



SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz



III. JAK NA TO? POKRAČOVÁNÍ



NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

☑ **DISKRÉTNÍ SIGNÁL**

→ vzorkováním signálu $x_a(t)$ vzorkovací frekvencí

$$F > 2f_{\max};$$

→ výsledná posloupnost x_{nT} má N hodnot

$$(0 \leq n \leq N-1)$$

ODHADOVÝ EXKURZ

- ☑ odhad parametru je závislý na volbě úseku signálu;
- ☑ protože je výběr intervalu náhodný, je i odhad parametru náhodnou veličinou;
- ☑ základní (požadované) vlastnosti odhadů:
 - **nestrannost** – záruka, že v průměru se bude odhad pohybovat kolem správné hodnoty parametru

$E\hat{q} = q; \quad \lim_{K \rightarrow \infty} E\hat{q} = q \dots$ asymptoticky nestranný odhad

- **konzistence** – čím delší bude zkoumaný interval, tím více se bude odhad blížit neznámé hodnotě

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{K \rightarrow \infty} P(\|\hat{q} - q\| > \varepsilon) = 0$$

- **eficience** – eficientní odhad je takový nestranný odhad, který má minimální disperzi

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

→ odhad spektrální hustoty výkonu z konečné posloupnosti (nepřímá metoda)

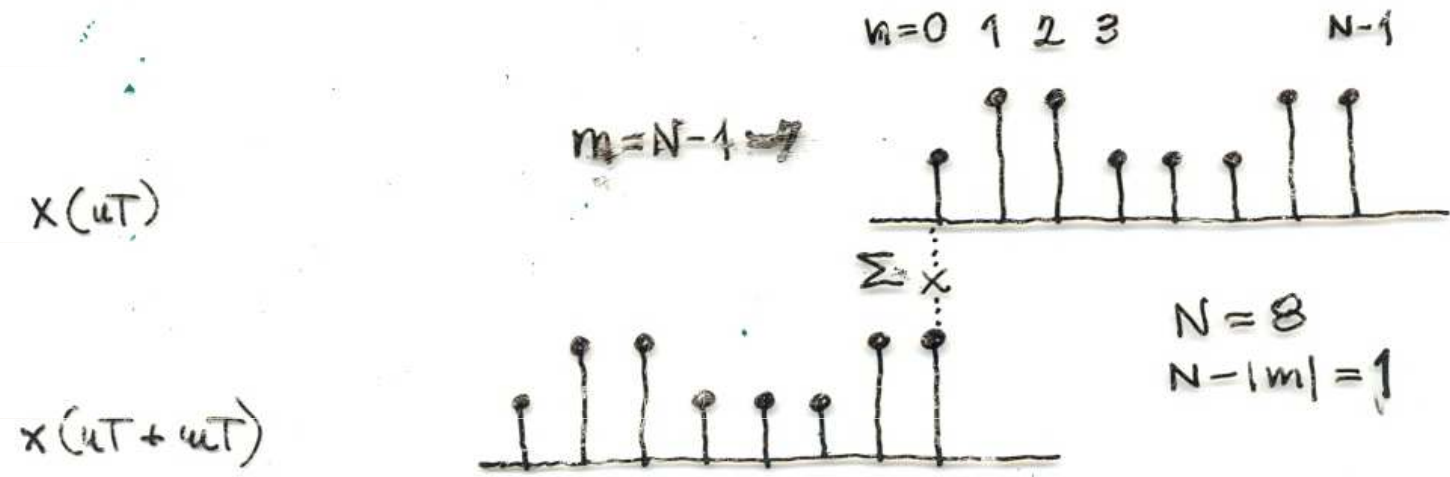
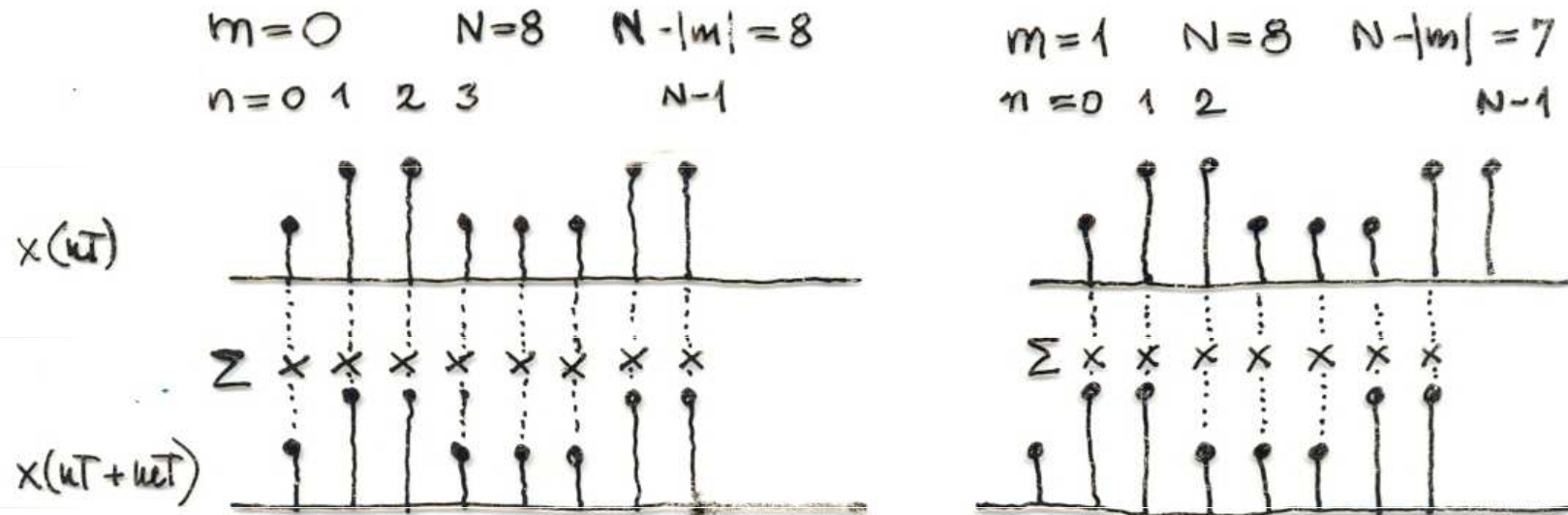
$$\tilde{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{r}_{xx}(mT) \cdot \exp(-2\pi jfmT)$$

