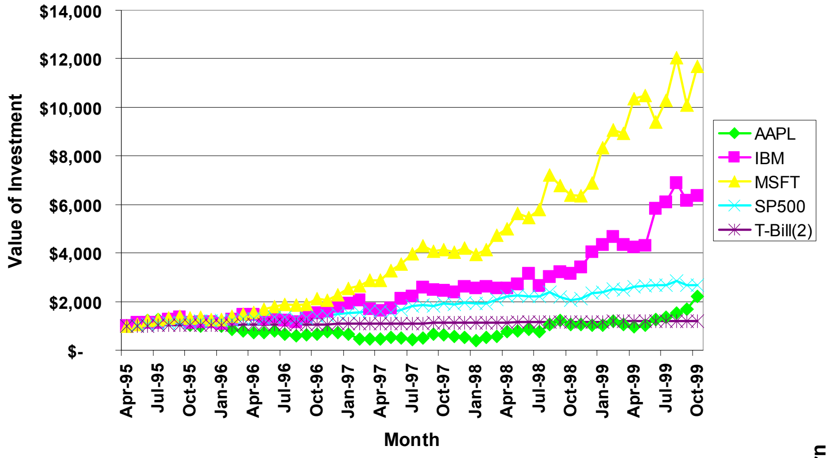
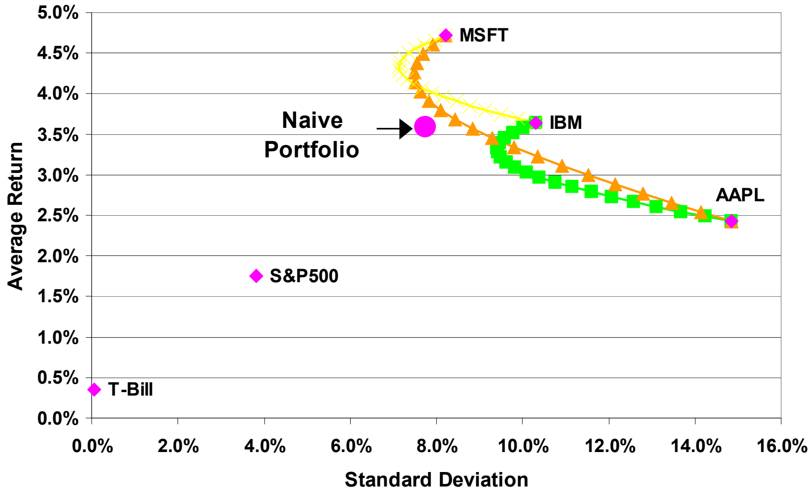
Teorie portfolia





Stručná historie teorie portfolia

- J. Hickse: Application of Mathematical Methods to the Theory of Risk (1934) – investoři si všímají statistického rozdělení pravděpodobnosti dosažení výnosu
- Harry Markowitz: Portfolio Selection, Journal of Finance, březen 1952 – je považován za zakladatele moderní teorie portfolia

Harry Markowitz

- jako první se zabývá vztahem mezi výnosností a rizikem
- konstruuje efektivní hranici portfolií, která znázorňuje body s maximálním výnosem pro danou úroveň rizika
- tím pokládá základy pro teorii portfolia

Link to his Nobel Prize lecture if you are interested:
http://nobelprize.org/economics/laureates/1990/markowitz-lecture.pdf

Harry Markowitz

- Markowitz předpokládá, že investor má na počátku období k dispozici *určité množství kapitálu*, který bude investovat na *předem určené časové období*, na jehož konci pak investor nakoupené a držené cenné papíry prodá a zisk buď použije pro vlastní potřebu nebo jej opět reinvestuje
- na *investování* se Markowitz dívá jako na *periodickou aktivitu*, při které si investor vybírá mezi investicemi s různými očekávanými výnosy a s různou mírou jistoty, že očekávaného výnosu bude dosaženo
- podle Markowitze sleduje investor dva protichůdné cíle a to *maximalizaci výnosu* na jedné straně a *minimalizaci rizika* na straně druhé

Další vývoj (1)

- model CAPM (model oceňování kapitálových aktiv) – základy položeny článkem W. F. Sharpe: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk (1964) – dochází k rozšíření portfolia rizikových aktiv o bezrizikovou investici
- v návaznosti na možnost bezrizikového investování byla vytvořena přímka CML
- objevuje se také přímka SML

Další vývoj (2)

- důležitou etapou vývoje teorie portfolia je APT (arbitrážní teorie oceňování)
- není založena na myšlence, že všichni investoři pohlížejí na portfolio ve smyslu očekávaného výnosu a rizika dosažení tohoto výnosu
- je postaven na myšlence, že investoři dávají přednost vyšší úrovni bohatství před nižší

Základní pojmy

- portfolio – soubor různých investic (peněžní hotovost, cenné papíry včetně derivátů, nemovitosti atd.), které investor vytváří se záměrem minimalizovat riziko spojené s investováním a současně maximalizovat výnos z těchto investic
- teorie portfolia – jedná se o mikro-ekonomickou disciplínu, která zkoumá, jaké kombinace aktiv je vhodné držet, aby takto vytvořené portfolio mělo předem určené vlastnosti.

Aktiva v teorii portfolia

- portfolio je obvykle definováno jako skupina aktiv
- hmotná, nehmotná a finanční – dále budeme uvažovat pouze aktiva finanční, a to cenné papíry
- výnos(nost), riziko a likvidita – magický trojúhelník investování

Finanční aktiva

- finanční aktiva dělíme na
  - hotovost a depozita
  - cenné papíry – majetkové, dluhové, nárokové
- existují i jiné pohledy na členění aktiv
- dále nás budou zajímat především akcie

Výnosnost aktiv

- jedním z hlavních ukazatelů

$$r = \frac{P_t - P_{t-k} + D}{P_{t-k}}$$

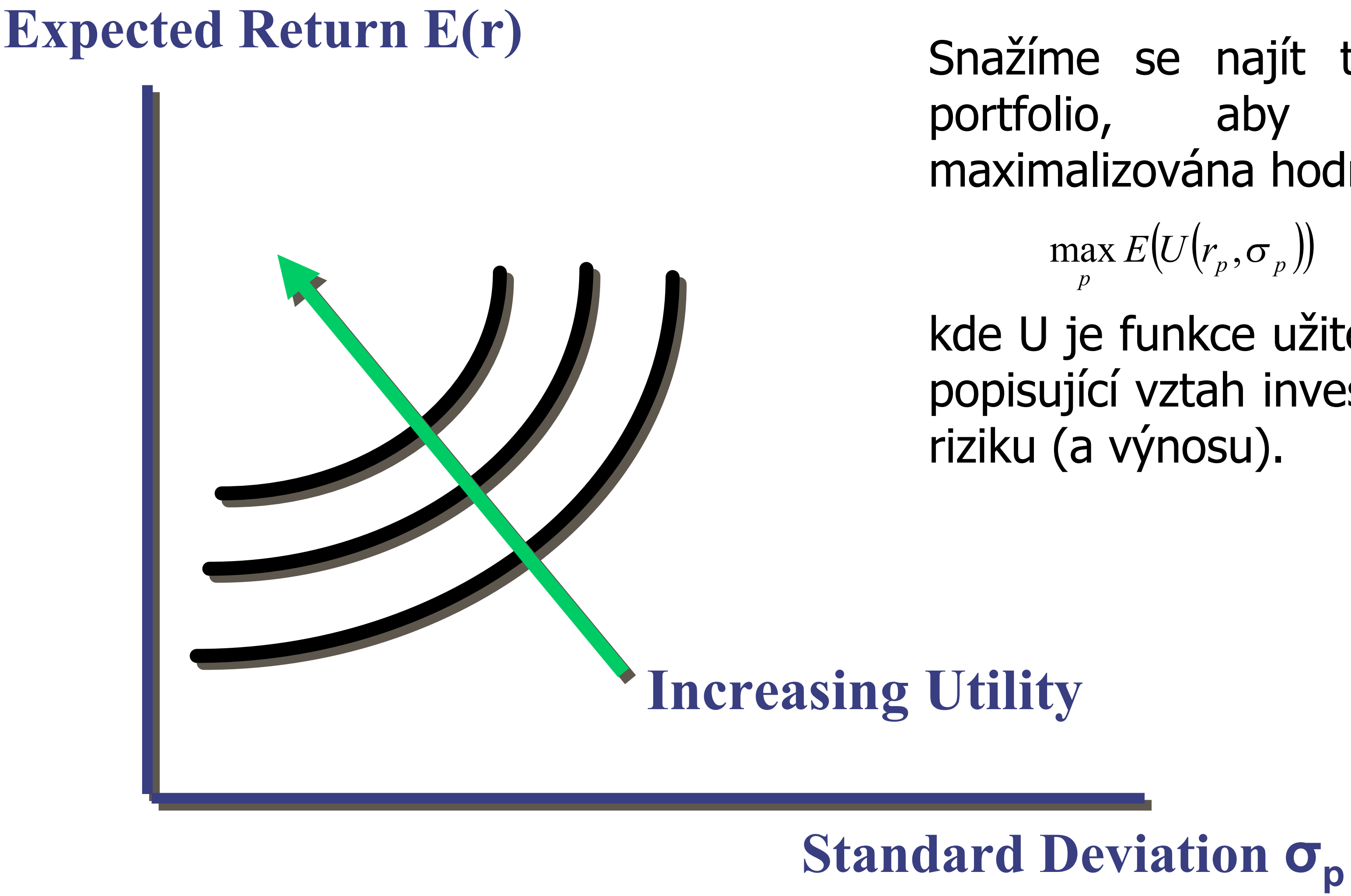
- kde P_{t-k} je cena akcie v čase *t-k* (počátek sledovaného období), P_t je cena akcie v čase *t* (konec období).
- *D* jsou inkasované dividendy.
- pro *k* = 1 se jedná o jednodenní výnosnost

