

Kapitola 4

Aplikace vícerozměrných integrálů

Integrální počet funkcí více proměnných má rozsáhlé použití jak v matematice a fyzice, tak i v oborech, které na nich staví. V této kapitole uvedeme některé geometrické a fyzikální aplikace, přičemž se omezíme jen na základní z nich. Vesměs se jedná o výpočet podobných veličin, které se vyskytují u aplikací jednoduchého určitého integrálu, nyní je však budeme umět určit v podstatně obecnější situaci (objem a hmotnost nepravidelných nehomogenních těles apod.).

4.1. Geometrické aplikace

Z geometrických aplikací se zaměříme na výpočet obsahů rovinných množin, obsahů ploch v prostoru a objemů prostorových množin.

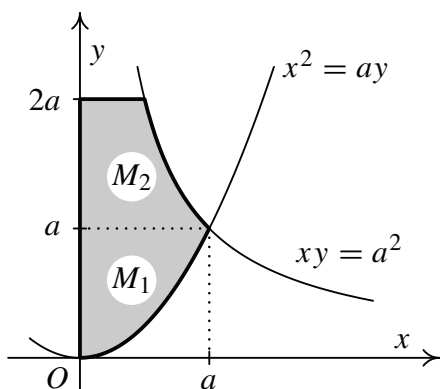
4.1.1. Míra (obsah) rovinné množiny

Nechť M je rovinná měřitelná množina. Z definic 1.31 a 1.45, popřípadě z tvrzení a) věty 1.50 vyplývá, že pro míru (obsah) $m_2(M)$ této množiny platí

$$m_2(M) = \iint_M dx dy. \quad (4.1)$$

Podle důsledku 1.41 víme, že omezená množina je měřitelná právě tehdy, když její hranice má míru nula. Tuto vlastnost mají všechny „rovinné obrazce“, se kterými se setkáváme v geometrii a v dalších běžných aplikacích.

Příklad 4.1. Vypočtete obsah rovinné množiny M omezené křivkami $xy = a^2$, $x^2 = ay$, $y = 2a$, $x = 0$, kde $a > 0$ je konstanta.



Obr. 4.1

Řešení. Zjistíme nejprve průsečík křivek $xy = a^2$, $x^2 = ay$. Z první z těchto rovnic vidíme, že obě souřadnice průsečíku musí být různé od nuly. Vypočítáme-li z první rovnice neznámou y a dosadíme do druhé rovnice, obdržíme $x^2 = a^3/x$, takže $x^3 = a^3$. Odtud plyne, že $x = a$, a z rovnic křivek snadno určíme $y = a$. Jediným průsečíkem uvažovaných dvou křivek je tedy bod $[a, a]$. Množina M je znázorněna na obr. 4.1.

Označíme-li

$$M_1: \begin{cases} 0 \leq y \leq a, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{ay}, \end{cases} \quad M_2: \begin{cases} a \leq y \leq 2a, \\ 0 \leq x \leq a^2/y, \end{cases}$$

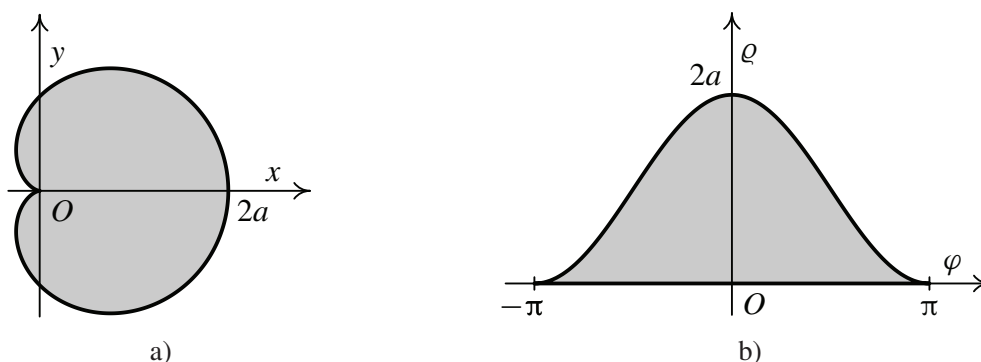
máme $M = M_1 \cup M_2$, $m_2(M_1 \cap M_2) = 0$. Užitím tvrzení c) věty 1.50 dostáváme

$$\begin{aligned} m_2(M) &= \iint_M dx dy = \iint_{M_1} dx dy + \iint_{M_2} dx dy = \\ &= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{ay}} dx \right] dy + \int_a^{2a} \left[\int_0^{a^2/y} dx \right] dy = \\ &= \sqrt{a} \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^a + a^2 [\ln y]_a^{2a} = \frac{2}{3} a^2 + a^2 \ln 2 = a^2 \left(\frac{2}{3} + \ln 2 \right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Příklad 4.2. Vypočtete obsah množiny A omezené kardioidou, mající v polárních souřadnicích rovnici $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $a > 0$ je konstanta.

