Příklady na druhé cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2009

Definice stacionárního vektoru stochastické matice: Nechť **a** je stochastický vektor a **P** stochastická matice odpovídající dimenze. Jestliže platí **a** = **aP**, pak vektor **a** se nazývá stacionární vektor matice **P**.

Definice stacionárního rozložení HMŘ: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Stochastický vektor **a**, který je stacionárním vektorem matice **P**, se nazývá stacionární rozložení daného řetězce.

Definice limitního rozložení HMŘ: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0). Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \overline{\mathbf{p}}$, pak vektor $\overline{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení daného řetězce. Jestliže vektor $\overline{\mathbf{p}}$ nezávisí na vektoru počátečních pravděpodobností **p**(0), pak řekneme, že daný řetězec je ergodický (regulární).

Věta o vztahu mezi stacionárním a limitním rozložením HMŘ: Jestliže $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je ergodický homogenní markovský řetězec a existuje jeho stacionární rozložení **a**, pak limitní rozložení $\overline{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení **a**.

Markovova věta: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Jestliže existuje takové číslo $n \in \mathbb{N}_0$, že matice $\mathbf{P}^n$ má všechny prvky kladné, pak

a) existuje stacionární rozložení daného řetězce a je jediné,
b) řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je ergodický,
c) posloupnost matic $\mathbf{P}^n$ konverguje k limitní matici **A**, jejíž řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a**.

Návod na hledání stacionárního vektoru stochastické matice pomocí MATLABu
a) Zadáme matici přechodu P. Její řád zjistíme příkazem n = size(P,1).
b) Vytvoříme jednotkovou matici I = eye(n).
c) Získáme matici soustavy A = [[I-P]';ones(1,n)].
d) Vytvoříme vektor pravých stran f = [zeros(n,1);1].
e) Vypočteme stacionární vektor a = (A\f)'.

Příklad 1.: Předpokládejme, že v nějaké oblasti může být počasí pouze ve třech stavech, a to déšť, jasno, sníh. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že nikdy nebývají dva jasné dny za sebou. Jestliže je v jistém dni jasno, pak další den bude buď déšť nebo sníh, a to se stejnou pravděpodobností. Jestliže je v jistém dni sníh nebo déšť, pak následující den se počasí buď nezmění, a to s pravděpodobností 0,5 nebo se změní, a pak v polovině případů bude jasno. Popište stav počasí homogenním markovským řetězcem a vypočtěte jeho stacionární rozložení.

Řešení: Homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ má množinu stavů $J = \{1,2,3\}$, kde stav 1 znamená déšť, stav 2 jasno a stav 3 sníh. Matice přechodu **P** má tvar:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Vektor stacionárních pravděpodobností $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ vyhovuje rovnici $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, tedy

$a_1 = 0,5a_1 + 0,5a_2 + 0,25a_3$,
$a_2 = 0,25a_1 + 0a_2 + 0,25a_3$,
$a_3 = 0,25a_1 + 0,5a_2 + 0,5a_3$,
$a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Po úpravě:

$0,5a_1 - 0,5a_2 - 0,25a_3 = 0$,
$-0,25a_1 + a_2 - 0,25a_3 = 0$,
$-0,25a_1 - 0,5a_2 + 0,5a_3 = 0$,
$a_1 + a_2 + a_3 = 1$

Řešením tohoto systému je vektor $\mathbf{a} = (0,4\ \ 0,2\ \ 0,4)$

Matice soustavy: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 1 & -0,25 \\ -0,25 & -0,5 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, vektor pravých stran: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$ dostaneme ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{f}$, tedy v našem případě $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix}$. Vektor stacionárních pravděpodobností je roven transponovanému řešení $\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{a} = (0,4\ \ 0,2,\ \ 0,4)$.

Příklad 2.: Letka má při zahájení akcí tři letadla. Při akci je letadlo zničeno s pravděpodobností 0,2. Letka se do akce vydá v případě, že má aspoň jedno letadlo. Pokud jsou všechna letadla zničena, pak s akcemi končí. Určete vektor absolutních pravděpodobností pro počty letadel v letce po třetí akci a vektor stacionárních pravděpodobností.

Řešení: Homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ má množinu stavů $J = \{0,1,2,3\}$, kde stav j znamená, že po n-té akci má letka právě j letadel.

Vektor počátečních pravděpodobností: $\mathbf{p}(0) = (0,0,0,1)$.

Pro stanovení pravděpodobností přechodu použijeme binomické rozložení. Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $X \sim Bi(n, \vartheta)$ je $P(X = x) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}$ pro x = 0, 1, …, n.