Očekávaný výnos a riziko

- Výnos akcie je náhodná veličina
- Očekávaný výnos portfolia: $$r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{I} x_i r_i = \mathbf{r}'\mathbf{x}$$
- Riziko portfolia: $$\sigma^2(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}.$$

r_i…očekávaný výnos i-té akcie (střední hodnota)
x_i…váhy investic do akcií v rámci portfolia
I…počet akcií v portfoliu
V_{ij}…varianční matice výnosů akcií

Indiferenční křivky, funkce užitečnosti

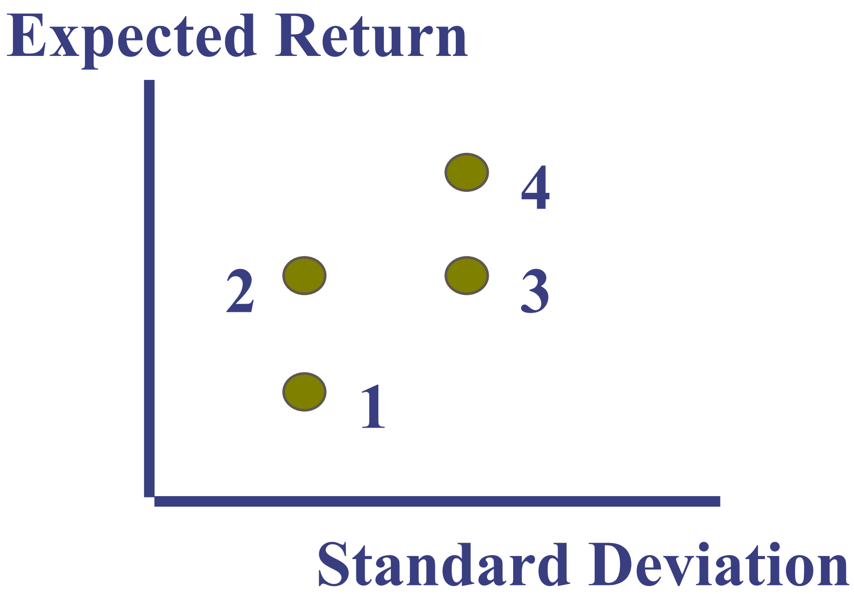


Snažíme se najít takové portfolio, aby byla maximalizována hodnota

$$\max_p E\left(U\left(r_p, \sigma_p\right)\right)$$

kde U je funkce užitečnosti popisující vztah investora k riziku (a výnosu).

Dominance



- 2 dominates 1; has a higher return
- 2 dominates 3; has a lower risk
- 4 dominates 3; has a higher return

Illustration: 2 risky assets

- Assume you have 2 risky assets (x & y) to choose from, both are normally distributed.

  $r_x \sim N(E(r_x), \sigma^2_x)$ & $r_y \sim N(E(r_y), \sigma^2_y)$
- You put *a* of your money in *x*, *b* in *y.*
- $a + b = 1$
- Portfolio Expected Return:

$$E(r_p) = E[ar_x + br_y] = aE(r_x) + bE(r_y)$$

Illustration: 2 risky assets

- $r_x \sim N(E(r_x), \sigma^2_x)$ & $r_y \sim N(E(r_y), \sigma^2_y)$
- Portfolio Variance:

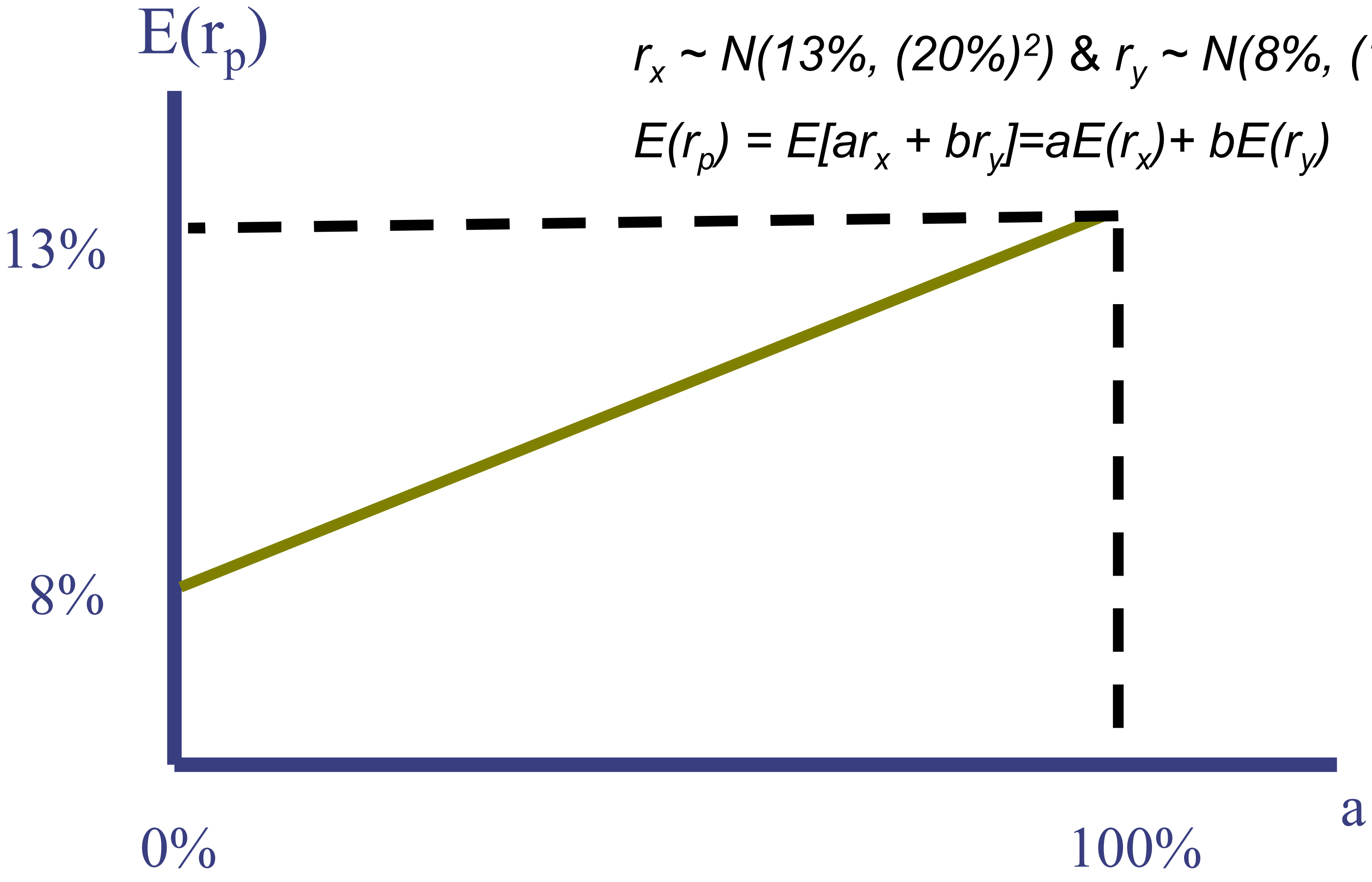
$$\sigma^2_p = E[r_p - E(r_p)]^2$$
$$= E[(ar_x + br_y)-E[ar_x + br_y]]^2$$
$$= E[(ar_x - aE[r_x])+(br_y - bE[br_y])]^2$$
$$= E[a^2(r_x - E[r_x])^2 + b^2(r_y - E[r_y])^2 + 2ab(r_x - E[r_x])(r_y - E[r_y])]$$
$$= a^2 \sigma^2_x + b^2 \sigma^2_y + 2abCov(r_x, r_y)$$
$$= a^2 \sigma^2_x + b^2 \sigma^2_y + 2abCov(r_x, r_y)$$
$$\sigma^2_p = a^2 \sigma^2_x + b^2 \sigma^2_y + 2ab\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}$$
$$\sigma_p = \sqrt{}(a^2 \sigma^2_x + b^2 \sigma^2_y + 2ab\sigma_x\sigma_y\rho_{xy})$$

