SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

V.
PARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

PARAMETRICKÉ METODY

- ☑ extrapolují hodnoty autokorelační funkce pro m≥N (k tomu je potřeba apriorní informace o analyzovaném signálu)

  ⇓

  parametrický model vzniku signálu a z toho už cokoliv

tedy: netrápí nás okna, ani prosakování spekter ⇒ lepší rozlišovací schopnost i při krátkých záznamech ⇒ **analýza časově proměnných a přechodných dějů**

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

$$y(nT)=-\sum_{k=1}^{p} a_k y((n-k)T)+\sum_{k=1}^{q} b_k x((n-k)T)$$

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ je-li posloupnost $x(nT)$, resp. $y(nT)$ realizací stacionárního náhodného procesu, platí pro jejich spektrální výkonové hustoty $\Gamma_{xx}(f)$, resp. $\Gamma_{yy}(f)$,

$$\Gamma_{yy}(f) = |H(f)|^2 . \Gamma_{xx}(f),$$

kde $|H(f)|$ je modul frekvenční charakteristiky použité lineární soustavy.

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

Je-li x(nT) bílý šum s nulovou střední hodnotou, pak jeho autokorelační funkce

$$\gamma_{xx}(mT) = \begin{cases} \sigma_x^2 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad \Gamma_{xx}(f) = \sigma_x^2$$

σ_x^2 je rozptyl posloupnosti x(nT), tj. $\sigma_x^2 = E\left[x^2(nT)\right]$ a pro spektrální hustotu výkonu výstupní posloupnosti platí

$$\Gamma_{yy}(f) = \sigma_x^2 . \left|H(f)\right|^2 = \sigma_x^2 . \frac{\left|Y(f)\right|^2}{\left|X(f)\right|^2}$$

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

Algoritmy parametrického odhadu výkonového spektra posloupnosti $y(nT)$, $n \in \langle 0, N-1 \rangle$ obsahují:

1) odhad parametrů modelu přenosové soustavy;
2) výpočet spektrální hustoty výkonu $\Gamma_{yy}(f)$ z odhadnutých parametrů

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ podle charakteru modelu přenosové soustavy dělíme algoritmy na:
  - ARMA(p,q) – autoregresive-moving average řádu (p,q);
  - AR(p), $q=0$, $b_0=1$, $H(z)=1/X(z)$ … … autoregresivní
  - MA(q), $X(z) = 1 \Rightarrow H(z) = Y(z)$ … moving average

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- nejčastěji používaný AR model – proč?
  - vhodný pro vyjádření spektra s úzkými vrcholy (rezonance)
  - výpočet parametrů vede na jednoduchou soustavu lineárních rovnic
  - Lacoss (1971) – (platí pro všechny AR modely):
    - spektrální vrcholy odhadu spektra harmonckých signálů pomocí AR modelu jsou úměrné čtverci výkonu harmonických signálů;
    - plocha vrcholu výkonové spektrální hustoty je lineárně úměrná výkonu harmonického signálu

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ dekompoziční teorém (Wold 1938)
  - ➔ jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR modelem max. ∞ řádu;
  - ➔ jakýkoliv ARMA nebo AR proces lze reprezentovat MA modelem max. ∞ řádu;

$$\Downarrow$$

je nám jedno, co použijeme za model, jen by měl mít co nejméně parametrů, které se snadno počítají

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

ARMA:

$$y(nT) = -\sum_{k=1}^{p} a_k\, y(nT-kT) + \sum_{k=0}^{q} b_k\, x(nT-kT) \qquad \Big|\cdot y(nT-mT)\,,\ \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E}\left[y(nT)\cdot y(nT-mT)\right] = -\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot \mathcal{E}\left[y(nT-kT)\, y(nT-mT)\right] + \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot \mathcal{E}\left[x(nT-kT)\cdot y(nT-mT)\right]$$

$$\gamma_{yy}(mT) = -\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot \gamma_{yy}(mT-kT) + \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot \gamma_{xy}(mT-kT)$$

