

Příklady na absorpční řetězce

Příklad 1.: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do 30 denních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kde stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti, stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti, stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti, stav 4 splacené pohledávky a stav 5 nedobytné pohledávky.

Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou:

$$p_{12} = 0,77, p_{14} = 0,23, p_{23} = 0,34, p_{24} = 0,66, p_{34} = 0,73 \text{ a } p_{35} = 0,27.$$

Úkoly:

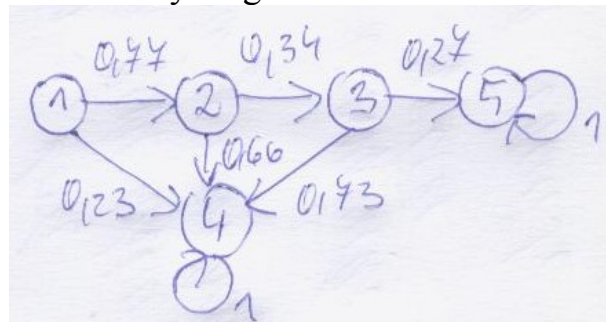
- Sestavte matici přechodu.
- Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.
- Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.
- Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.
- Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.
- Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Řešení:

ad a)

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0,77 & 0 & 0,23 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,73 & 0,27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) Řetězec má tři přechodné stavy, a to 1, 2, 3 a dva trvalé stavy, a to 4 a 5. Oba jsou absorpční, tedy řetězec je absorpční.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,23 & 0 & 0 & 0,77 & 0 \\ 0,66 & 0 & 0 & 0 & 0,34 \\ 0,73 & 0,27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ad c) Vypočteme fundamentální matici absorpčního řetězce:

$$M = I - Q^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 2 & 1 & 0,34 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 v něm v průměru stráví 1 x 30 = 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,77 x 30 = 23,1 dne ve stavu 2 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,26 x 30 = 7,8 dne ve stavu 3 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad d) Vypočteme matici přechodu do absorpčních stavů:

$$B = MR = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 bude s pravděpodobností 0,9293 splacena a s pravděpodobností 0,0707 se stane nedobytnou.

ad e) Vypočteme vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:

$$t = Me = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2,03 \\ 1,34 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace:

2,03 x 30 = 60,9 – pohledávce zařazené do stavu 1 bude v průměru trvat 60,9 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

$1,34 \times 30 = 40,2$ – pohledávce zařazené do stavu 2 bude v průměru trvat 40,2 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

$1 \times 30 = 30$ – pohledávce zařazené do stavu 3 bude v průměru trvat 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad f) Průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek:

$$\begin{pmatrix} 40300000 & 9700000 & 37700000 \\ 92930070 \\ 90820091 \\ 173 & 027 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4472184 \\ 318 \end{pmatrix}$$

Průměrná hodnota splacených pohledávek je tedy 14 472 184 Kč a nedobytných pohledávek je 2 031 816 Kč.

Příklad 2.: Máme populaci diploidní cizosprašné rostliny, ve které sledujeme gen se dvěma alelami a, A . Z populace náhodně vybereme jedince, sprášíme ho homozygotním jedincem typu AA a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jejich potomky. Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce s množinou stavů $J = \{0,1,2\}$, kde stav 0 = aa , stav 1 = $Aa = aA$, stav 2 = AA .

Úkoly:

- Najděte matici přechodu \mathbf{P} .
- Ukažte, že řetězec je absorpční.
- Najděte fundamentální matici \mathbf{M} a interpretujte její prvky.
- Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů \mathbf{B} a interpretujte její prvky.
- Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

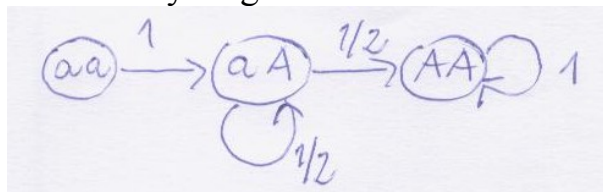
$aa, AA \rightarrow aA, aA, aA, aA$

$aA, AA \rightarrow aA, aA, AA, AA$

$AA, AA \rightarrow AA, AA, AA, AA$

ad a)