Varying the portion on X & Y

Suppose:

$r_x \sim N(13\%, (20\%)^2)$ & $r_y \sim N(8\%, (12\%)^2)$

$E(r_p) = E[ar_x + br_y] = aE(r_x) + bE(r_y)$

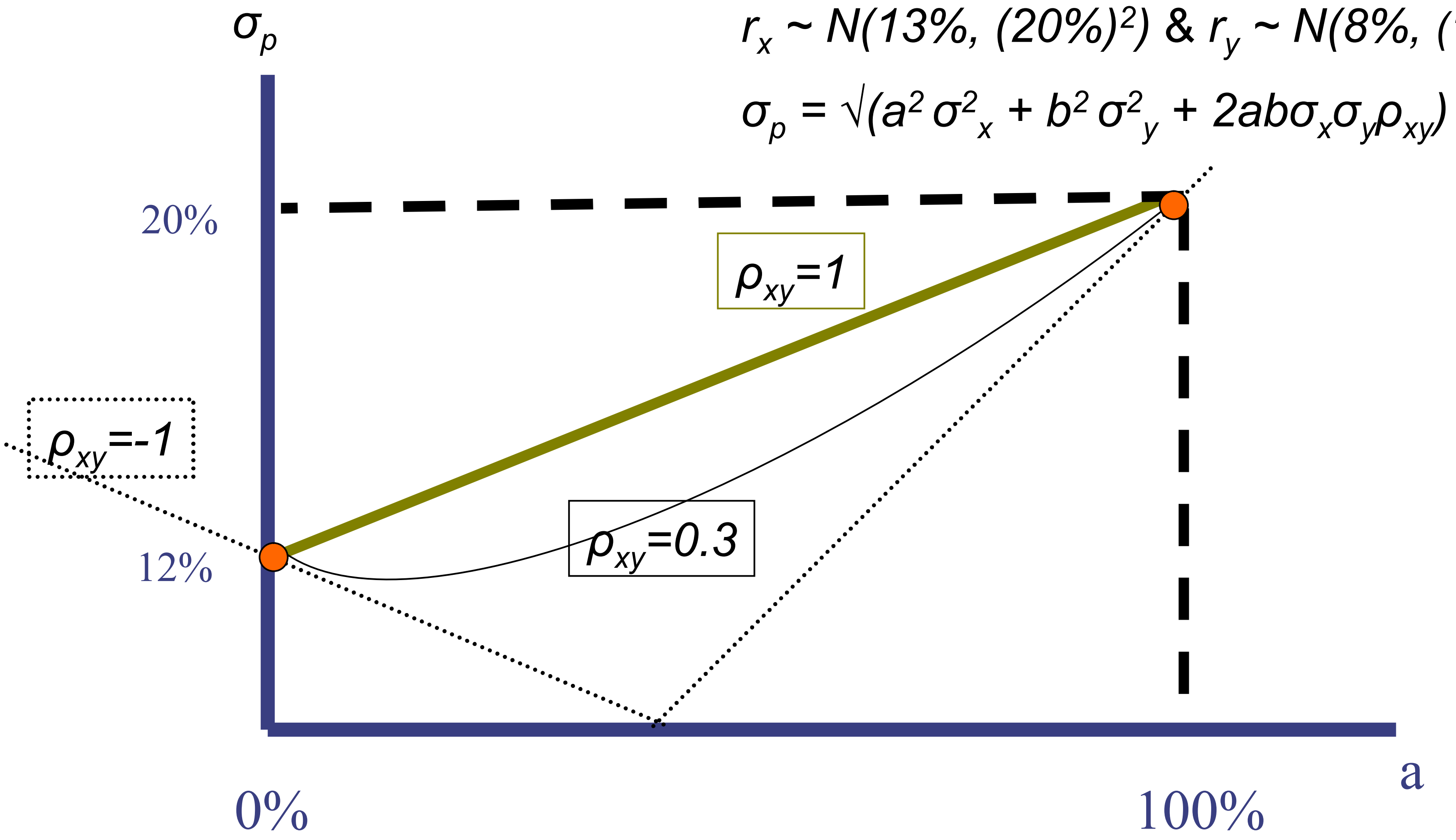


Varying the portion on X & Y

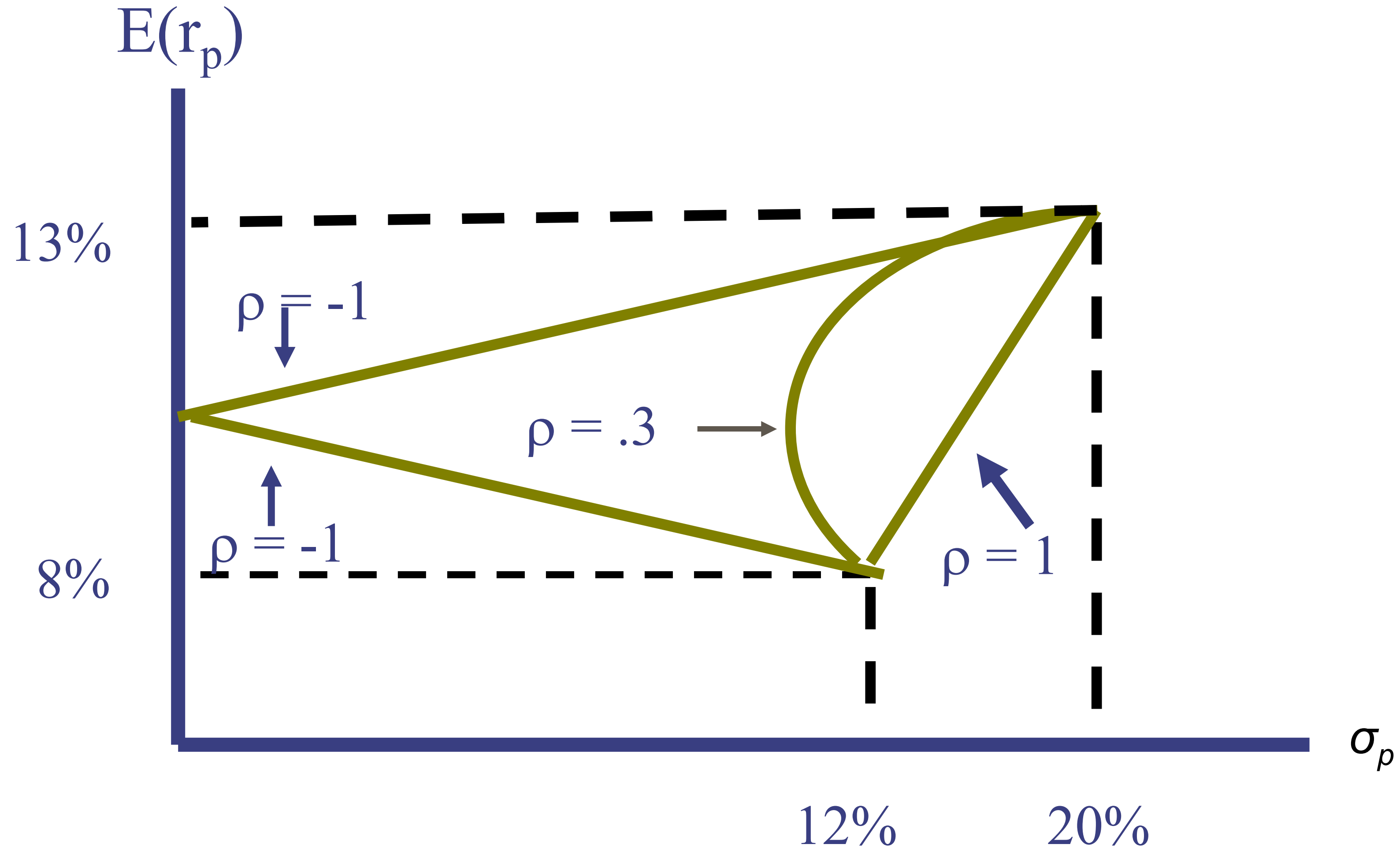
Suppose:

$r_x \sim N(13\%, (20\%)^2)$ & $r_y \sim N(8\%, (12\%)^2)$

$\sigma_p = \sqrt{(a^2 \sigma^2_x + b^2 \sigma^2_y + 2ab\sigma_x\sigma_y\rho_{xy})}$



Min-Variance opportunity set with the 2 risky assets



Min-Variance opportunity set with the 2 risky assets -details

X_A …váha investice do akcie A
X_B …váha investice do akcie B
R_P…očekávaný výnos portfolia
R_A…očekávaný výnos investice do akcie A
R_B…očekávaný výnos investice do akcie B
σ_P …rozptyl výnosu portfolia
σ_A …rozptyl výnosu investice do akcie A
σ_B …rozptyl výnosu investice do akcie B
ρ_{AB}…korelační koeficient výnosů investic do akcií A, B

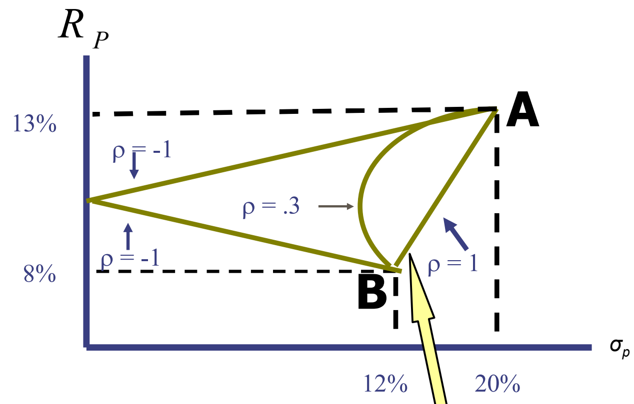
$$R_P = X_A R_A + (1 - X_A) R_B$$

$$\sigma_P = \left[X_A^2 \sigma_A^2 + (1 - X_A)^2 \sigma_B^2 + 2 X_A (1 - X_A) \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B \right]^{1/2}$$

Min-Variance opportunity set with the 2 risky assets - details

- perfektní pozitivní korelace

$$\rho_{AB} = 1$$



$$\sigma_P = X_A \sigma_A + (1 - X_A)\sigma_B$$

$$X_A = \frac{\sigma_P - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}$$

$$R_P = \left(\frac{R_A - R_B}{\sigma_A - \sigma_B}\right)\sigma_P + \left(R_B - \frac{R_A - R_B}{\sigma_A - \sigma_B}\sigma_B\right)$$

Tedy vychází rovnice přímky.

Min-Variance opportunity set with the 2 risky assets - details

- perfektní negativní korelace

$$\rho_{AB} = -1$$

$$\sigma_P = X_A\sigma_A - (1 - X_A)\sigma_B$$

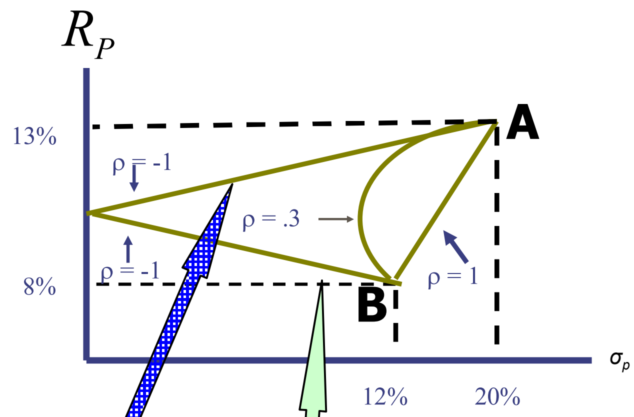
nebo $\sigma_P = -X_A\sigma_A + (1 - X_A)\sigma_B$

$$X_A = \frac{\sigma_P + \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

$$X_A = \frac{\sigma_B - \sigma_P}{\sigma_A + \sigma_B}$$

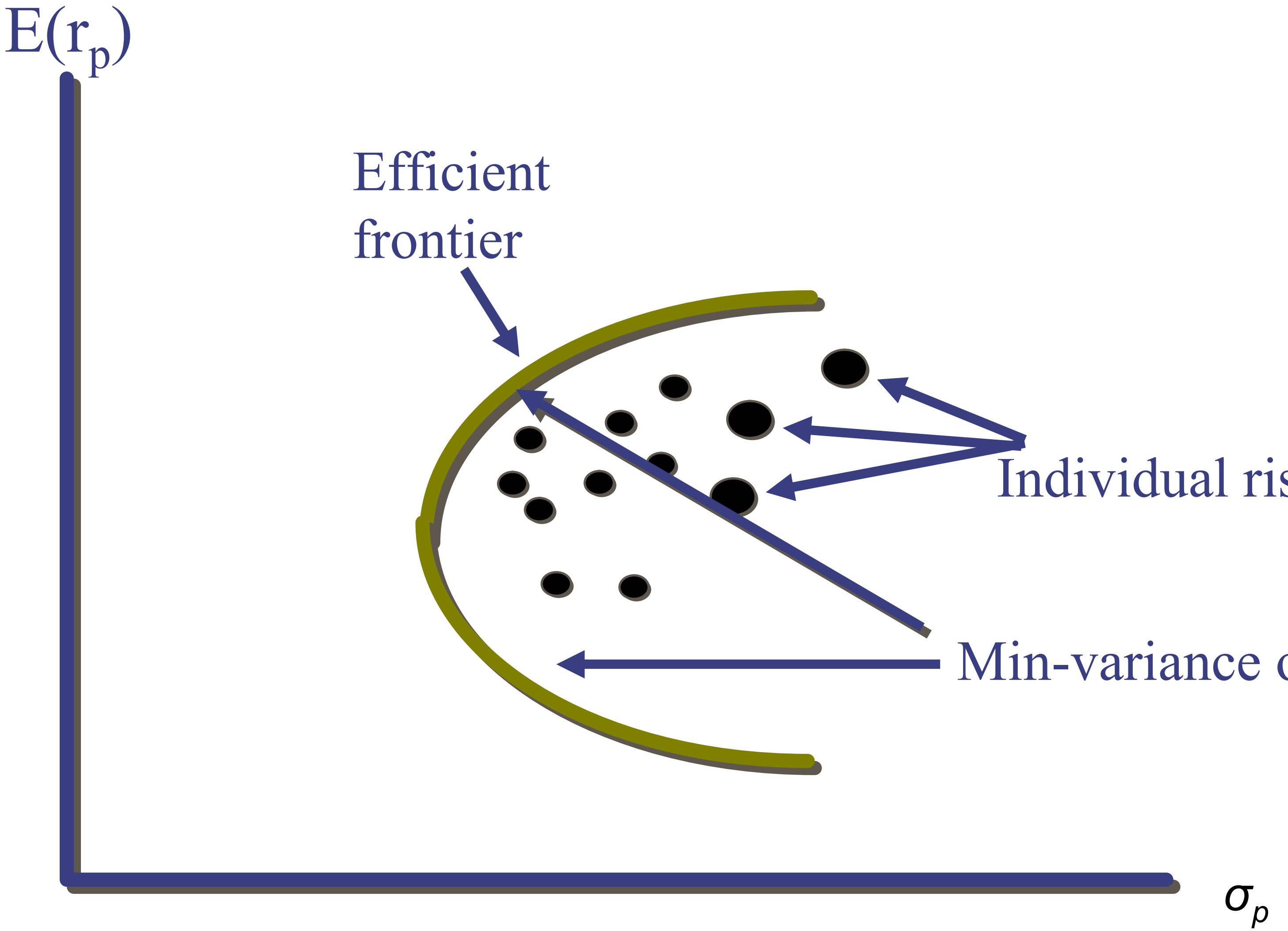
$$R_P = \left(\frac{R_A - R_B}{\sigma_A + \sigma_B}\right)\sigma_P + \left(R_B + \frac{R_A - R_B}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_B\right)$$

$$R_P = -\left(\frac{R_A - R_B}{\sigma_A + \sigma_B}\right)\sigma_P + \left(R_B + \frac{R_A - R_B}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_B\right)$$