$\gamma_{xy}(mT)$ ... křížová korelační posloupnost mezi $x(nT)$ a $y(nT)$

$$\gamma_{xy}(mT) = \mathcal{E}\left[y(nT)\cdot x(nT+mT)\right] = \mathcal{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(kT)\cdot x(nT-kT)\cdot x(nT+mT)\right] =$$

předpokládáme kauzální filtr

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)\cdot \mathcal{E}\left[x(nT)\, x(nT+mT+kT)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)\cdot \gamma_{xx}(mT+kT) =$$

$$= h(-mT)\cdot \sigma_x^2 = \begin{cases} 0 & m > 0 \\ \sigma_x^2\, h(-mT) & m \leq 0 \end{cases}$$

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

ARMA (pokračování):

$$\gamma_{yy}(mT) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot \gamma_{yy}(mT-kT) & m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot \gamma_{yy}(mT-kT) + \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(k) \cdot b_{k+m} & 0 \le m \le q \\ \gamma_{yy}(-mT) & m < 0 \end{cases}$$

nelineární vztah mezi $\gamma_{yy}(mT)$ a parametry a_k a b_k

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

ARMA (pokračování):

lze rozdělit na lineární vztah pro určení parametrů a_k, $m>q$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(q) & \gamma_{yy}(q-1) & \cdots & \gamma_{yy}(q-p+1) \\ \gamma_{yy}(q+1) & \gamma_{yy}(q) & \cdots & \gamma_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{yy}(q+p-1) & \gamma_{yy}(q+p-2) & \cdots & \gamma_{yy}(q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(q+1) \\ \gamma_{yy}(q+2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(q+p) \end{bmatrix}$$

a nelineární vztah pro $0 \le m \le q$

jiná interpretace:

hodnoty autokorelační posloupnosti $\gamma_{yy}(mT)$, $m>q$ jsou jednoznačně určeny koeficienty charakteristického polynomu a_k a hodnoty $\gamma_{yy}(mT)$, $0 \le m \le p$

z toho plyne, že lineární model automaticky definuje hodnoty autokorelační posloupnosti $\gamma_{yy}(mT)$ pro $m>q$

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

AR:

$$
\gamma_{yy}(mT) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \, \gamma_{yy}(mT - kT) & m > 0 \qquad (q=0) \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot \gamma_{yy}(mT - kT) + \sigma_x^2 & m = 0 \qquad (0 \le m \le q,\ q=0) \\ \gamma_{yy}(-mT) & m < 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(-1) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+1) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdot & \gamma_{yy}(-p+2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{yy}(p-1) & \gamma_{yy}(p-2) & \cdots & \gamma_{yy}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix}
$$

$$
\sigma_x^2 = \gamma_{yy}(0) + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot \gamma_{yy}(-kT)
$$

$$
\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(-1) & \cdots & \gamma_{yy}(-p) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{yy}(p) & \gamma_{yy}(p-1) & \cdots & \gamma_{yy}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Yule-Walkerovy rovnice

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

MA:

$$h(k) = b_k \quad 0 \leq k \leq q \qquad a_k = 0 \quad 1 \leq k \leq p$$

$$\gamma_{yy}(mT) = \begin{cases} 0 & m > q \\ \sigma_x^2 \cdot \sum_{k=0}^{q-m} b_k \cdot b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{yy}(-mT) & m < 0 \end{cases}$$

AR MODELY

Yule – Walkerova metoda

výpočet odhadu autokorelace ze signálové posloupnosti y(nT) a pomocí tohoto odhadu odhad parametrů $\tilde{a}_k$ AR modelu

užitečnosti:

1) odhad AKF
2) řešení Yule-Walkerových rovnice;
3) odhad výkonové spektrální hustoty

AR MODELY

Yule – Walkerova metoda

ad 1)

$$\hat{r}_{xx}(mT) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|} x(nT) \cdot x(nT+mT)$$