→ odhady AK posloupnosti:

$$1) \quad \tilde{r}_{xx1}(mT) = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT) \cdot x(nT+mT), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

$$2) \quad \tilde{r}_{xx2}(mT) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT) \cdot x(nT+mT), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI



ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad 1) střední hodnota

$$E[\hat{r}_{xx1}(mT)] = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x(nT) \cdot x(nT+mT)] = \gamma_{xx}(mT)$$

takto je definována AKF stacionárního diskrétního náhodného procesu $\gamma_{xx}(mT)$

tzn. $\hat{r}_{xx1}(mT)$ je nestranný odhad

rozptyl [Jenkins, G.M., Watts, D.G.: Spectral Analysis & Its Applications, Holden-Day, 1968]

$$\text{var}[\hat{r}_{xx1}(mT)] \approx \frac{N}{[N-|m|]^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [|\gamma_{xx}(nT)|^2 + \gamma_{xx}(nT-mT)\gamma_{xx}(nT+mT)]$$

je-li $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(nT)|^2 < \infty$, je $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\hat{r}_{xx1}(mT)] = 0$

Protože $E[\hat{r}_{xx1}(mT)] = \gamma_{xx}(mT)$ a $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\hat{r}_{xx1}(mT)] = 0$ je odhad $\hat{r}_{xx1}(mT)$ konzistentní.

- pro velké hodnoty m má odhad $\hat{r}_{xx1}(mT)$ velký rozptyl!

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad 2)

střední hodnota

$$\begin{aligned} E[\hat{r}_{xx2}(mT)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-|m|-1} E[x(kt) x(kt+mT)] = \\ &= \frac{N-|m|}{N} \cdot \gamma_{xx}(mT) = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}(mT) \end{aligned}$$

$$E[\hat{r}_{xx2}(mT)] \neq \gamma_{xx}(mT)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{r}_{xx2}(mT)] = \gamma_{xx}(mT)$$

$\hat{r}_{xx2}(mT)$ je asymptoticky nestranný odhad.

rozptyl

$$\text{var}[\hat{r}_{xx2}(mT)] \approx \frac{1}{N} \sum_{u=-\infty}^{\infty} [|\gamma_{xx}(uT)|^2 + \gamma_{xx}(uT-mT)\gamma_{xx}(uT+mT)]$$

je to menší než pro $\hat{r}_{xx1}(mT)$

$$\text{je-li } \sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(uT)|^2 < \infty, \text{ je } \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\hat{r}_{xx2}(mT)] = 0$$

a tak $\hat{r}_{xx2}(mT)$ je také konzistentní.