Řešení. Množina je znázorněna na obr. 4.2 a). Vzhledem ke způsobu zadání kardioidy je vhodné použít transformaci do polárních souřadnic. Množina A se transformuje na množinu

$$B: \begin{cases} -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq \varrho \leq a(1 + \cos \varphi), \end{cases}$$



Obr. 4.2

což je elementární množina vzhledem k ose φ (obr. 4.2 b)). Na integrál transformovaný podle věty 3.8 proto můžeme použít Fubiniovu větu 1.55. Dostaneme:

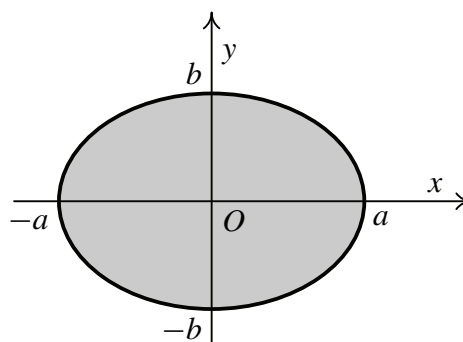
$$\begin{aligned}
 m_2(A) &= \iint_A dx dy = \iint_B \varrho \, d\varrho d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos\varphi)} \varrho \, d\varrho \right) d\varphi = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\varrho^2]_0^{a(1+\cos\varphi)} d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{4} \left[3\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

▲

Příklad 4.3. Vypočtěte obsah vnitřku elipsy A o poloosách a a b , $a, b > 0$.

Řešení. Abychom si usnadnili výpočet, umístíme střed elipsy do počátku souřadnicové soustavy a osy souměrnosti do souřadnicových os (na obsah to nemá vliv) — viz obr. 4.3. Rovnice elipsy pak bude $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Nyní použijeme transformaci do eliptických souřadnic (3.7), konkrétně

$$\begin{aligned}
 x &= a\varrho \cos\varphi, \\
 y &= b\varrho \sin\varphi, \quad |J| = ab\varrho.
 \end{aligned}$$



Obr. 4.3

Změnou měřítek na osách se elipsa transformuje na jednotkový kruh, který vyjádříme v „obyčejných“ polárních souřadnicích. Obrazem množiny A tedy bude množina

$$B: \begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \varrho \leq 1, \end{aligned}$$

což je obdélník. S použitím věty 3.8 a následně Fubiniovy věty 1.14 nám vyjde:

$$\begin{aligned} m_2(A) &= \iint_A dx dy = \iint_B ab\varrho d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} ab d\varphi \cdot \int_0^1 \varrho d\varrho = \\ &= ab[\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 = ab \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

Pro $a = b = r$, kde $r > 0$, dostáváme jako speciální případ obsah πr^2 kruhu o poloměru r . ▲

4.1.2. Míra (objem) měřitelné množiny v trojrozměrném prostoru

Nechť A je měřitelná množina v trojrozměrném prostoru. Z definice míry v \mathbb{R}^3 a z definice trojného integrálu vyplývá, že pro *objem* $m_3(A)$ této množiny platí

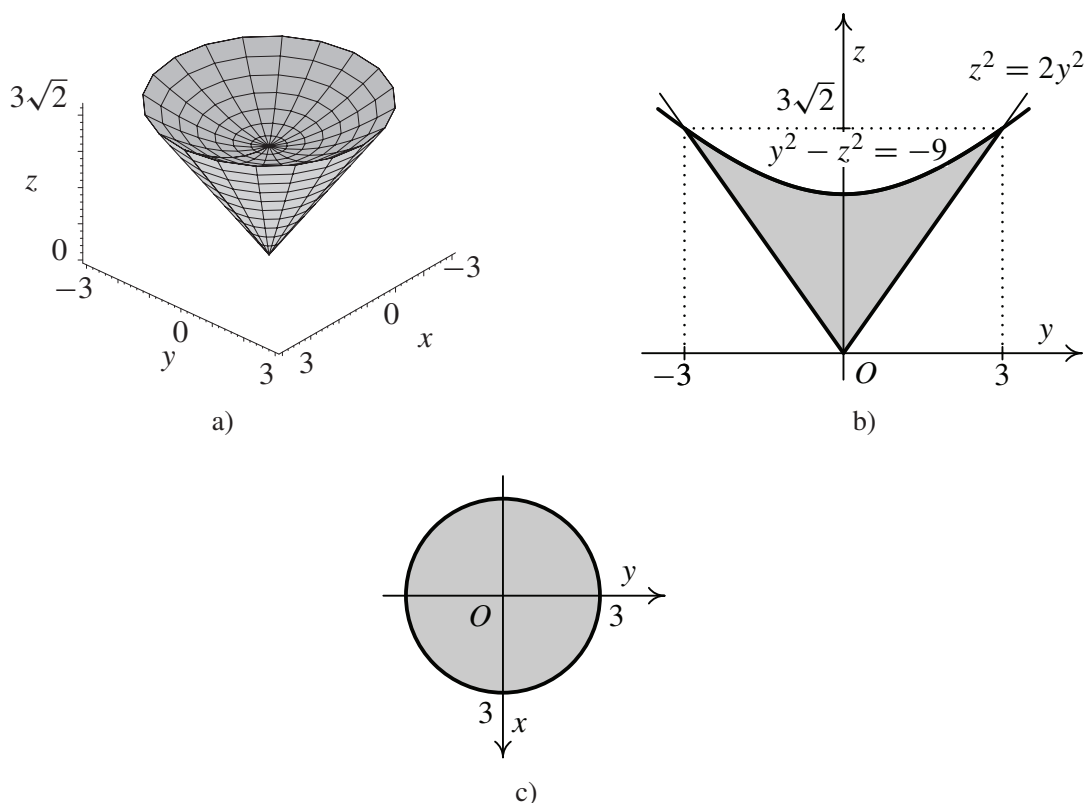
$$m_3(A) = \iiint_A dx dy dz. \quad (4.2)$$

