.$$

▲

Příklad 1.61. Vypočtěte $I = \iint\limits_M \frac{y}{x + y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je ohraničena křivkami $y = 1$, $y = 1/2$, $x = 4 - y^2$ a $x = y^2$.

Řešení. První dvě křivky jsou přímky, druhé dvě paraboly. Integrační obor M je znázorněn na obr. 1.16. Určíme ještě y-ovou souřadnici horního průsečíku P obou parabol, abychom se přesvědčili, že máme přímky $y = 1$ a $y = 1/2$ správně umístěny. Z rovnic parabol dostaneme $4 - y^2 = y^2$, tj. $y^2 = 2$, a tedy $y = \sqrt{2}$. Množina M je elementární vzhledem k y. Vidíme, že $c = 1/2$, $d = 1$, $\varphi(y) = y^2$ a $\psi(y) = 4 - y^2$. Integrand $f(x, y) = y/(x + y^2)$ je spojitá funkce na M. Podle Fubiniovy věty bude



Obr. 1.16

$$I = \iint_M \frac{y}{x + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{1/2}^{1}\left(\int_{y^2}^{4-y^2} \frac{y}{x + y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Vnitřní integrál vyjde

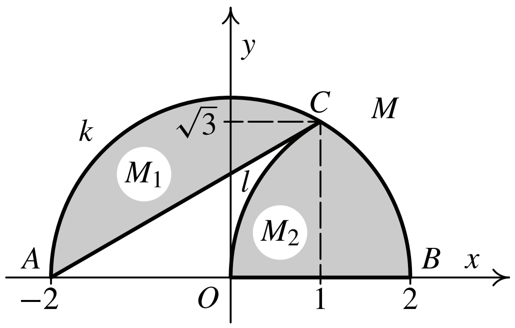
$$\int_{y^2}^{4-y^2} \frac{y}{x + y^2}\,\mathrm{d}x = y\big[\ln|x + y^2|\big]_{y^2}^{4-y^2} = y(\ln 4 - \ln 2y^2) =$$
$$= y(2\ln 2 - \ln 2 - 2\ln y) = y\ln 2 - 2y\ln y,$$

vzhledem k tomu, že $y > 0$.

Při výpočtu vnějšího integrálu použijeme metodu per partes. Dostaneme:

$$I = \int_{1/2}^{1} (y\ln 2 - 2y\ln y)\,\mathrm{d}y = \ln 2\int_{1/2}^{1} y\,\mathrm{d}y - 2\int_{1/2}^{1} y\ln y\,\mathrm{d}y =$$
$$= \begin{vmatrix} u = \ln y & u' = \frac{1}{y} \\ v' = y & v = \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} = \ln 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/2}^{1} - 2\left[\frac{y^2}{2}\ln y\right]_{1/2}^{1} + 2\int_{1/2}^{1} \frac{y}{2}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \ln 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\ln 2 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(\ln 2 + 3).$$ ▲

Příklad 1.62. Označme M vystínovanou množinu na obr. 1.17, kde k je horní půlkružnice se středem v počátku O a s poloměrem $r = 2$, l je kružnice se středem v bodě $B = [2, 0]$ s poloměrem $r = 2$ a C je jejich průsečík. Buď $A = [-2, 0]$. Vypočtěte integrál $I = \iint_M 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



Obr. 1.17

Řešení. Nalezneme souřadnice bodu C. Platí $k\colon x^2+y^2=4$, $l\colon (x-2)^2+y^2=4$. Odečtením rovnic dostaneme $4x-4=0$, tj. $x=1$ a odtud vypočteme $y=\sqrt{3}$. Vyjde tudíž $C=[1,\sqrt{3}]$.