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} aa & aA & AA \end{matrix} \\ \begin{matrix} aa \\ aA \\ AA \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



ad b) Řetězec má jediný trvalý stav AA, který je absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad c) Nejprve je nutné najít kanonický tvar matice přechodu.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} AA & aa & aA \end{matrix} \\ \begin{matrix} AA \\ aa \\ aA \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Vidíme, že $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Dále

$$M = I - Q^{-1} \begin{matrix} & \begin{matrix} aa & aA \end{matrix} \\ \begin{matrix} aa \\ aA \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aa (tj. od recesivního homozygota) v něm v průměru setrvá 1 krok než bude absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aa setrvá ve stavu aA v průměru 2 kroky než bude absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aA v něm v průměru setrvá 2 kroky než bude absorbován.

$$\text{ad d) } B = MR = \begin{matrix} & \begin{matrix} AA \end{matrix} \\ \begin{matrix} aa \\ aA \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace: Ať řetězec vychází ze stavu aa nebo aA, tak s pravděpodobností 1 bude absorbován ve stavu AA.

$$\text{ad e) } t = Me = \begin{matrix} & \begin{matrix} aa \end{matrix} \\ \begin{matrix} aa \\ aA \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aa bude v průměru za 3 kroky absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aA bude v průměru za 2 kroky absorbován.

Příklad 3.: Máme populaci diploidní samosprašné rostliny, ve které sledujeme gen se dvěma alelami a,A. Z populace náhodně vybereme jedince, samosprášíme ho a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jeho potomky. Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce s množinou stavů $J = \{0,1,2\}$, kde stav 0 = aa, stav 1 = Aa = aA, stav 2 = AA.

- Najděte matici přechodu **P**.
- Ukažte, že řetězec je absorpční.
- Najděte fundamentální matici **M** a interpretujte její prvky.
- Vypočítejte matici přechodu do absorpčních stavů **B** a interpretujte její prvky.
- Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

ad a)
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ad b) Řetězec má dva trvalé stavy aa a AA, oba jsou absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad c) Nejprve je nutné najít kanonický tvar matice přechodu.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$
 Vidíme, že $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. Dále $N = (I - Q)^{-1}$:

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA v něm v průměru setrvá 2 kroky než bude absorbován.

ad d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA bude s pravděpodobností 1/2 absorbován ve stavu aa a s pravděpodobností 1/2 bude absorbován ve stavu AA.

ad e) $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aA bude v průměru za 2 kroky absorbován.

3. 0 - aa, 1 - Aa = aA, 2 - AA

$$\begin{array}{l}
 aa, aa \rightarrow aa, aa, aa, aa \\
 Aa, Aa \rightarrow AA, aA, aA, aa \\
 AA, AA \rightarrow AA, AA, AA, AA
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 aa \quad Aa \quad AA \\
 aa \left. \begin{array}{l} 1 \\ 1/4 \\ 0 \end{array} \right\} \\
 Aa \left. \begin{array}{l} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{array} \right\} \\
 AA \left. \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \quad
 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G \circlearrowleft \xrightarrow{1/4} \textcircled{1} \xrightarrow{1/2} \textcircled{2} \textcircled{1} \quad J_T = 1030423, \quad J_P = 177$$

Tvorbu slovy 0 a z prou abv, uctim ji kdy absorpni.

$$P = \begin{array}{l}
 aa \\
 AA \\
 aA
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 aa & AA & aA & & & \\
 1 & 0 & 0 & & & \\
 0 & 1 & 0 & & & \\
 1/4 & 1/4 & 1/2 & & &
 \end{array} \right)
 \quad
 R = (1/4 \quad 1/4)$$

$$Q = (1/2)$$

$M = (I - Q)^{-1} = 2$ - uctim upevneni u stavu Aa, u nim u prumeru slova 2 kedy uctim absorpni.

$B = MR = 2(1/4, 1/4) = (1/2, 1/2)$ - uctim upevneni u stavu aa u prumeru slova 1/2 absorpni u stavu aa a 1/2 u stavu AA.

$H = Me = 2$ - uctim upevneni u stavu Aa uctim u prumeru absorpni po dvou kody.

| | |
|-----------|------------|
| S | I |
| Smb | Smb |
| 1-12-0002 | 0000-01-11 |