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ✓ dosadíme-li do vztahu pro výpočet odhadu spektrální hustoty výkonu za \tilde{r}_{xx} podle 2), dostaneme (ještě to nikdo nedokázal)
- ✓ **periodogram** (Schuster 1898) (přímá metoda)

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{1}{NT} \left| T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot \exp(-2\pi jfnT) \right|^2$$

PERIODOGRAM

střední hodnota:

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_{xx}(f)] &= E\left[T \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx2}(mT) e^{-j2\pi f mT}\right] = T \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E[\hat{r}_{xx2}(mT)] e^{-j2\pi f mT} \\ &= T \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \cdot \gamma_{xx}(mT) \cdot e^{-j2\pi f mT} \end{aligned}$$

střední hodnota periodogramu je dána diskretní Fourierovou transformací skutečné autokorelační funkce váhovaně trojúhelníkovým Bartlettovým oknem

Bartlettovo okno

$$w_B(mT) = \begin{cases} \frac{N-|m|}{N} & |m| < N \\ 0 & |m| \geq N \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_{xx}(f)] &= T \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(mT) \cdot \gamma_{xx}(mT) \cdot e^{-j2\pi f mT} \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot w_B(f-\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

$\Gamma_{xx}(f)$... skutečná spektrální hustota výkonu

$w_B(f)$... spektrální charakteristika Bartlettova okna

PERIODOGRAM

střední hodnota periodogramu je vyhlazenou verzí skutečného spektra
(pozor na znehodnocení spektra postranními laloky $W_B(f)$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \sum_{u=-(N-1)}^{N-1} T \left(1 - \frac{|u|}{N}\right) y_{xx}(uT) \cdot e^{-j2\pi f u T} = T \sum_{u=-\infty}^{\infty} y_{xx}(uT) \cdot e^{-j2\pi f u T} = P_{xx}(f)$$

asymptoticky nestranný odhad.

rozptyl obecně nekonzverguje k nule při $N \rightarrow \infty$

nekoherentní odhad.

dosaďme-li do vztahu pro výpočet odhadu spektrální hustoty výkonu
za \hat{r}_{xx} podle 1) je střední hodnota

$$E[\hat{P}_{xx}(f)] = \dots = T \sum_{u=-(N-1)}^{N-1} y_{xx}(uT) \cdot e^{-j2\pi f u T}$$

střední hodnota $\hat{P}_{xx}(f)$ je dána diskretní FT skutečné autokorelační
funkce váhovaně obdélníkovým oknem

$$W_R(uT) = \begin{cases} 1 & |u| < N \\ 0 & |u| \geq N \end{cases}$$

IV. NEPARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

NEPARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

- ☑ nekladou žádné požadavky na znalosti vlastností signálu;
- ☑ všechny uvedené metody vycházejí z konečné posloupnosti vzorků signálu \Rightarrow frekvenční rozlišovací schopnost je při nejlepším určena spektrální šířkou obdélníkového okna
(všechny metody však snižují frekvenční rozlišení díky snaze o snížení rozptylu spektrálního odhadu)

BARTLETOVA METODA

- ✓ rozdělení posloupnosti N vzorků na K nepřekrývajících se segmentů, každý o délce M
 $x_i(nT) = x(nT+iMT)$, $i=0, 1, \dots, K-1$; $n=0,1,\dots,M-1$
- ✓ pro každý segment se spočítá periodogram

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MT} \left| T \sum_{n=0}^{M-1} x_i(nT) \cdot \exp(-2\pi jfnT) \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, K-1$$