Integrační obor M není zřejmě elementární množinou ani vzhledem k ose x ani vzhledem k ose y. Rozdělíme ho proto na dvě části — část M_1, omezenou obloukem AC půlkružnice k a její tětivou AC, a část M_2, omezenou obloukem BC půlkružnice k, obloukem OC kružnice l a osou x. Z Thaletovy věty plyne, že $\sphericalangle BCA$ je pravý. To znamená, že tětiva AC leží na tečně ke kružnici l v bodě C, takže má s obloukem OC kružnice l společný jen bod C, jak je znázorněno na obrázku. Podle věty 1.50, část c) je

$$I=\iint\limits_{M} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{M_1} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{M_2} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Obě části M_1 i M_2 jsou elementárními množinami jak vzhledem k ose x, tak vzhledem k ose y. Množinu M_1 popíšeme jako elementární množinu vzhledem k ose x, zatímco M_2 jako elementární množinu vzhledem k ose y. Bude to tak vhodnější pro praktickou integraci.

Najdeme rovnici přímky procházející body A a C. Z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ADC$, kde $D=[1,0]$, vypočítáme, že směrnice je $\sqrt{3}/3$, tedy $y=(\sqrt{3}/3)(x+2)$. Z rovnice půlkružnice k určíme $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ resp. $x=\pm\sqrt{4-y^2}$ a z rovnice kružnice l určíme $x-2=\pm\sqrt{4-y^2}$. S pomocí obr. 1.17 zvolíme správná znaménka u odmocnin. Celkem dostaneme

$$M_1\colon\ \begin{array}{c} -2\leqq x\leqq 1,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)\leqq y\leqq\sqrt{4-x^2}, \end{array}\qquad M_2\colon\ \begin{array}{c} 0\leqq y\leqq\sqrt{3},\\ 2-\sqrt{4-y^2}\leqq x\leqq\sqrt{4-y^2}. \end{array}$$

Integrand $f(x,y)=6xy$ je spojitá funkce. Použijeme Fubiniovu větu a dostaneme:

$$I_1=\iint\limits_{M_1} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{1}\left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}^{\sqrt{4-x^2}} 6xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Vnitřní integrál bude

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}^{\sqrt{4-x^2}} 6xy\,\mathrm{d}y = 3x\big[y^2\big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}^{\sqrt{4-x^2}} = 3x\left(4 - x^2 - \frac{3}{9}(x+2)^2\right) = $$
$$= 8x - 4x^2 - 4x^3$$

a vnější integrál vyjde

$$I_1 = \int_{-2}^{1} (8x - 4x^2 - 4x^3)\,\mathrm{d}x = \left[4x^2 - \frac{4}{3}x^3 - x^4\right]_{-2}^{1} =$$
$$= \left(4 - \frac{4}{3} - 1\right) - \left(16 + \frac{32}{3} - 16\right) = -9.$$

Podobně dostaneme:

$$I_2 = \iint_{M_2} 6xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 6xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Vnitřní integrál bude

$$\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 6xy\,\mathrm{d}x = 3y\big[x^2\big]_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} = 3y\Big(4 - y^2 - \big(2 - \sqrt{4-y^2}\big)^2\Big) =$$
$$= 3y\big(4\sqrt{4-y^2} - 4\big).$$

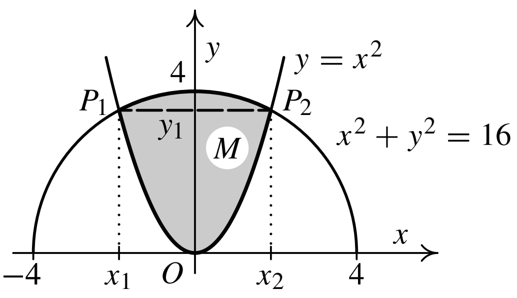
Při výpočtu vnějšího integrálu rozdělíme integrand na dvě části a na první integrál použijeme substituční metodu. Vyjde nám:

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} 3y\big(4\sqrt{4-y^2} - 4\big)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} 12y\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^{\sqrt{3}} 12y\,\mathrm{d}y =$$
$$= \left|\begin{array}{r} 4 - y^2 = u^2 \\ -2y\,\mathrm{d}y = 2u\,\mathrm{d}u \\ y\,\mathrm{d}y = -u\,\mathrm{d}u \\ 0 \rightsquigarrow 2,\ \sqrt{3} \rightsquigarrow 1 \end{array}\right| = -12\int_2^1 u^2\,\mathrm{d}u - 6\big[y^2\big]_0^{\sqrt{3}} = 4\big[u^3\big]_1^2 - 18 = 10.$$

Celkový výsledek je tedy

$$I = I_1 + I_2 = -9 + 10 = 1.$$ ▲

Příklad 1.63. Vypočtěte $I = \displaystyle\iint_M \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je množina omezená křivkami $y = x^2$ a $x^2 + y^2 = 16$ (část nad parabolou).