Příklad 4.4. Vypočítejte objem tělesa A omezeného plochami $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ a $x^2 + y^2 - z^2 = -9$, leží-li A v poloprostoru $z \geq 0$.

Řešení. První plochou je rotační kužel s osou z , druhou rotační dvojdílný hyperboloid s osou z . To lze snadno nahlédnout pomocí řezů plochy rovinami $x = 0$, $y = 0$ a $z = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Množina A je znázorněna na obr. 4.4 a). Na obr. 4.4 b) je řez této množiny rovinou $x = 0$. Zadané plochy se protínají v kružnici. Její rovnici dostaneme odečtením rovnic obou kvadrik. Vyjde $x^2 + y^2 = 9$. Tedy kolmým průmětem množiny A do roviny xy je kruh K se středem v počátku o poloměru 3 (obr. 4.4 c)).

Použijeme transformaci do cylindrických souřadnic. Nejprve vyjádříme průmět K v polárních souřadnicích, tj. $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \varrho \leq 3$. Z rovnic ploch určíme, že

$$\sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 9}.$$



Obr. 4.4

Odtud dosazením za $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$ dostaneme, že $\sqrt{2}\varrho \leq z \leq \sqrt{\varrho^2 + 9}$. Množina A má v cylindrických souřadnicích tedy popis

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq \varrho \leq 3, \\
 B: & \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\
 & \sqrt{2}\varrho \leq z \leq \sqrt{\varrho^2 + 9}.
 \end{aligned}$$

To je elementární množina vzhledem k souřadnicové rovině $\varrho\varphi$. Na transformovaný integrál použijeme Fubiniovu větu. Integrace podle proměnné z musí předcházet integraci podle proměnné ϱ , na pořadí integrace podle proměnné φ nezáleží. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
 m_3(A) &= \iiint_A dx dy dz = \iiint_B \varrho d\varrho d\varphi dz = \\
 &= \int_0^3 \left\{ \int_{\sqrt{2}\varrho}^{\sqrt{\varrho^2+9}} \left(\int_0^{2\pi} \varrho d\varphi \right) dz \right\} d\varrho = \int_0^3 \left\{ \int_{\sqrt{2}\varrho}^{\sqrt{\varrho^2+9}} \varrho [\varphi]_0^{2\pi} dz \right\} d\varrho =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^3 \left\{ \int_{\sqrt{2}\varrho}^{\sqrt{\varrho^2+9}} 2\pi\varrho \, dz \right\} d\varrho = \int_0^3 \left\{ 2\pi\varrho \left[z \right]_{\sqrt{2}\varrho}^{\sqrt{\varrho^2+9}} \right\} d\varrho = \\
&= 2\pi \int_0^3 (\varrho\sqrt{\varrho^2+9} - \varrho^2\sqrt{2}) \, d\varrho = \\
&= 2\pi \int_0^3 \varrho\sqrt{\varrho^2+9} \, d\varrho - 2\pi \int_0^3 \varrho^2\sqrt{2} \, d\varrho = \left. \begin{array}{l} \varrho^2+9 = t \\ 2\varrho d\varrho = dt \\ \varrho d\varrho = \frac{1}{2} dt \\ 0 \rightsquigarrow 9, \quad 3 \rightsquigarrow 18 \end{array} \right| = \\
&= \pi \int_9^{18} \sqrt{t} \, dt - 2\pi\sqrt{2} \left[\frac{\varrho^3}{3} \right]_0^3 = \frac{2\pi}{3} \left[\sqrt{t^3} \right]_9^{18} - 18\pi\sqrt{2} = \\
&= \frac{2\pi}{3} (54\sqrt{2} - 27) - 18\pi\sqrt{2} = 18\pi(\sqrt{2} - 1). \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Častý je případ, kdy těleso A , jehož objem hledáme, je elementární množina vzhledem k rovině xy , tj.