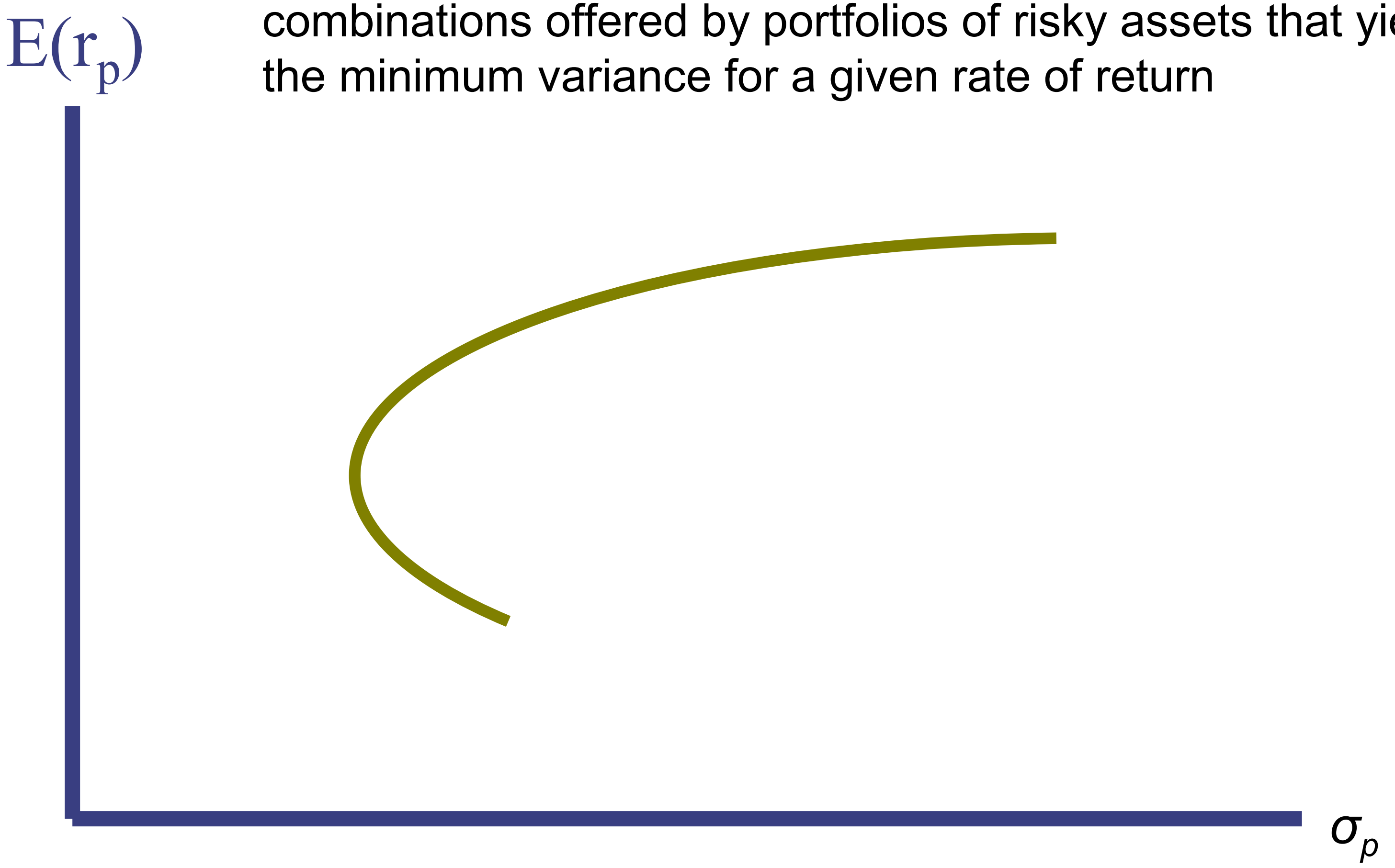
Tedy tentokrát vychází rovnice přímek.

Min-Variance opportunity set with the *Many* risky assets



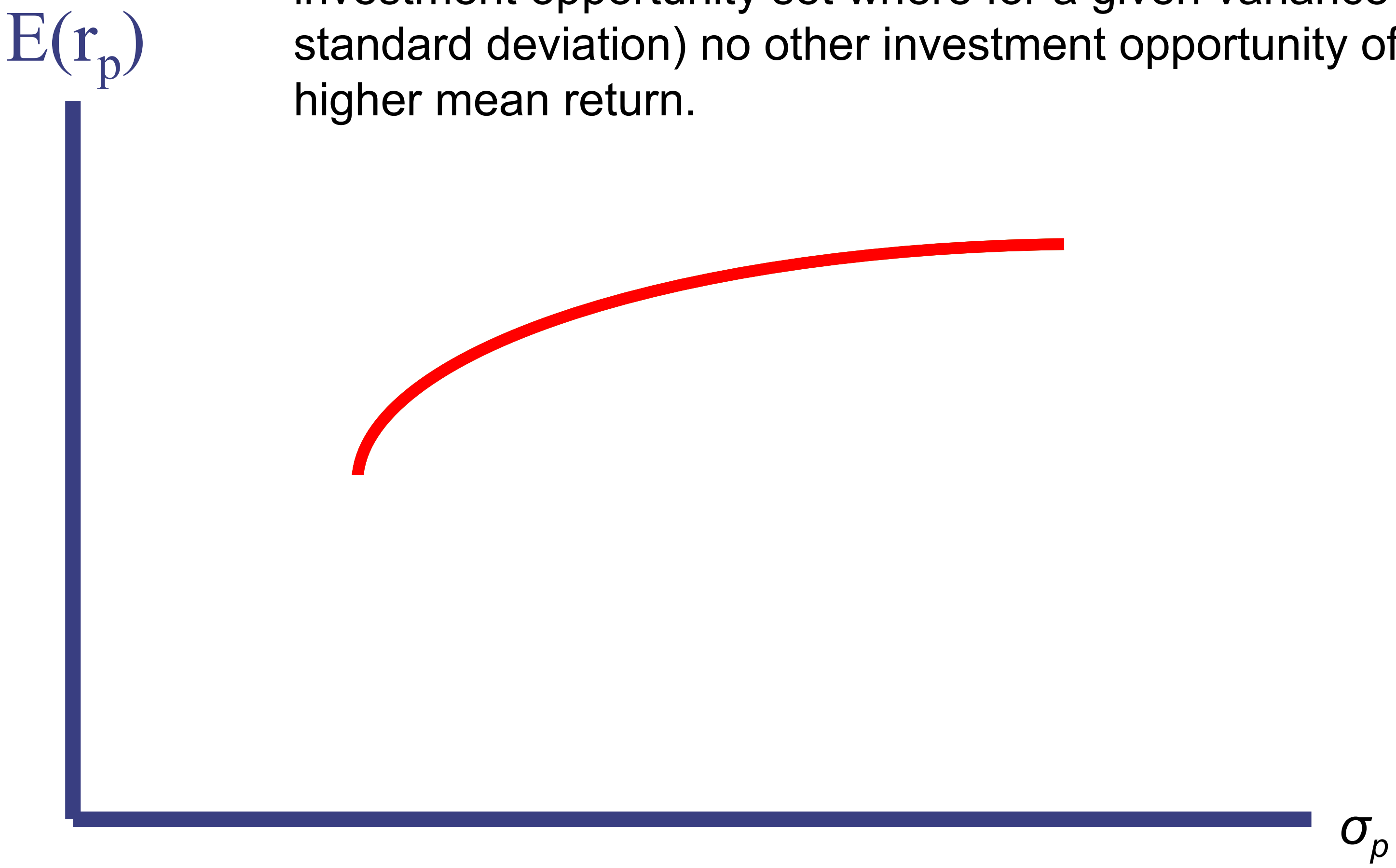
Min-Variance opportunity set

Min-Variance Opportunity set – the locus of risk & return combinations offered by portfolios of risky assets that yields the minimum variance for a given rate of return