- ✓ zprůměrněním periodogramů ze všech K segmentů dostaneme odhad výkonového spektra

$$\tilde{P}_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f)$$

STATISTICKÉ VLASTNOSTI BARTLETTOVA ODHADU

☑ střední hodnota

$$E[\hat{P}_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=0}^{K-1} E[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)] = E[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)]$$

pro jednotlivé periodogramy

$$E[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)] = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} T \left(1 - \frac{|m|}{M}\right) \gamma_{xx}(mT) \cdot e^{-j2\pi f m T} =$$
$$= \frac{1}{M} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot \left(\frac{\sin[\pi(f - \alpha) \cdot MT]}{\sin[\pi(f - \alpha) \cdot T]} \right)^2 d\alpha$$

omezení délky signálové posloupnosti z N vzorků na $M=N/K$ vzorků způsobí váhování oknem, jehož spektrální šířka vzroste K -krát; tím se též sníží K -krát frekvenční rozlišovací schopnost

STATISTICKÉ VLASTNOSTI BARTLETTOVA ODHADU

☑ rozptyl

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K^2} \cdot \sum_{i=0}^{K-1} \text{var}[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{K} \text{var}[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)]$$

rozptyl se sníží K-krát

WELCHOVA METODA

dvě modifikace Bartletovy metody

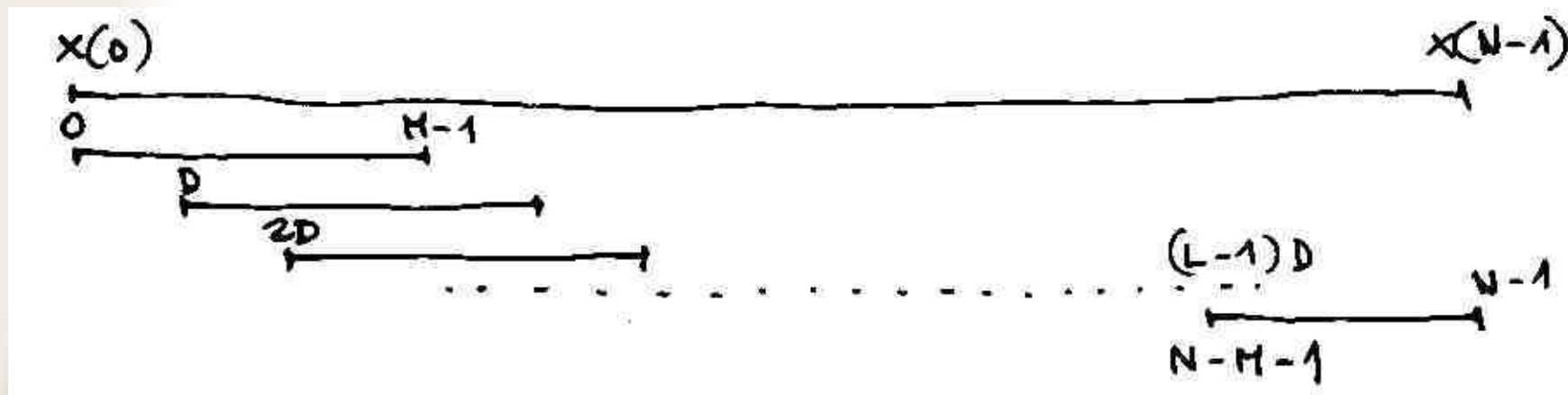
☑ překrývání segmentů

$$x_i(nT) = x(nT+iDT),$$

$i=0, 1, \dots, K-1$ (počet vzorků v segmentu);

$n=0, 1, \dots, M-1$ (počet segmentů)

pro $D=M$ se segmenty nepřekrývají (dělení odpovídá B.m.)



WELCHOVA METODA

- ☑ váhování vzorků v každém segmentu oknem před výpočtem periodogramů

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{1}{MTU} \left| T \sum_{n=0}^{M-1} x_i(nT) \cdot w(nT) \cdot \exp(-2\pi jfnT) \right|^2, \quad i = 0, \dots, L-1$$

kde U je výkonový normalizační faktor okna daný vztahem $U = \sum w^2(nT)/M$

Welchův odhad výkonového spektra

$$\tilde{P}_{xx}^W(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)$$

STATISTICKÉ VLASTNOSTI WELCHOVA ODHADU

střední hodnota

$$E[\hat{P}_{xx}^w] = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(l)}(f)] = E[\tilde{P}_{xx}^{(l)}(f)]$$

$$E[\tilde{P}_{xx}^{(l)}(f)] = \frac{1}{M \cdot U} \cdot T^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT) \cdot w(mT) E[x_i(nT) \cdot x_i(mT)] \cdot e^{-j2\pi f(n-m)T} =$$

$$= \frac{1}{M \cdot U} \cdot T^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT) w(mT) \gamma_{xx}(n-m) e^{-j2\pi f(n-m)T}$$