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina a f a g jsou spojité funkce na M , přičemž $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$ (srovnejte obr. 2.2). Pak je možné vzorec (4.2) pro výpočet objemu upravit pomocí Fubiniovy věty na tvar

$$m_3(A) = \iint_M (g(x, y) - f(x, y)) \, dx dy, \quad (4.3)$$

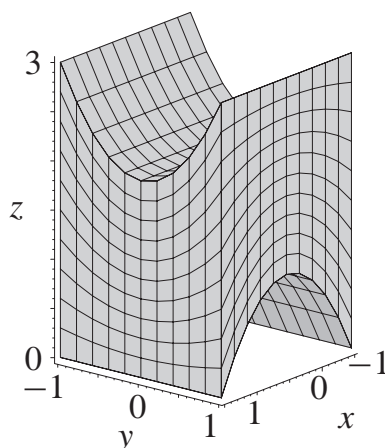
v němž figuruje jen dvojný integrál.

Příklad 4.5. Vypočítejte objem tělesa A určeného nerovnostmi $z \geq 1 - x^2$ a $z \leq y^2 + 2$, přičemž $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

Řešení. Plochy, které omezují množinu A zdola resp. shora, jsou parabolické válce, jejichž povrchové přímky jsou rovnoběžné se souřadnicovou osou y resp. x — viz obr. 4.5. Kolmým průmětem množiny A do roviny xy je čtverec $M: \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$.

Použijeme vzorec (4.3), v němž zvolíme $f(x, y) = 1 - x^2$ a $g(x, y) = y^2 + 2$. Vzniklý integrál vypočítáme pomocí Fubiniovy věty. Vyjde:

$$m_3(A) = \iint_M ((y^2 + 2) - (1 - x^2)) \, dx dy =$$



Obr. 4.5

$$\begin{aligned}
 &= \iint_M (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + 1) \, dy \right) dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 \left(2x^2 + \frac{8}{3} \right) dx = \\
 &= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{8x}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{20}{3}.
 \end{aligned}$$

▲

4.1.3. Míra měřitelné množiny v n -rozměrném prostoru

Stejně jako ve dvojrozměrném a trojrozměrném prostoru plyne z definice míry a z definice integrálu pro míru měřitelné množiny M v \mathbb{R}^n vzorec

$$m_n(M) = \int \cdots \int_M dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \quad (4.4)$$

Příklad 4.6. Vypočítejte míru T_n n -rozměrného jehlanu (simplexu)

$$M_n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n]: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq h\},$$

kde $h > 0$ je konstanta.

Řešení. Provedme nejprve dilataci $x_1 = hu_1, x_2 = hu_2, \dots, x_n = hu_n$. Pro jakobián J této transformace platí $J = h^n$ — viz (3.19). Množina M_n přejde po

zmíněné transformaci v množinu

$$M_n^* = \{[u_1, u_2, \dots, u_n]: u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_n \geq 0, u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq 1\}.$$

Množinu M_n^* jakožto elementární množinu můžeme vymežit pomocí nerovností:

$$M_n^* : \begin{aligned} 0 &\leq u_n &&\leq 1, \\ 0 &\leq u_{n-1} &&\leq 1 - u_n, \\ 0 &\leq u_{n-2} &&\leq 1 - u_n - u_{n-1}, \\ &\vdots \\ 0 &\leq u_2 &&\leq 1 - u_n - \dots - u_3, \\ 0 &\leq u_1 &&\leq 1 - u_n - \dots - u_3 - u_2. \end{aligned}$$

Dostáváme pak

$$T_n = \int_{M_n} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{M_n^*} \dots \int h^n du_1 du_2 \dots du_n = h^n \alpha_n,$$

kde

$$\alpha_n = \int_{M_n^*} \dots \int du_1 du_2 \dots du_n.$$

Označíme-li při pevném $u_n \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\tilde{M}_{n-1} = \{[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]: u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_{n-1} \geq 0, \\ u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} \leq 1 - u_n\},$$

vidíme, že

$$\alpha_n = \int_0^1 \left(\int_{\tilde{M}_{n-1}} \dots \int du_1 du_2 \dots du_{n-1} \right) du_n.$$