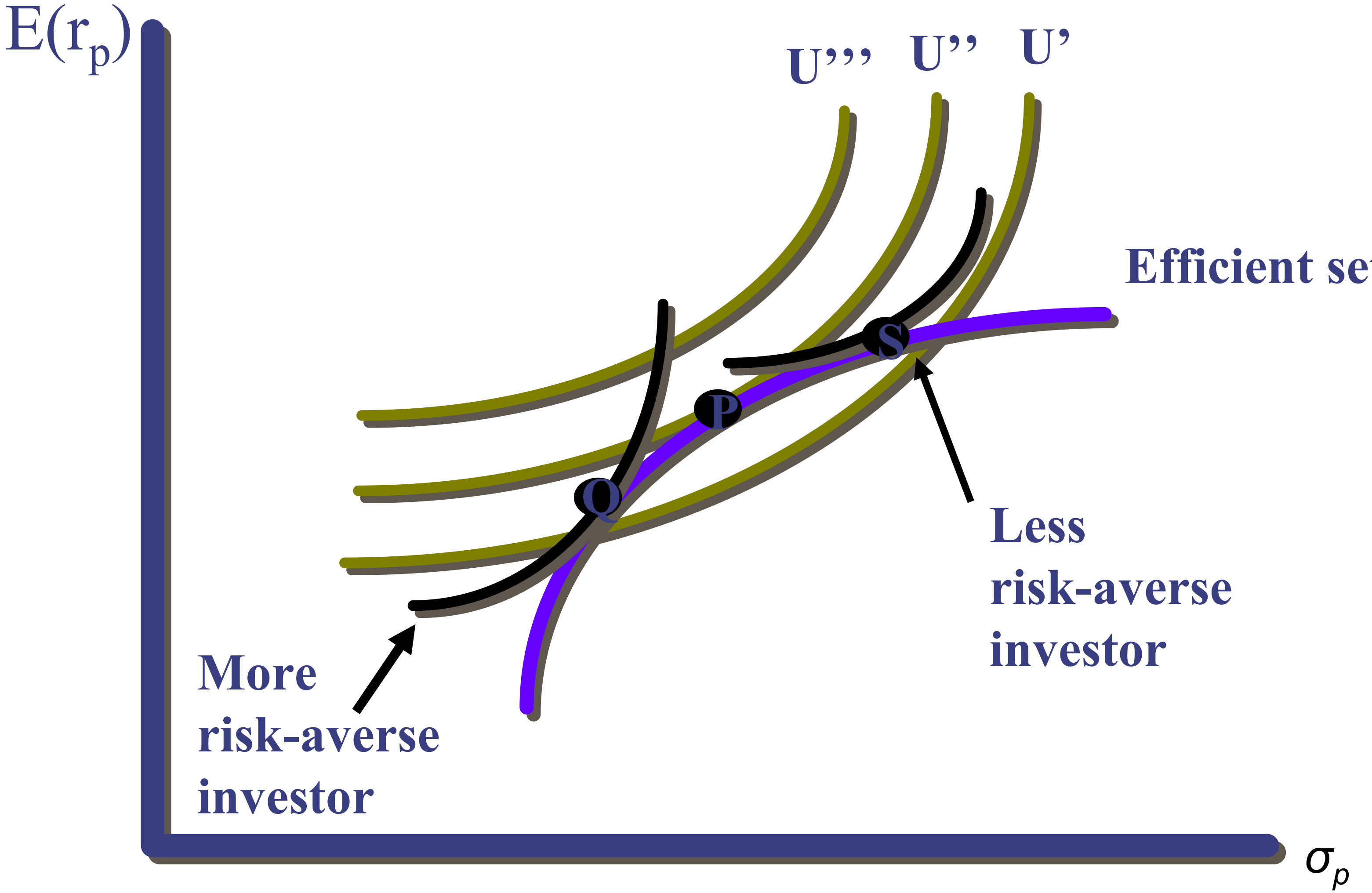


Efficient set

Efficient set – the set of mean-variance choices from the investment opportunity set where for a given variance (or standard deviation) no other investment opportunity offers a higher mean return.



Individual's decision making with 2 risky assets, no risk-free asset

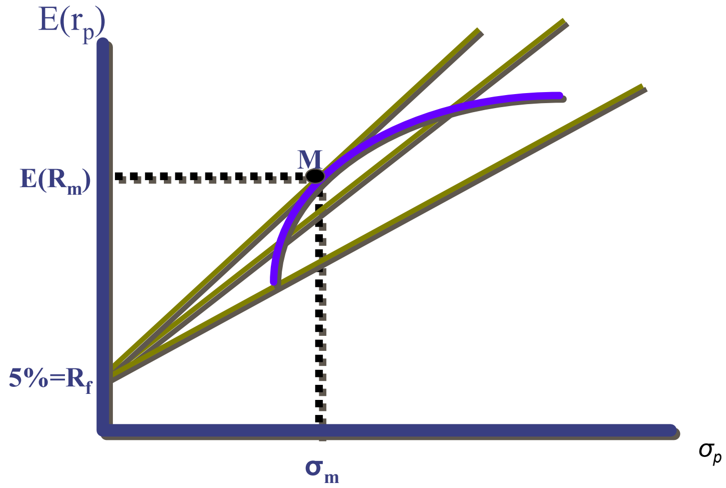


Introducing risk-free assets

- Assume borrowing rate = lending rate
- Then the investment opp. set will involve any straight line from the point of risk-free assets to any risky portfolio on the min-variance opp. set
- However, only one line will be chosen because it dominates all the other possible lines.
- The dominating line = linear efficient set
- Which is the line through risk-free asset point tangent to the min-variance opp. set.
- The tangency point = portfolio M (the market)

Efektivní hranice portfolia s bezrizikovou investicí

R_A…očekávaný výnos portfolia A
R_F…očekávaný výnos bezrizikové investice B
σ_A …rozptyl výnosu portfolia A
$\sigma_F = 0$ …rozptyl výnosu investice B