Protože $\gamma_{xx}(nT) = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) e^{j2\pi \alpha nT} d\alpha$, je

$$E[\tilde{P}_{xx}^{(l)}(f)] = \frac{1}{M \cdot U} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \left[T^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT) \cdot w(mT) e^{-j2\pi(n-m)(f-\alpha)T} \right] d\alpha =$$

$$= \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot W(f-\alpha) d\alpha$$

kde $W(f) = \frac{1}{M \cdot U} \cdot T \cdot \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(nT) \cdot e^{-j2\pi f nT} \right|^2$

normalizační faktor U zajišťuje jednotkovou plochu vymezenou průběhem funkce okna ve spektrální oblasti

$$\int_{-F/2}^{F/2} W(f) df = 1$$

STATISTICKÉ VLASTNOSTI WELCHOVA ODHADU

rozptyl

$$\text{var}[P_{xx}^w(f)] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \mathbb{E}[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \cdot \tilde{P}_{xx}^{(j)}(f)] - \{\mathbb{E}[P_{xx}^w(f)]\}^2$$

segmenty bez překrytí ($L = K$)

$$\begin{aligned} \text{var}[P_{xx}^w(f)] &= \frac{1}{L} \text{var}[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \\ &\approx \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f) \end{aligned}$$

segmenty s 50% překrytím a Bartlettovým (trojúhelníkovým) oknem ($L = 2K$)

$$\text{var}[P_{xx}^w(f)] \approx \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f)$$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

nepřímá metoda – přes výpočet odhadu autokorelační funkce

- ✓ výpočet odhadu autokorelační funkce
- ✓ váhování odhadu autokorelační funkce oknem

$$w(mT) \neq 0 \text{ pro } -M+1 \leq m \leq M-1; w(mT) = 0 \text{ pro } |m| \geq M$$

váhování autokorelační funkce oknem → vyhlazení periodogramu; sníží se rozptyl, omezí se frekvenční rozlišovací schopnost

- ✓ výpočet Fourierovy transformace váhovaného odhadu autokorelační funkce – váhování snižuje vliv odhadu autokorelační funkce počítaného pro malé hodnoty posunu $(N-m)T$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

Blackmanův-Tukeyův odhad

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = T \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{xx}(mT) \cdot w(mT) \cdot \exp(-2\pi j f m T)$$

$$w(mT) \begin{cases} \neq 0 & \text{pro } -M+1 \leq m \leq M-1 \\ = 0 & |m| \geq M \end{cases}$$

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(mT) \cdot w(mT) \cdot \exp(-2\pi j f m T)$$

ve frekvenční oblasti

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = \int_{-F/2}^{F/2} \tilde{P}_{xx}(\alpha) \cdot W(f - \alpha) d\alpha, \quad \text{kde } \tilde{P}_{xx}(\alpha) \text{ je periodogram}$$

Váhování AKF oknem \Rightarrow vyhlazení periodogramu –
sníží se rozptyl, omezí se rozlišovací schopnost

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

požadavky na okna:

- sudá funkce (symetrická kolem $m=0$) ... odhad výkonového spektra bude reálná funkce
- $W(f) \geq 0$ pro $|f| \leq F/2 \Rightarrow$ odhad výkonové spektrální funkce bude nezáporný pro $|f| \leq F/2$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA

STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

střední hodnota:

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} E[\hat{P}_{xx}(\alpha)] \cdot W(f-\alpha) d\alpha,$$

kde

$$E[\hat{P}_{xx}(\alpha)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W_B(\alpha-\theta) d\theta$$

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W_B(\alpha-\theta) \cdot W(f-\alpha) d\alpha \cdot d\theta$$

v časové oblasti:

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] = T \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} E[r_{xx}(mT)] w(mT) e^{-j2\pi f mT} =$$

$$= T \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \gamma_{xx}(mT) \cdot W_B(mT) w(mT) \cdot e^{-j2\pi f mT}$$