Provedeme-li ve vnitřním integrálu novou dilataci $u_1 = (1 - u_n)v_1, u_2 = (1 - u_n)v_2, \dots, u_{n-1} = (1 - u_n)v_{n-1}$ s jakobiánem $J_{n-1} = (1 - u_n)^{n-1}$, obdržíme

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^1 (1 - u_n)^{n-1} \alpha_{n-1} du_n = \alpha_{n-1} \int_0^1 (1 - u_n)^{n-1} du_n = \\ &= \left| \begin{array}{l} 1 - u_n = t \\ -du_n = dt \\ 0 \rightsquigarrow 1, \quad 1 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = -\alpha_{n-1} \int_1^0 t^{n-1} dt = \alpha_{n-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Protože $\alpha_n = \alpha_{n-1}/n, \alpha_1 = 1$, snadno zjistíme, že $\alpha_n = 1/n!$ pro každé $n \geq 1$. Odtud vyjde $T_n = h^n/n!$. ▲

Příklad 4.7. Vypočtěte míru V_n n -rozměrné koule $K_n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$, kde $R > 0$ je její poloměr.

Řešení. Podle vzorce (4.4) máme $V_n = \int \dots \int_{K_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Užitím příkladu 3.32, kde volíme $\alpha = 0$, dostáváme pro $n \geq 2$

$$V_n = \frac{R^n}{n!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

kde $n!! = n(n-2) \dots 3 \cdot 1$ pro n liché, $n!! = n(n-2) \dots 4 \cdot 2$ pro n sudé a $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x . Výsledek zřejmě platí i pro $n = 1$.

Pro míru (objem) V_n n -rozměrné jednotkové koule odtud dostáváme vzorce

$$V_{2k} = \frac{2^k \pi^k}{(2k)!!} \quad \text{pro } n = 2k, \quad \text{resp.} \quad V_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!} \quad \text{pro } n = 2k+1,$$

přičemž $k \in \mathbb{N}$, resp. $k \in \mathbb{N}_0$.

Vypočtěte ještě pro zajímavost, jakou část objemu $\widehat{V}_n = 2^n$ n -rozměrné krychle o hraně 2, do níž je koule K_n vepsána, představuje objem V_n . Pro $n = 2k$ máme

$$\frac{V_n}{\widehat{V}_n} = \frac{\pi^k}{2^k \cdot (2k)!!} = \frac{\pi^k}{2^{2k} k!}, \quad (4.5)$$

zatímco pro $n = 2k+1$ vychází

$$\frac{V_n}{\widehat{V}_n} = \frac{\pi^k}{2^k \cdot (2k+1)!!} = \frac{\pi^k k!}{(2k+1)!}. \quad (4.6)$$

Souhrnně pro všechna $n \in \mathbb{N}$ můžeme psát

$$\frac{V_n}{\widehat{V}_n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n!!}.$$

(Zvažte, že pro libovolné celé n platí $\lfloor -\frac{n}{2} \rfloor = -\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, takže pro exponent mocniny čísla 2 bude v předchozím podílu platit $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - n = \lfloor \frac{n+1}{2} - n \rfloor = \lfloor -\frac{n-1}{2} \rfloor = -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.)

Dodejme, že poslední výraz má nulovou limitu pro $n \rightarrow \infty$. To lze ověřit následovně: Uvažujme nekonečné řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde obecný člen a_k je dán vztahem (4.5) a obecný člen b_k je dán vztahem (4.6). Platí $a_{k+1}/a_k = \pi/(4(k+1)) \rightarrow 0$, $b_{k+1}/b_k = \pi/(2(2k+3)) \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$. Z limitního podílového kritéria pro řady s nezápornými členy (viz [8, str. 17]) plyne, že obě řady jsou konvergentní. Podle nutné podmínky konvergence číselných řad to znamená, že $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$. Z toho již plyne, že i $V_n/\widehat{V}_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. \blacktriangle

4.1.4. Míra (obsah) plochy v trojrozměrném prostoru

Další geometrickou aplikací je výpočet obsahu plochy v prostoru. Definice plochy je ovšem v obecném případě poměrně obtížná a stejně tak je tomu s definicí jejího obsahu. Omezíme se proto na speciální případ plochy vytvořené grafem funkce dvou proměnných. Příslušnou teorii, pojmy a vzorce lze nalézt v [26] nebo [27].