=> autokorelační matice je pozitivně semidefinitní

výsledný AR model bude stabilní

předpokládá se, že stabilní AR model reprezentuje data nejlépe

ad 3)

$$\hat{P}_{xx}^{YW}(f) = \frac{\hat{\sigma}_{xp}^{2} \cdot T}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k) \cdot e^{-j2\pi f kT}\right|^2}$$

$$\hat{\sigma}_{xp}^{2} = r_{yy}(0) \cdot \prod_{k=1}^{p} \left[1 - |\hat{a}_k(k)|^2\right] = \hat{E}_p^f$$

je odhad minimální střední kvadratické odchylky prediktoru p-tého řádu

AR MODELY

Yule – Walkerova metoda

ad 2) řešení Yule-Walkerových rovnic

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

efektivní rekurzivní algoritmus výpočtu koeficientů a_k, k=1,…,p z Y.-W.rovnic využívající skutečnosti, že autokorelační matice má vlastnosti Toeplicovy matice (T(i,j)=t(i-j))

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \cdots & \gamma_{xx}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{pmatrix}$$

pracnost L.-D. algoritmu je $\mathcal{O}(p^2)$

pracnost Gaussovy eliminační metody je $\mathcal{O}(p^3)$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

dopředná lineární predikce

normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\gamma_{yy}(lT-kT)=0 \quad l=1,2,\ldots,p;\ a_p(0)=1$$

výsledná minimální MSE

$$E_p^f=\gamma_{yy}(0)+\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_{yy}(-kT)$$

rozšířené normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\gamma_{yy}(lT-kT)=\begin{cases} E_p^f & l=0 \\ 0 & l=1,2,\ldots,p \end{cases}$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

- ☑ výpočet je rekurzivní, vychází z řešení systému 1. řádu a výsledky pro systém i-tého řádu se odvozují z řešení (i-1). řádu

systém 1. řádu

p=1

$$a_1(0).\gamma_{yy}(1) + a_1(1).\gamma_{yy}(0) = 0 \Rightarrow \Big|_{a_1(0)=1} \quad a_1(1) = -\frac{\gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0)}$$

$$E_1^f = \gamma_{yy}(0) + a_1(1).\gamma_{yy}(-1) = \gamma_{yy}(0) - \frac{\gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0)}.\gamma_{yy}(-1) =$$

$$= \gamma_{yy}(0) - \frac{\left|\gamma_{yy}(1)\right|^2}{\gamma_{yy}^2(0)}.\gamma_{yy}(0) = \gamma_{yy}(0).\left[1 - \left|a_1(1)\right|^2\right]$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

systém 2. řádu

p=2

$$a_2(0).\gamma_{yy}(1)+a_2(1).\gamma_{yy}(0)+a_2(2).\gamma_{yy}(-1)=0$$

$$a_2(0).\gamma_{yy}(2)+a_2(1).\gamma_{yy}(1)+a_2(2).\gamma_{yy}(0)\quad=0$$

$$a_2(0)=1$$

$$a_2(1).\gamma_{yy}(0)+a_2(2).\gamma_{yy}(-1)=-\gamma_{yy}(1)$$

$$\gamma_{yy}(1)=-a_1(1).\gamma_{yy}(0)$$

$$a_2(1).\gamma_{yy}(1)+a_2(2).\gamma_{yy}(0)\quad=-\gamma_{yy}(2)$$

$$a_2(1).\gamma_{yy}(0)-a_2(2).a_1(1).\gamma_{yy}(0)=a_1(1).\gamma_{yy}(0)$$

$$\boxed{a_2(1)=a_1(1)+a_1(1).a_2(2)}$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

systém 2. řádu (pokračování)

p=2

$$\gamma_{yy}(1) = -a_1(1).\gamma_{yy}(0)$$

$$a_1(1).\gamma_{yy}(1) + a_1(1).a_2(2).\gamma_{yy}(1) + a_2(2).\gamma_{yy}(0) = -\gamma_{yy}(2)$$

$$a_2(2).\left[\gamma_{yy}(0) - a_1^2(1).\gamma_{yy}(0)\right] = -\gamma_{yy}(2) - a_1(1).\gamma_{yy}(1)$$

$$\boxed{a_2(2) = -\frac{\gamma_{yy}(2) + a_1(1).\gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0) - a_1^2(1).\gamma_{yy}(0)} = -\frac{\gamma_{yy}(2) + a_1(1).\gamma_{yy}(1)}{E_1^f}}$$