$W_B(mT)$... Bartlettovo okno

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA

STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

pokud $M \ll N$ ($2M-1$... délka okna
 N ... délka analyzované sekvence)
tj. délka okna w je mnohem menší než délka Bartlettova okna

$$E[\hat{P}_{xx}^{BF}] \approx \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f-\theta) d\theta$$

protože

$$\begin{aligned} \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha-\theta) W(f-\alpha) d\alpha &= \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha-\theta) \cdot W(\alpha-f) d\alpha = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha-\theta+f) \cdot W(\alpha) d\alpha \approx W(f-\theta) \end{aligned}$$

analogie: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt \sim f(t_0)$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

rozptyl

$$\text{var} [\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)] = \mathbb{E} \{ [\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)]^2 \} - \{ \mathbb{E} [\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)] \}^2$$

↑ toto umíme

$$\mathbb{E} \{ [\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)]^2 \} = \int_{-F/2}^{F/2} \int_{-F/2}^{F/2} \mathbb{E} [\hat{P}_{xx}(\alpha) \cdot \hat{P}_{xx}(\theta)] W(f-\alpha) W(f-\theta) d\alpha d\theta$$

s tím už se obecně nedá hnout, pouze klademe-li si předpoklady o vlastnostech náhodného procesu, jehož realizací je analyzovaná posloupnost –
je-li náhodný proces normální, délka analyzované posloupnosti $N \gg M$.. délka okna ráhujícího autokorelační posloupnost, pak

$$\text{var} [\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)] \approx \frac{1}{N} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}^2(\alpha) \cdot W^2(f-\alpha) d\alpha$$

dále, je-li $W(f)$ nízké ve srovnání se skutečným spektrem $\Gamma_{xx}(f)$ lze dále výraz pro rozptyl zjednodušit na

$$\begin{aligned} \text{var} [\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \int_{-F/2}^{F/2} W^2(\theta) d\theta \right] \\ &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{u=-(M-1)}^{M-1} W^2(uT) \right] \end{aligned}$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

☑ míra kvality

$$Q_A = \frac{\{E[\tilde{P}_{XX}^A(f)]\}^2}{\text{var}[\tilde{P}_{XX}^A(f)]},$$

A je označení metody

Používá se i převrácená hodnota, nazývá se **variabilita**.

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

☑ periodogram

$$E[\hat{P}_{xx}(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N T}{N \sin 2\pi f T} \right)^2 \right]$$

toto jen pro normální rozložení

pro velká N , tj. $N \rightarrow \infty$

$$E[\hat{P}_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\theta) d\theta = \Gamma_{xx}(f)$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f)$$

shrnutí:

asymptoticky nestranný, nekonzistentní

$$Q_p = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\Gamma_{xx}^2(f)} = 1$$

asymptoticky

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

✓ Bartlettův odhad

$$E[P_{xx}^B(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W_B(f - \theta) d\theta$$

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f M T}{M \cdot \sin 2\pi f T} \right)^2 \right]$$

znovu
pro
normální
rozložení

pro $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, zatímco $K = N/M$ zůstává konstantní

$$E[\hat{P}_{xx}^B(f)] = \Gamma_{xx}(f) \cdot \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\theta) \cdot d\theta = \Gamma_{xx}(f)$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^B(f)] \rightarrow \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f)$$

shrnutí: asymptoticky nestranný, nekonzistentní (když K roste s $N \rightarrow \infty$ byl by konsistentní).

$$Q_B = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\frac{1}{K} \cdot \Gamma_{xx}^2(f)} = K = \frac{N}{M}$$

asymptoticky

frekvenční rozlišovací schopnost

$$\Delta f = \frac{0,9}{MT} \Rightarrow M = \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T)}$$

určení výšky písmen při
problému 0,3dB

$$Q_B = \frac{N}{\frac{0,9}{(\Delta f \cdot T)}} = 1,11 \cdot N(\Delta f \cdot T)$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