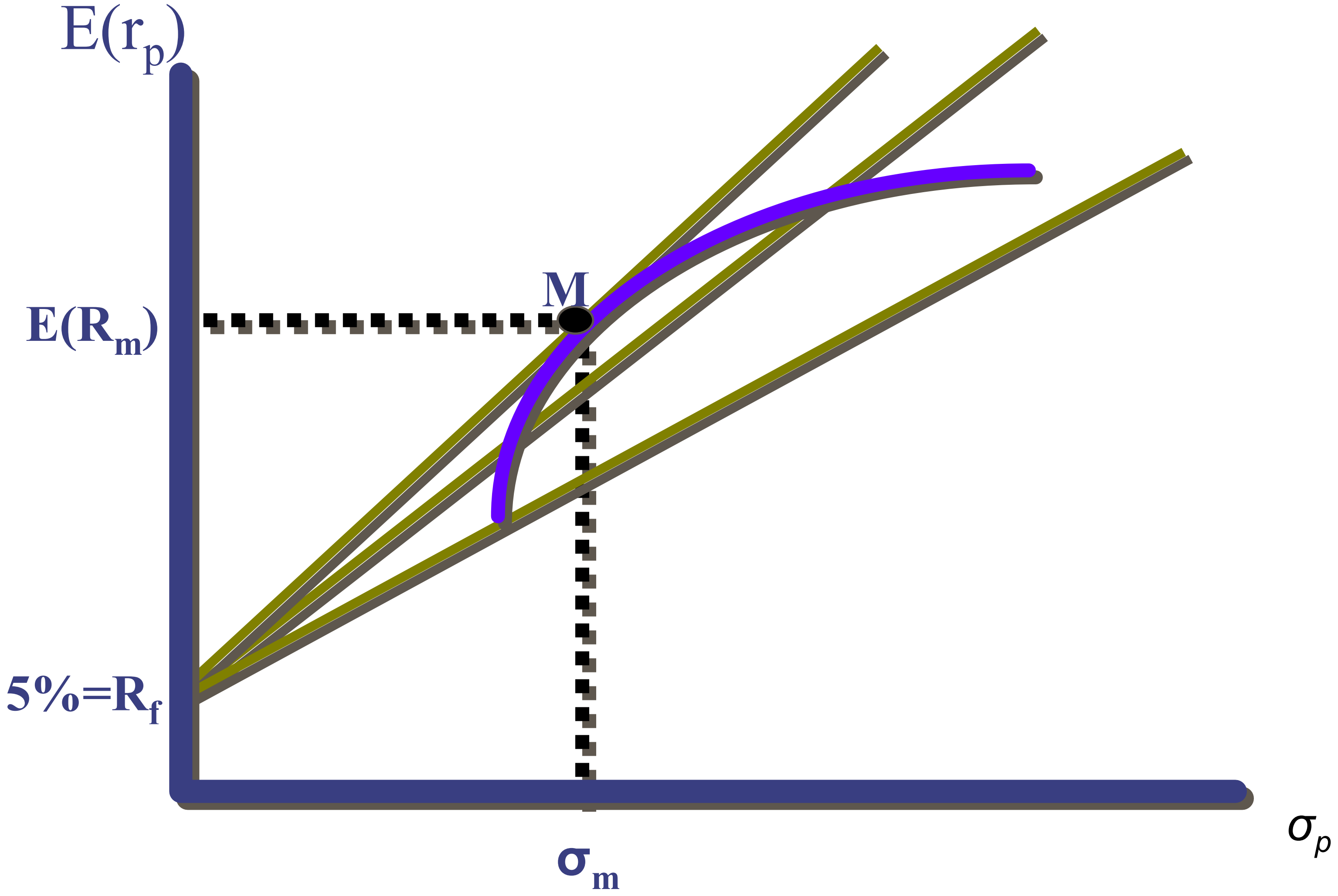
$$R_P = (1-X)R_F + XR_A$$

$$\sigma_P = \left[(1-X)^2\sigma_F^2 + X^2\sigma_A^2 + 2X(1-X)\sigma_A\sigma_F\rho_{FA}\right]^{1/2}$$

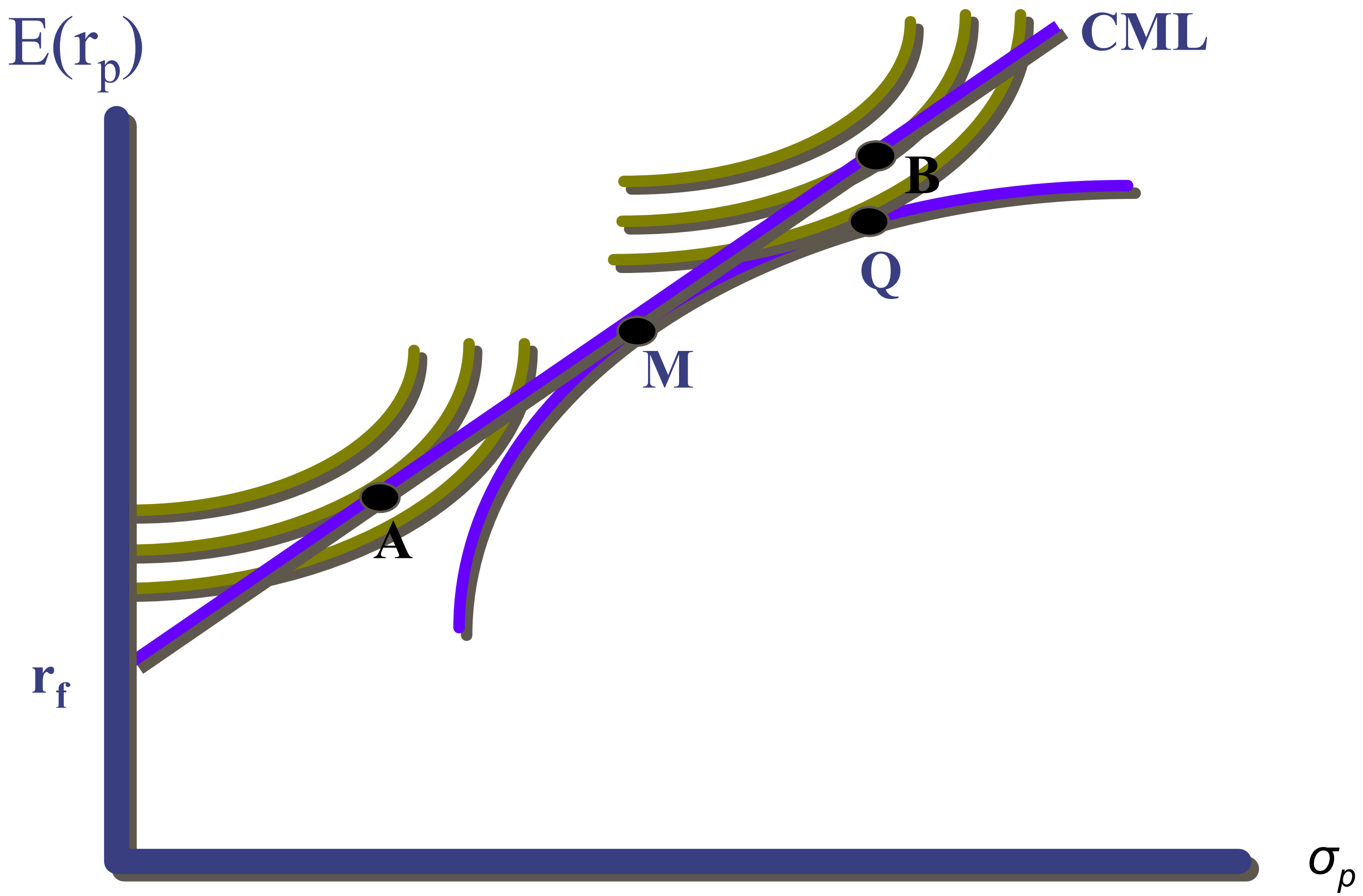
$$\sigma_P = X\sigma_A \qquad X = \frac{\sigma_P}{\sigma_A}$$

$$\boxed{R_P = R_F + \left(\frac{R_A - R_F}{\sigma_A}\right)\sigma_P}$$

Capital market line = the linear efficient set



Individual's decision making with 2 risky assets, with risk-free asset



Stanovení optimálního portfolia- Markowitzův model

Markowitzův model je jedním z přístupů, jak hledat optimalní portfolio. Tento model předpokladá, že je investor racionalní, tedy jeho cílem je maximalizovat zisk a minimalizovat riziko. Ziskem se v Markowitzově modelu rozumí střední hodnota náhodného výnosu a rizikem pak jeho směrodatná odchylka. Tento model má řadu zjednodušujících předpokladů:

- předpokládá ideální trh bez transakčních nákladů a bez arbitráže, neomezenou možnost investování a půjčovaní, neomezenou dělitelnost aktiv, předpokládá, že investoři preferují vyšší výnosy a nižší riziko a využívají k tomu shodné informace - hodnoty očekávaných výnosností akcií a rozptylů a kovariancí těchto výnosností.

Označení

I	počet akcií, z nichž skládáme portfolio,
x_i	váha i-té akcie v portfoliu, $i = 1, \dots, I$
x_0	váha bezrizikového aktiva v portfoliu,
ρ_i	náhodný výnos i-té akcie ve zvoleném období, $i = 1, \dots, I$
r_i	očekávaný výnos i-té akcie ve zvoleném období, $i = 1, \dots, I$
r_p	minimální požadovaný výnos portfolia ve zvoleném období,
r_0	výnos bezrizikového aktiva ve zvoleném období.

Vektor vah označíme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_I)'$, vektor náhodných výnosů $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_I)'$. Rozdělení náhodného vektoru ρ je charakterizováno známým vektorem středních hodnot $E(\rho) = \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_I)'$ a varianční maticí $\mathrm{var}(\rho) = \mathbf{V} = [\mathrm{cov}(\rho_i, \rho_j)]_{i,j=1}^{I}$.