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená oblast (tj. souvislá otevřená množina), jejíž hranice je sjednocením konečně mnoha po částech hladkých křivek. Předpokládejme, že funkce f má spojité a ohraničené první parciální derivace na Ω a je spojitá na uzávěru $\overline{\Omega}$. Označme

$$G = \{[x, y, f(x, y)] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \overline{\Omega}\} \quad (4.7)$$

její graf. Pak lze dokázat, že pro *obsah* tohoto grafu platí:

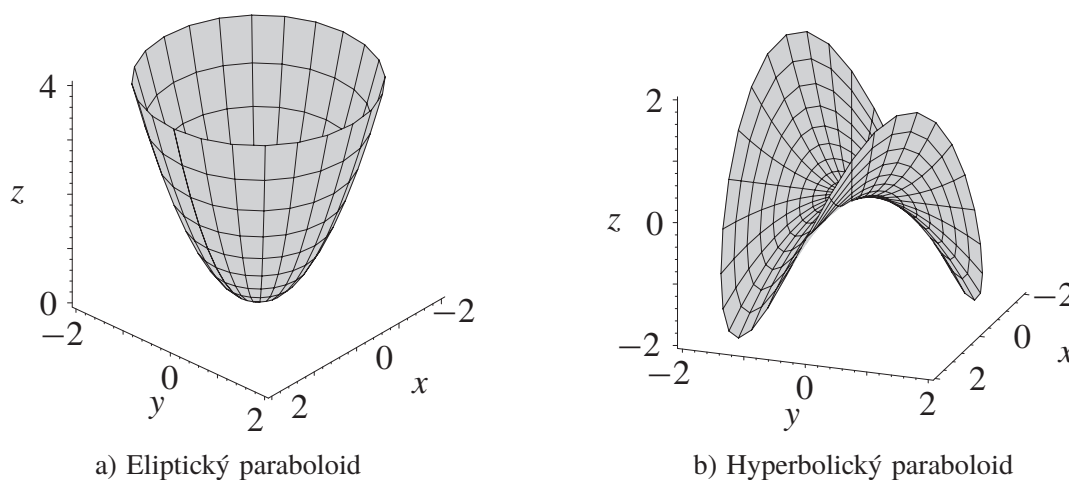
$$S_2(G) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} \, dx dy. \quad (4.8)$$

Náznak odvození vzorce (4.8). Nechť v \mathbb{R}^3 je dána rovina o rovnici $z = ax + by + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, a nechť $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$. Položme $z_0 = ax_0 + by_0 + c$. Pro libovolná v absolutní hodnotě malá nenulová čísla h, k uvažujme v rovině xy trojrozměrného prostoru xyz obdélník M s vrcholy $[x_0, y_0, 0]$, $[x_0 + h, y_0, 0]$, $[x_0, y_0 + k, 0]$, $[x_0 + h, y_0 + k, 0]$. Přímkami kolmé k rovině xy procházející těmito vrcholy protnou danou rovinu v bodech $A = [x_0, y_0, z_0]$, $B = [x_0 + h, y_0, z_0 + ah]$, $C = [x_0, y_0 + k, z_0 + bk]$, $D = [x_0 + h, y_0 + k, z_0 + ah + bk]$. Tyto čtyři body jsou vrcholy rovnoběžníku \tilde{M} ležícího v dané rovině. Označíme-li $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB} = (h, 0, ah)$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{AC} = (0, k, bk)$, můžeme pomocí známého vzorce z lineární algebry vypočítat obsah tohoto rovnoběžníku: $S_2(\tilde{M}) = |\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| = |(-ahk, -bkh, hk)| = \sqrt{1 + a^2 + b^2} |hk| = \sqrt{1 + a^2 + b^2} m_2(M)$. Vezmeme-li nyní speciálně v úvahu tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě $[x^*, y^*, f(x^*, y^*)]$, kde $[x^*, y^*, 0] \in M$, máme $a = f'_x(x^*, y^*)$, $b = f'_y(x^*, y^*)$, $c = f(x^*, y^*) - x^* f'_x(x^*, y^*) - y^* f'_y(x^*, y^*)$. Přijmeme-li předpoklad, že obsah „kousku“ \tilde{G} grafu funkce f ležícího nad obdélníkem M je přibližně roven obsahu „kousku“ \tilde{M} tečné roviny ležícího nad obdélníkem M , platí přibližně $S_2(\tilde{G}) = \sqrt{1 + a^2 + b^2} m_2(M) = \sqrt{1 + [f'_x(x^*, y^*)]^2 + [f'_y(x^*, y^*)]^2} m_2(M)$.

Příklad 4.8. Vypočítejte obsah grafu G funkce f , která je definovaná na množině $\overline{\Omega} : x^2 + y^2 \leq 4$, je-li

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$,

b) $f(x, y) = xy$.



