Příklady na první cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2009

Věta o vlastnostech homogenního markovského řetězce: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) a maticí přechodu **P**. Pak pro $\forall n, m \in \mathbb{N}_0, m \geq 1$ platí:

a) **P**(n,n+m) = **P**(m) = $\mathbf{P}^m$.

b) **p**(n,n+m) = **p**(m) = **p**(0)$\mathbf{P}^m$.

Příklad 1.: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1,2}, vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Určete vektor absolutních pravděpodobností po jednom až po čtyřech krocích.

Řešení:

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Návod na řešení v MATLABu:

```
P=[0.5 0.5 0;0 0 1;0.5 0.5 0];
p0=[1/3 1/3 1/3];
p1=p0*P
p2= p0*P^2
p3= p0*P^3
p4= p0*P^4
```

Nebo:
p2=p1*P
p3=p2*P
p4=p3*P

Příklad 2.: (Model mužských zaměstnání) Předpokládáme rozdělení mužských zaměstnání do tří tříd: vědečtí pracovníci, kvalifikovaní pracovníci, nekvalifikovaní pracovníci. Je známo, že 80% synů vědeckých pracovníků se stane vědeckými pracovníky, 10% kvalifikovanými a 10% nekvalifikovanými pracovníky. Ze synů kvalifikovaných pracovníků 60% bude kvalifikovanými pracovníky, 20% vědeckými a 20% nekvalifikovanými pracovníky. Konečně v případě nekvalifikovaných pracovníků 50% synů bude nekvalifikovanými pracovníky, 25% kvalifikovanými a 25% vědeckými pracovníky. Předpokládejme, že každý muž má syna. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1,2}, kde stav 0 znamená „vědecký pracovník", stav 1 – „kvalifikovaný pracovník", stav 2 – „nekvalifikovaný pracovník". Náhodná veličina X_n nabývá hodnoty j, když muž v n-té generaci má zaměstnání typu j. Nejprve sestavíme matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$ Zajímá nás pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem. Hledáme tedy prvek $p_{20}(2)$ matice $\mathbf{P}^2$.

$p_{20}(2) = p_{20}p_{00} + p_{21}p_{10} + p_{22}p_{020} = 0{,}25.0{,}8 + 0{,}25.0{,}2 + 0{,}5.0{,}25 = 0{,}375.$

Návod na řešení v MATLABu:

```
P=[0.8 0.1 0.1;0.2 0.6 0.2; 0.25 0.25 0.5];
P^2
```

Dostaneme

```
0.6850   0.1650   0.1500
0.3300   0.4300   0.2400
0.3750   0.3000   0.3250
```

Hledaná pravděpodobnost je tedy 0,375.

Příklad 3.: V příkladu 2 nyní předpokládejme, že muž má syna jen s pravděpodobností 0,8. Zaveďte nyní homogenní markovský řetězec se čtyřmi stavy – první tři jsou stejné jako v předešlé úloze a čtvrtý odpovídá případu, kdy muž nemá syna a proces končí. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Řešení: Matice přechodu bude nyní řádu 4.

$$P = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,08 & 0,08 & 0,2 \\ 0,16 & 0,48 & 0,16 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět nás zajímá prvek $p_{20}(2) = 0{,}2.0{,}64 + 0{,}2.0{,}16 + 0{,}4.0{,}2 + 0{,}2.0 = 0{,}24$

Příklad 4.: (Klasifikace roků podle úrody jablek) V severní Nové Anglii můžeme klasifikovat roky podle úrody jablek jako úrodné, průměrné a neúrodné. Pravděpodobnost, že po úrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,4; 0,4; 0,2. Pravděpodobnost, že po průměrném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,6; 0,2. Pravděpodobnost, že po neúrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,4; 0,4. Rok 1965 byl úrodný. Vypočtěte vektor absolutních pravděpodobností pro rok 1967.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1,2}, kde stav 0 znamená úrodný rok, stav 1 průměrný rok a stav 2 neúrodný rok. Náhodná veličina X_n nabývá hodnoty j, když n-tý rok odpovídá stavu j. Sestavíme matici přechodu
$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$. Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0)$. Hledáme vektor $\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2 = (0,28,\ 0,48,\ 0,24)$.

Příklad 5.: V příkladu 4 předpokládejme, že pravděpodobnost, že rok bude úrodný, je ¼, průměrný ½ a neúrodný ¼. Jaký je vektor absolutních pravděpodobností pro příští rok?

Řešení: Vektor počátečních pravděpodobností nyní bude $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Vypočteme vektor absolutních pravděpodobností $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Příklad 6.: Homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ má množinu stavů $J = \{0,1,2,3\}$ a matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,04 & 0,32 & 0,64 & 0 \\ 0,008 & 0,096 & 0,384 & 0,512 \end{pmatrix}$.
Je-li vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (0,0,0,1)$, najděte vektor absolutních pravděpodobností po třech krocích.

Řešení: Vektor absolutních pravděpodobností po třech krocích:
$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^3 = (0,1162\ 0,3658\ 0,3838\ 0,1342)$