$$E_1^f = \sigma_{k-1}^2$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

obecně:

$$a_k(k) = \frac{-\gamma_{yy}(k) + \sum_{r=1}^{k-1} a_{k-1}(r).\gamma_{yy}(k-r)}{E_{k-1}^f}$$

$$a_k(i) = a_{k-1}(i) + a_{k-1}(k-i).a_k(k)$$

$$E_k^f = \sigma_k^2 = [1 - a_k^2(k)].\sigma_{k-1}^2$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

poznámky + užitečnosti + zajímavosti

- ☑ L.-D. algoritmus poskytuje odhad parametrů AR systému nejen pro požadovaný řád, nýbrž i pro všechny nižší řády;
- ☑ jak se správný řád pozná:

  $\sigma_k^2 = E_k^f$ se v další iteraci přestane zmenšovat, resp. $a_{p+1}(k)=a_p(k)$ pro $k=1,2,..,p$ a tím $a_{p+1}(p+1)=0$

  obecně pro proces AR(p) $a_k(k)=0$ a $\sigma_k^2 = \sigma_p^2$ pro $k>p$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

poznámky + užitečnosti + zajímavosti

☑ parametry $\{a_1(1), a_2(2), \ldots, a_p(p)\}$ se často nazývají koeficienty reflexe K_k (název souvisí s realizací predikčních algoritmů mřížkovou strukturou);

pokud $\{\gamma_{yy}(0), \gamma_{yy}(1), ,\ldots, \gamma_{yy}(p)\}$ je skutečná autokorelační posloupnost, tj. AK matice je pozitivně semidefinitní, pak

$$|a_k(k)| = |K(k)| \leq 1 \text{ pro } k=1, 2, \ldots, p;$$

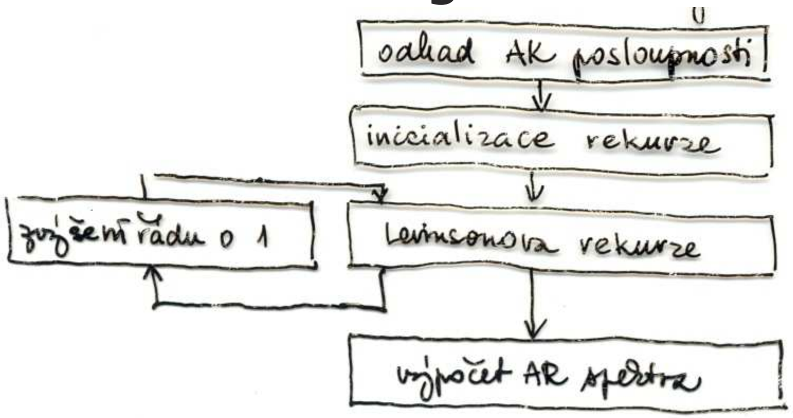
důsledky:

- ➔ $\sigma_{k+1}^2 \leq \sigma_k^2$, to znamená, že σ_k^2 dosáhne minima právě při správném řádu;
- ➔ nutnou a postačující podmínkou, aby póly X(z) ležely uvnitř nebo na jednotkové kružnici v rovině z je $|K(k)| \leq 1$ pro $k=1, 2, \ldots, p \Rightarrow$ AR systém je stabilní;
- ➔ je-li $|K(k)| = 1$ pro některé k, pak je třeba rekurzi ukončit, protože $\sigma_k^2=0$ … v tom případě je proces ryze harmonický

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

poznámky + užitečnosti + zajímavosti

- ☑ pokud by byl L.-D. algoritmus implementován pomocí paralelního procesoru s optimálním počtem jednotek, je pracnost algoritmu $\mathcal{O}(p.\log_2 p)$;
- ☑ při odhadu výkonového spektra harmonických signálů pomocí AR modelu jsou spektrální vrcholy AR spektra úměrné čtverci výkonu harmonických signálů;
- ☑ plocha pod spektrálními vrcholy výkonové spektrální hustoty je lineárně úměrná výkonu harmonického signálu;
- ☑ blokové schéma L.-D. algoritmu



A JE TO!