Obr. 4.6

Řešení. Na výpočet použijeme vzorec (4.8). Množina $\overline{\Omega}$ je kruh se středem v počátku a poloměrem 2, takže na vzniklý integrál v obou případech použijeme transformaci do polárních souřadnic. Protože funkce f má v obou případech spojité parciální derivace v celé rovině \mathbb{R}^2 , můžeme integrál počítat přes uzavřený kruh $\overline{\Omega}$ a ne jen přes otevřený kruh Ω (tyto množiny se liší o hraniční kružnici a ta má dvojrozměrnou míru nula). Obrazem $\overline{\Omega}$ bude množina

$$B: \begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \varrho \leq 2, \end{aligned}$$

což je dvojrozměrný interval, takže na transformovaný integrál můžeme použít Fubiniovu větu.

a) Jde o část eliptického paraboloidu. Platí $f'_x(x, y) = 2x$ a $f'_y(x, y) = 2y$, takže

$$\begin{aligned} S_2(G) &= \iint_{\overline{\Omega}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx dy = \\ &= \iint_B \sqrt{1 + 4\varrho^2 \cos^2 \varphi + 4\varrho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \varrho \, d\varrho d\varphi = \\ &= \iint_B \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} \, d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^2 \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} \, d\varrho = \\ &= \left[\begin{array}{l} 1 + 4\varrho^2 = t \\ 8\varrho \, d\varrho = dt \\ \varrho \, d\varrho = \frac{1}{8} dt \\ 0 \rightsquigarrow 1, \quad 2 \rightsquigarrow 17 \end{array} \right] = [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \int_1^{17} \frac{1}{8} \sqrt{t} \, dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_1^{17} = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1).$$

b) Jde o část hyperbolického paraboloidu. Platí $f'_x(x, y) = y$ a $f'_y(x, y) = x$, takže

$$\begin{aligned} S_2(G) &= \iint_{\overline{\Omega}} \sqrt{1 + y^2 + x^2} \, dx dy = \\ &= \iint_B \sqrt{1 + \varrho^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2 \cos^2 \varphi} \cdot \varrho \, d\varrho d\varphi = \\ &= \iint_B \varrho \sqrt{1 + \varrho^2} \, d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^2 \varrho \sqrt{1 + \varrho^2} \, d\varrho = \\ &= \left[\begin{array}{l} 1 + \varrho^2 = t^2 \\ 2\varrho \, d\varrho = 2t \, dt \\ \varrho \, d\varrho = t \, dt \\ 0 \rightsquigarrow 1, \quad 2 \rightsquigarrow \sqrt{5} \end{array} \right] = [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \int_1^{\sqrt{5}} t^2 \, dt = \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Všimněte si, že pro procvičení jsme na zcela obdobný jednoduchý určitý integrál vzhledem k proměnné ϱ použili pokaždé poněkud odlišnou substituci. ▲

4.1.5. Míra (obsah) $(n-1)$ -rozměrné plochy v n -rozměrném prostoru

Vzorec pro $(n-1)$ -rozměrnou míru (obsah) v n -rozměrném prostoru grafu

$$G = \{[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})] \in \mathbb{R}^n : [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \overline{\Omega}\}$$

funkce f o $n-1$ proměnných je analogický vzorci (4.8):

$$S_{n-1}(G) = \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} f_{x_j}^2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \right]^{1/2} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}. \quad (4.9)$$

Přitom předpokládáme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je omezená oblast, funkce f je spojitá na $\overline{\Omega}$ a má spojitě a ohraničené parciální derivace na oblasti Ω , jejíž hranice je po částech hladká (tj. je sjednocením konečně mnoha grafů diferencovatelných funkcí $n-2$ proměnných $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}}$, $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{n-2} \leq n-1$, definovaných na kompaktních množinách, přičemž různé grafy mají společné nejvýše

body svých „okrajů“). Přesný výklad pojmu *plocha* v \mathbb{R}^n a *míra plochy* v \mathbb{R}^n viz např. [26] nebo [27].

Příklad 4.9. Vypočtěte obsah S_{n-1} povrchu n -rozměrné koule K_n v n -rozměrném prostoru, která má daný poloměr $R > 0$.

Řešení. Výpočet nejprve provedeme pro $n \geq 4$. Určíme obsah „horní“ poloviny povrchu (hranice) koule K_n . Užitím vzorce (4.9) dostáváme:

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = \int \cdots \int_{K_{n-1}} \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} f'_{x_j}{}^2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \right]^{1/2} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1},$$

kde $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}$ a

$$K_{n-1} = \{[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < R^2\}.$$

Protože $f'_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = -x_j / \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}$, máme

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} f'_{x_j}{}^2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{R^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}.$$

Dosazením do vzorce z úvodu řešení dostáváme

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = \int \cdots \int_{K_{n-1}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