Obr. 1.18

Řešení. První křivka je parabola, druhá kružnice. Integrační obor M je znázorněn na obr. 1.18. Určíme souřadnice průsečíků $P_1 = [x_1, y_1]$ a $P_2 = [x_2, y_2]$. Vyloučením x dostaneme kvadratickou rovnici $y^2 + y - 16 = 0$, která má kořeny $\left(-1 \pm \sqrt{65}\right)/2$. Pro nás má význam jen kladný z nich, je tedy $y_1 = y_2 = \left(-1 + \sqrt{65}\right)/2$. Odtud vyjde:

$$x_2 = -x_1 = \sqrt{\left(-1 + \sqrt{65}\right)/2}.$$

Integrační obor M je elementární množinou jak vzhledem k x, tak vzhledem k y. Jednodušší je popis vzhledem k x:

$$M\colon \begin{array}{l} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ x^2 \leqq y \leqq \sqrt{16 - x^2}. \end{array}$$

Integrand $f(x, y) = x/(1 + y^2)$ je spojitá funkce. Z Fubiniovy věty dostaneme

$$I = \iint_M \frac{x}{1 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{x}{1 + y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Vnitřní integrál vyjde

$$\int_{x^2}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{x}{1 + y^2}\,\mathrm{d}y = x\left[\operatorname{arctg} y\right]_{x^2}^{\sqrt{16-x^2}} =$$
$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{16 - x^2} - x \operatorname{arctg} x^2 = f(x).$$

Integrace funkce $f(x)$ je však velmi nepříjemná, na každý sčítanec by se musela použít postupně substituce a metoda per partes. Snadno je však vidět, že $f(x)$ je lichá funkce, tj. $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in \langle -4, 4\rangle$. Protože integrační obor je interval souměrný vzhledem k počátku ($x_2 = -x_1$), musí platit

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left(x \operatorname{arctg} \sqrt{16 - x^2} - x \operatorname{arctg} x^2\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Zdlouhavé integrace jsme tedy byli ušetřeni.

Rovněž by šlo vyjádřit množinu M jako elementární množinu vzhledem k ose y, museli bychom ji však nejprve rozdělit úsečkou P_1P_2, aby horní a dolní meze vnitřního integrálu měly jednoduchý popis. Snadno se lze přesvědčit, že oba vnitřní integrály jsou pak rovny nule, takže vnější integrály jsou triviální. ▲

Poznámka 1.64. Je-li integrační obor dvojrozměrný interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a integrand má tvar součinu $f(x)g(y)$, kde f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a g je spojitá funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$, je možné výpočet podle Fubiniovy věty zjednodušit a výrazně urychlit:

$$\iint\limits_J f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \tag{1.18}$$

$$= \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Integrál $\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$ je totiž konstanta, kterou lze z vnějšího integrálu vytknout.

Příklad 1.65. Vypočtěte $\displaystyle\iint\limits_J x \sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $J = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$.

Řešení. Podle vztahu (1.18) bude

$$\iint\limits_J x \sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\pi/2} \sin y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \big[-\cos y\big]_0^{\pi/2} =$$

$$= (2-0)\cdot(0+1) = 2.$$

▲

Cvičení

1. Dokažte bez použití lemmatu 1.12, že funkce f z poznámky 1.19 je integrovatelná a její integrál je roven nule.

2. Nechť M, M_1, M_2 jsou obdélníky, $M = M_1 \cup M_2$, $\mathring{M}_1 \cap \mathring{M}_2 = \emptyset$ a funkce f je ohraničená na M. Dokažte, že

$$\underline{\iint\limits_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint\limits_{M_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \underline{\iint\limits_{M_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\overline{\iint\limits_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_{M_1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \overline{\iint\limits_{M_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$