☑ Welchův odhad

$$E[\hat{P}_{xx}^w(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W(f-\theta) d\theta$$

kde

$$W(f) = \frac{1}{MT \cdot U} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(nT) \cdot e^{-j2\pi f n T} \right|^2$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^w(f)] = \begin{cases} \frac{1}{L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f) & \dots \text{ bez překrytí segmentů} \\ \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f) & \dots \text{ s 50\% překrytím} \end{cases}$$

pro $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$

$$E[\hat{P}_{xx}^w(f)] = \Gamma_{xx}(f)$$

shrnutí: asymptoticky nestranný, pro $L \rightarrow \infty$ konzistentní, jinak ne

$$Q_w = \begin{cases} L = \frac{N}{M} & \text{bez překrytí} \\ \frac{8L}{9} = \frac{16N}{9M} & \text{s 50\% překrytím (} L = 2K = \frac{2N}{M} \text{?)} \end{cases}$$

frekvenční rozlišovací schopnost

$$\Delta f = \frac{1,28}{MT} \Rightarrow M = \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T)}$$

trojúhelníkové okno

$$Q_w = \begin{cases} 0,78 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T) & \dots \text{ bez překrytí} \\ 1,39 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T) & \dots \text{ s 50\% překrytím} \end{cases} + \Delta \text{ okno}$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

✓ Blackmanův-Tukeyho odhad

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot w(f-\theta) d\theta$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w^2(nT) \right]$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w^2(nT) = \begin{cases} 2M/N & \text{obdélníkové okno} \\ 2M/3N & \text{trojúhelníkové okno} \end{cases}$$

shrnutí: asymptoticky nestranný, nekonzistentní

$$Q_{BT} = 1,5 \frac{N}{M} \quad \text{pro } \Delta \text{ okno}$$

protože délka okna je $2M-1$, frekvenční rozlišovací schopnost

$$\Delta f = \frac{1,28}{2MT} = \frac{0,64}{MT}$$

$$Q_{BT} = \frac{1,5}{0,64} N(\Delta f \cdot T) = 2,34 \cdot N(\Delta f \cdot T)$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

srovnání všech výsledků:

! koeficient kvality závisí na N (čím větší N , tím větší Q)
neú u periodogramu

! koeficient kvality závisí na součinu $N \cdot \Delta f$
při stejné kvalitě lze pokles Δf kompenzovat růstem N a naopak

VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Požadavky vychází z předpokladu, že:

- ✓ se zpracovává sekvence o délce N vzorků a je specifikována relativní rozlišovací schopnost $\Delta f \cdot T$;
- ✓ pro výpočet se použije radix-2 FFT algoritmus
- ✓ pracnost je vyjádřena pouze počtem komplexních násobení

VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Bartlettův odhad

$$\text{délka FFT} = M = \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T)}$$

$$\text{počet FFT} = \frac{N}{M} = 1,11 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T)$$

$$\text{pracnost} = \frac{N}{M} \cdot \frac{M}{2} \cdot \log_2 M = \frac{N}{2} \log_2 \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T)}$$

Welchův odhad (50% překrytí)

$$\text{délka FFT} = M = \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T)}$$

$$\text{počet FFT} = \frac{2N}{M} = 1,56 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T)$$

$$\text{pracnost} = \frac{2N}{M} \cdot \frac{M}{2} \cdot \log_2 M = N \cdot \log_2 \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T)}$$

kromě výpočtu FFT je potřeba násobení pro váhování dat okenně
každý segment potřebuje M násobení

$$\text{celková pracnost} = 2N + N \cdot \log_2 \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T)} = N \cdot \log_2 \frac{5,12}{(\Delta f \cdot T)}$$

VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Blackmanův - Tukeyho odhad

výpočet autokorelace $r_{xx}(mT)$... přes FFT délka $2M = \frac{1.28}{(\Delta f \cdot T)}$

$$\text{celková přemost} = \frac{N}{M} [M \cdot \log_2 2M] = N \cdot \log_2 \frac{1.28}{(\Delta f \cdot T)}$$

NEPARAMETRICKÉ METODY

☑ **výhody:**

- relativně jednoduché, srozumitelné, pomocí DFT (FFT) snadno spočitatelné

☑ **nevýhody:**

- potřeba dlouhého záznamu pro dostatečnou frekvenční rozlišovací schopnost;
- prosakování spekter díky použitým oknům (maskování slabých signálů);
- omezení vyplývající z předpokladu, že $r_{xx}(mT)=0$ pro $|m| \geq N$
- vnucená periodicitu signálu definicí periodogramu