Použitím transformace do sférických souřadnic

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-5} \sin \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3}, \\ x_2 &= \varrho \sin \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-5} \sin \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3}, \\ x_3 &= \varrho \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-5} \sin \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3}, \\ x_4 &= \varrho \cos \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-5} \sin \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3}, \\ &\vdots \\ x_{n-3} &= \varrho \cos \vartheta_{n-5} \sin \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3}, \\ x_{n-2} &= \varrho \cos \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3}, \\ x_{n-1} &= \varrho \cos \vartheta_{n-3} \end{aligned}$$

přejde množina K_{n-1} v množinu

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varrho < R, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ K_{n-1}^*: 0 &\leq \vartheta_1 \leq \pi, \\ &\vdots \\ 0 &\leq \vartheta_{n-3} \leq \pi. \end{aligned}$$

Pro absolutní hodnotu jakobiánu této transformace platí

$$|J| = \varrho^{n-2} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-3} \vartheta_{n-3}.$$

Užitím vztahu $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = \varrho^2$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_{n-1} &= R \int_{K_{n-1}^*} \cdots \int \frac{1}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} \varrho^{n-2} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-3} \vartheta_{n-3} \times \\ &\quad \times d\varrho d\varphi d\vartheta_1 d\vartheta_2 \cdots d\vartheta_{n-2} = \\ &= R \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \cdots \left(\int_0^\pi \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-3} \vartheta_{n-3} \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times d\vartheta_1 \right) \cdots d\vartheta_{n-3} \right] d\varphi \right\} d\varrho = \\ &= R \int_0^R \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \cdots \int_0^\pi \sin^{n-3} \vartheta_{n-3} d\vartheta_{n-3}. \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} d\varrho &= \left| \begin{array}{l} \varrho = R \sin t \\ d\varrho = R \cos t dt \\ 0 \rightsquigarrow 0, R \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^{n-2} \sin^{n-2} t}{R \cos t} R \cos t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^{n-2} \sin^{n-2} t dt = R^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t dt. \end{aligned}$$

Pomocí rekurentního vzorce $\int_0^\pi \sin^k \vartheta d\vartheta = \frac{k-1}{k} \int_0^\pi \sin^{k-2} \vartheta d\vartheta$ (viz poznámka 3.33) a jeho analogie $\int_0^{\pi/2} \sin^k \vartheta d\vartheta = \frac{k-1}{k} \int_0^{\pi/2} \sin^{k-2} \vartheta d\vartheta$, která se dokáže obdobně, obdržíme

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = 2\pi R^{n-1} \gamma_n^* \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!} \cdot 2 \cdot \pi \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{2}{3} \cdot \pi \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdots \gamma_{n-1} \frac{(n-4)!!}{(n-3)!!},$$

kde $\gamma_n = \pi$, $\gamma_n^* = \pi/2$ pro n sudé, $\gamma_n = 2$, $\gamma_n^* = 1$ pro n liché. Tedy

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = 2\pi \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} = \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x . Obsah povrchu celé koule je tedy roven číslu

$$S_{n-1} = \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Výsledek je zřejmě správný i pro $n = 2$ a $n = 3$. Poznamenejme ještě závěrem, že pro limitu podílu objemu n -rozměrné koule o poloměru R (viz příklad 4.7) a obsahu jejího povrchu platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{S_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{n} = 0. \quad \blacktriangle$$

Poznámka 4.10. Pozorný čtenář si jistě všiml, že provedený výpočet nebyl zcela korektní. Integrovaná funkce totiž nebyla na K_{n-1} ohraničená. Náš výpočet však lze ospravedlnit, předpokládáme-li, že obsah $\frac{1}{2} S_{n-1}^*$ $(n-1)$ -rozměrných kulových vrchlíků s osou v ose x_n , středem v počátku, o středovém úhlu 2ψ , kde $\psi \in (0, \pi/2)$, je spojitou funkcí proměnné ψ . Skutečně, podobným postupem jako dříve dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_{n-1}^* &= 2\pi R^{n-1} \int_0^\psi \sin^{n-2} t \, dt \cdot 2^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \frac{1}{(n-3)!!} = \\ &= \frac{R^{n-1}}{(n-3)!!} \int_0^\psi \sin^{n-2} t \, dt \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\int_0^\psi \sin^{n-2} t \, dt \rightarrow \gamma_n^* \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}$ pro $\psi \rightarrow \pi/2-$, odtud snadno zjistíme, že

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = \lim_{\psi \rightarrow \pi/2-} \frac{1}{2} S_{n-1}^* = \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} \gamma_n^* 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} = \frac{R^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Lze ukázat, že vzorec (4.9) platí i v případě, že integrál stojící na jeho pravé straně je nevlastní (viz kapitola 5) a konvergentní (parciální derivace f'_{x_j} tedy nemusí být nutně ohraničené na Ω). Srovnejte poznámku 5.27.

4.2. Fyzikální aplikace

Z fyzikálních aplikací uvedeme výpočet hmotnosti, souřadnic těžiště, momentu setrvačnosti a elektrického náboje. Odvození uvedených vzorců patří do teoretické fyziky.