V našem případě n = 3, $\vartheta = 0,2$.

$p_{00} = 1, p_{01} = 0, p_{02} = 0, p_{03} = 0$

$p_{10} = 0,2, p_{11} = 0,8, p_{12} = 0, p_{13} = 0$

$p_{20} = \binom{2}{0}0,2^2 0,8^0 = 0,04, p_{21} = \binom{2}{1}0,2^1 0,8^1 = 0,32, p_{22} = \binom{2}{2}0,2^0 0,8^2 = 0,64, p_{23} = 0$

$p_{30} = \binom{3}{0}0,2^3 0,8^0 = 0,008, p_{31} = \binom{3}{1}0,2^2 0,8^1 = 0,096, p_{32} = \binom{3}{2}0,2^1 0,8^2 = 0,384,$

$p_{33} = \binom{3}{3}0,2^0 0,8^3 = 0,512$

Matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}04 & 0{,}32 & 0{,}64 & 0 \\ 0{,}008 & 0{,}096 & 0{,}384 & 0{,}512 \end{pmatrix}$

Vektor absolutních pravděpodobností po třech akcích:
$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^3 = (0{,}1162\ 0{,}3658\ 0{,}3838\ 0{,}1342)$
Vektor stacionárních pravděpodobností:
$(a_0,a_1,a_2,a_3) = (a_0,a_1,a_2,a_3)\mathbf{P}$, přičemž $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Odtud dostaneme $\mathbf{a} = (1,0,0,0)$. Znamená to, že po dostatečně velkém počtu akcí s pravděpodobností jedna nezbude letce žádné letadlo.

Příklad 3.: Na malém městě jsou dva obchody, označme je A a B. Zajímáme se o nákupy zákazníků v těchto obchodech. Uvažujeme přitom týdenní období a sledujeme, kde zákazníci v jednotlivých týdnech nakupovali a jak tyto obchody střídali. Pro jednoduchost předpokládejme, že v průběhu jednoho týdne navštěvovali buď pouze obchod A nebo obchod B. Jako součást marketingového výzkumu byla shromážděna data od 1000 zákazníku v časovém horizontu 10 týdnů. Na základě tohoto výzkumu bylo zjištěno, že 90% zákazníků nakupujících v obchodě A tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 10% přejde do obchodu B. Dále 80% zákazníků nakupujících v obchodě B tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 20% přejde do obchodu A. Pro modelování této situace zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2}, přičemž $X_n = 1$, když zákazník v n-tém týdnu nakupuje v obchodě A a $X_n = 2$, když zákazník v n-tém týdnu nakupuje v obchodě B.
a) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě A, kolik jich bude po šesti týdnech? (706 zákazníků)
b) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě B, kolik jich bude po šesti týdnech? (412 zákazníků)
c) Jak velký je tržní podíl těchto dvou obchodů za předpokladu dostatečně velkého počtu období? (Tržní podíl obchodu A činí 66,7%, obchodu B 33,3%.)
d) Obchod B provede reklamní kampaň, aby přilákal zákazníky nakupující v obchodě A. Došlo k určitému přesunu zájmu nakupovat v obchodě B. Dle nového průzkumu byla stanovena matice přechodu $\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}$. Jak se nyní změnil tržní podíl obchodů A a B za předpokladu dostatečně velkého počtu období? (Tržní podíl obchodu A činí 57,1%, obchodu B 42,9%.)

Příklad 4.: Obchodník prodává tři druhy pracích prášků, které označíme A, B, C. Aby zjistil, jak se vyvíjí poptávka po těchto prášcích, provedl v 1. měsíci prodeje průzkum, v němž se zjišťovalo, který druh prášku zákazníci kupují. Při tomto průzkumu bylo zjištěno, že prášek A kupuje 50% zákazníků, prášek B 20% a prášek C 30% zákazníků. Za měsíc byl proveden další průzkum, který zjišťoval, ke kterému druhu prášků zákazníci přešli. Výsledky průzkumu zachycuje matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

a) Určete absolutní pravděpodobnosti po dvou měsících a interpretujte je. (Po dvou měsících bude prášek A nakupovat 80,6% zákazníků, prášek B 12,8% a C 6,6% zákazníků.
b) Najděte vektor limitních pravděpodobností a limitní matici přechodu.

$$(\bar{p} = \begin{pmatrix} 0{,}8281 & 0{,}125 & 0{,}0469 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0{,}8281 & 0{,}125 & 0{,}0469 \\ 0{,}8281 & 0{,}125 & 0{,}0469 \\ 0{,}8281 & 0{,}125 & 0{,}0469 \end{pmatrix})$$