Výnos portfolia s vahami $\mathbf{x}$ budeme chápat jako střední hodnotu celkové výnosnosti

$$r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{I} x_i r_i = \mathbf{r}'\mathbf{x}$$

a **riziko** tohoto portfolia chápeme ve smyslu Markowitzova modelu jakožto směrodatnou odchylku celkové výnosnosti - odmocninu z rozptylu

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}.$$

Optimalizační úloha

Při hledání optimálního portfolia ve smyslu Markowitzova modelu pak musíme řešit optimalizační úlohu vícekriteriálního programování

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{r}'\mathbf{x} \\ &\min\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad \mathbf{x} \in \chi, \end{aligned} \tag{1}$$

kde množina χ je určena požadavkem $\mathbf{1}'\mathbf{x} = 1$ a případně dalšími podmínkami na složení portfolia.

Jinou možností je řešit zjednodušenou úlohu nelineárního programování ve tvaru

$$\max_{\mathbf{x} \in \chi}\ \lambda \mathbf{r}'\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}, \tag{2}$$

kde $\lambda \geq 0$ je parametr modelující investorův vztah k riziku.

Úloha, kterou použijeme při hledání optimálního portfolia my, je následujícího tvaru

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad \mathbf{x} \in \chi, \\ &\quad \mathbf{r}'\mathbf{x} \geq r_p, \end{aligned} \tag{3}$$

kde r_p je zvolená hodnota minimálního požadovaného výnosu.

Markowitzův model -varianty

a) Na trhu nejsou povoleny krátké prodeje. Sestavte efektivní hranici portfolií. Vyberte některá portfolia na efektivní hranici a uveďte jejich složení (váhy) a očekávané výnosnosti titulů zastoupených v portfoliu.

b) Jak se změní efektivní hranice, pokud budete mít možnost investovat do bezrizikového aktiva (např. depozita v bance).

c) Jak se změní efektivní hranice, pokud budete mít možnost výpůjček od správce portfolia až do 30 % hodnoty portfolia.

d) Co když budete mít povoleny krátké prodeje až do 30 % počátečního vkladu? Nakreslete efektivní hranici v tomto případě.

e) V souladu s vnitřní politikou investiční společnosti, kterou zastupujete, nesmí žádný z titulů portfolia přesáhnout 15% váhu v celkovém portfoliu. Nakreslete efektivní hranici při tomto omezení.

Stanovení efektivní hranice

Naším úkolem je pro jednotlivé úlohy najít efektivní hranice, tj. množinu portfolií, které jsou **eficientní**. Řekneme, že portfolio je eficientní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu, jestliže neexistuje jiné portfolio, jehož výnos by byl větší nebo roven výnosu uvažovaného portfolia a jehož riziko by bylo menší nebo rovno riziku uvažovaného portfolia, s alespoň jednou nerovností ostrou. Efektivní hranice odpovídá optimálním řešením úlohy(3) pro různé nastavené hodnoty $r_p \geq r_{min}$, kde r_{min} je výnos portfolia $\mathbf{x}_G$, které je optimálním řešením úlohy (4) bez podmínek na očekávanou výnosnost

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad \mathbf{x} \in \chi. \end{aligned} \tag{4}$$

Formulace úlohy a)

Nejsou povoleny krátké prodeje, to znamená, že váhy jednotlivých akcií v portfoliu musí být nezáporné.

$$
\begin{aligned}
&\min \textstyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\
&\text{za podmínek} \\
&\quad \textstyle\sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, I, \\
&\quad \textstyle\sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Formulace úlohy b)

Nejsou povoleny krátké prodeje a máme možnost investovat do bezrizikového aktiva. Zavedeme novou proměnnou x_0, která bude vyjadřovat, jakou část investujeme do bezrizikového aktiva. Bezrizikový výnos značíme r_0.

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\
&\text{za podmínek} \\
&\quad x_0 + \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, I, \\
&\quad x_0 r_0 + \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Formulace úlohy c)

Nejsou povoleny krátké prodeje, máme možnost investovat do bezrizikového aktiva a máme možnost výpůjček od správce portfolia až do 30 % hodnoty portfolia. Zavedeme novou proměnnou x_v, která bude vyjadřovat velikost půjčky. Proměnná x_v může nabývat hodnot v intervalu $[0, 0.3]$, přičemž $x_v = 0$ pokud si nic nepůjčujeme a $x_v = 0.3$, pokud možnosti půjčky využijeme naplno a půjčíme si celých 30 % hodnoty portfolia. Výpůjční sazbu značíme r_v. Výnos portfolia je pak roven $x_0 r_0 + \sum x_i r_i - x_v r_v$.

$$
\begin{aligned}
&\min \ \textstyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\
&\text{za podmínek} \\
&\quad x_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{I} x_i = 1 + x_v, \\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, I, \\
&\quad x_v \geq 0, \\
&\quad x_v \leq 0.3, \\
&\quad x_0 r_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{I} r_i x_i - x_v r_v \geq r_p.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Formulace úlohy d)

Máme povoleny krátké prodeje, a to až do 30 % počátečního vkladu. To znamená, že váhy x_i mohou být i záporné, ale součet záporných částí vah $\sum_{i=1}^{I} x_i^-$ $(x^- = -\min(0, x))$ nesmí přesáhnout hodnotu 0.3.

$$
\begin{aligned}
&\min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\
&\text{za podmínek} \\
&\quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
&\quad \sum_{i=1}^{I} x_i^- \leq 0.3, \\
&\quad \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Formulace úlohy e)

Žádný z titulů nesmí přesáhnout 15% váhu v portfoliu. Toto omezení se jednoduše vyjádří tak, že $x_i \leq 0.15$ pro každé i.

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ \text{za podmínek} \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, I, \\ \quad x_i \leq 0.15, \quad i = 1, \ldots, I, \\ \quad \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p. \end{array} \tag{9}$$

Řešení zmíněných modelů

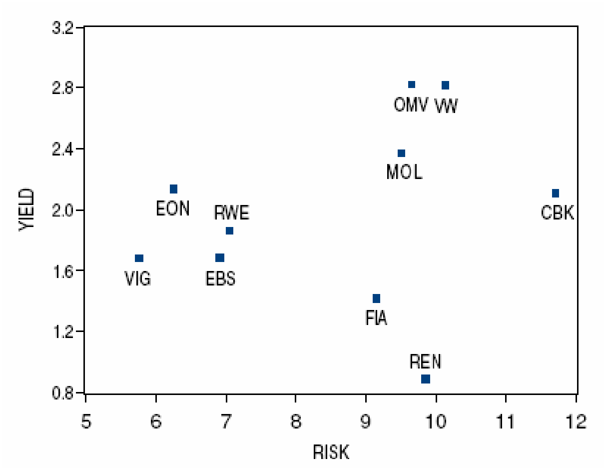
Jde o modely kvadratického programování, které lze řešit např. v programech R, GAMS,…:

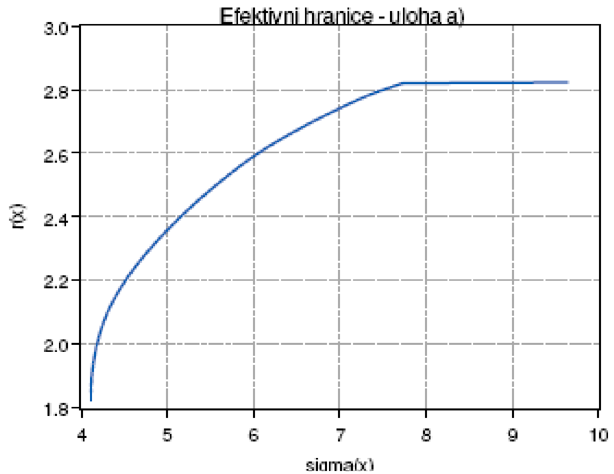
http://www.r-project.org/

- Knihovna fPortfolio:
  http://cran.r-project.org/web/packages/fPortfolio/index.html
- Knihovna Quadprog:
  http://cran.r-project.org/web/packages/quadprog/index.html

http://www.gams.com/

Možné výsledky





parametry	Portfolio
$r(\mathbf{x})$	1.9
$\sigma(\mathbf{x})$	4.1264

	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	0.00	0.20	0.35	0.22	0.04
Investované částky	0	5 000 000	8 750 000	5 500 000	1 000 000

	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.04	0.05	0.00	0.03	0.07
Investované částky	1 000 000	1 250 000	0	750 000	1 750 000